

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى مُحَمَّدٍ وَآلِ مُحَمَّدٍ وَعَجِّلْ فَرَجَهُمْ

# ریاضیات گسسته

رشته ریاضی و فیزیک

پایه دوازدهم

دوره دوم متوسطه



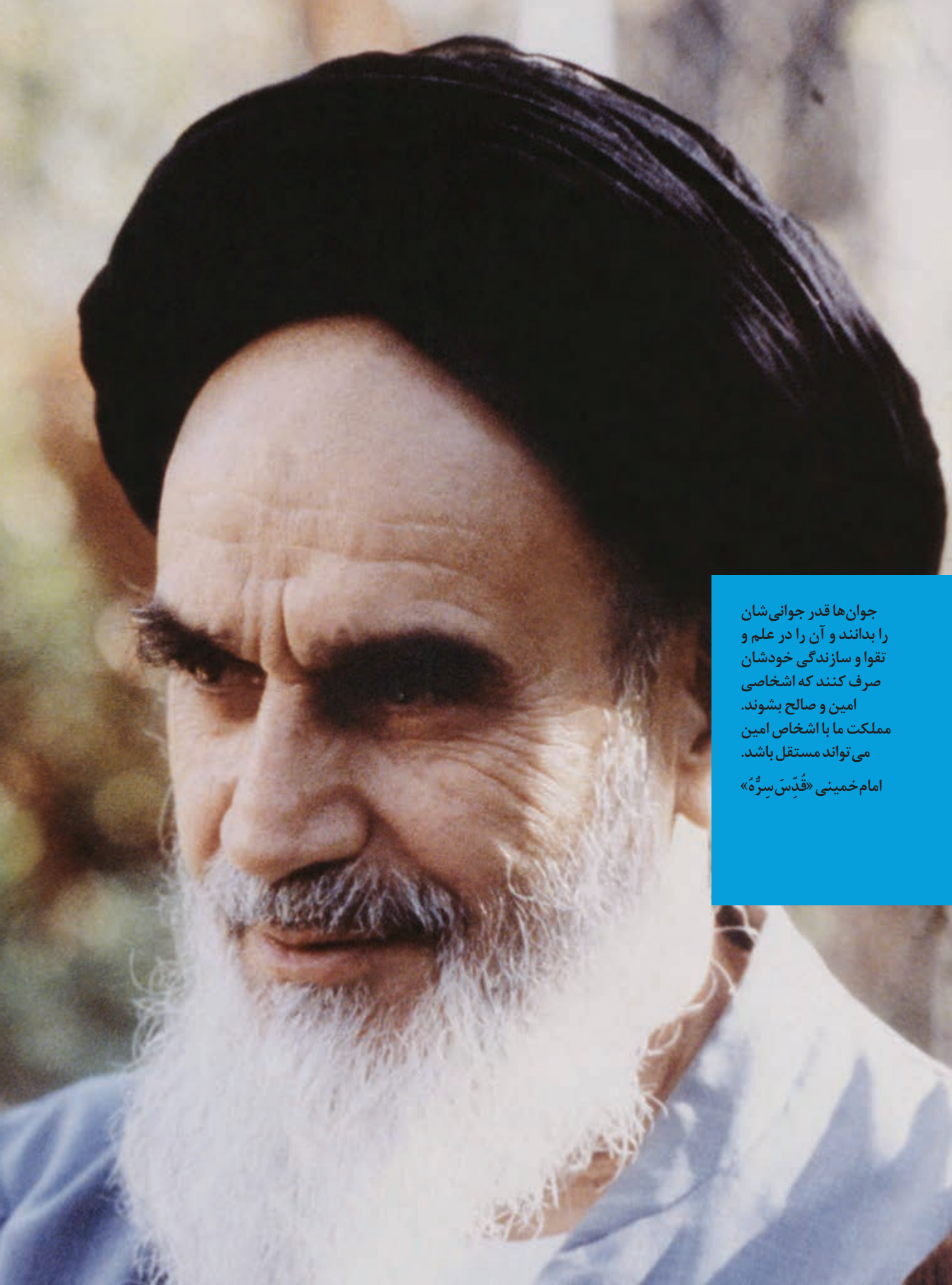


وزارت آموزش و پرورش  
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب:	ریاضیات گسسته - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۲۲۱۵
پدیدآورنده:	سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:	دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:	سید محمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
مدیریت آماده‌سازی هنری:	حمیدرضا امیری، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سید صالحی و امید نقشینه ارجمند (اعضای گروه تألیف)
شناسه افزوده آماده‌سازی:	جعفر ربانی (ویراستار)
نشانی سازمان:	اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
ناشر:	احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - جواد صفری (مدیر هنری) - زهره بهشتی شیرازی (صفحه‌آرا) - مریم کیوان (طراح جلد) - مریم دهقان‌زاده (رسم) - سیده فاطمه طباطبایی، سید کیوان حسینی، علیرضا ملکان، زینت بهشتی شیرازی و راحله زادفتح‌اله (امور آماده‌سازی)
چاپخانه:	تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی) تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۹۲۶۶، ۸۸۳۰، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹ وبگاه: <a href="http://www.chap.sch.ir">www.chap.sch.ir</a> و <a href="http://www.irtextbook.ir">www.irtextbook.ir</a>
سال انتشار و نوبت چاپ:	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵-۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹
	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص» چاپ هفتم ۱۴۰۳

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۳۱۱۱-۲

ISBN: 978-964-05-3111-2



جوان‌ها قدر جوانی‌شان  
را بدانند و آن را در علم و  
تقوا و سازندگی خودشان  
صرف کنند که اشخاصی  
امین و صالح بشوند.  
مملکت ما با اشخاص امین  
می‌تواند مستقل باشد.  
امام خمینی «قَدِّسَ سِرُّهُ»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از این کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.



## فهرست

فصل ۱. آشنایی با نظریهٔ اعداد .....	۱
درس ۱. استدلال ریاضی .....	۲
درس ۲. بخش پذیری در اعداد صحیح .....	۹
درس ۳. هم‌نهمی در اعداد صحیح و کاربردها .....	۱۸
فصل ۲. گراف و مدل‌سازی .....	۳۱
درس ۱. معرفی گراف .....	۳۲
درس ۲. مدل‌سازی با گراف .....	۴۳
فصل ۳. ترکیبیات (شمارش) .....	۵۵
درس ۱. مباحثی در ترکیبیات .....	۵۶
درس ۲. روش‌هایی برای شمارش .....	۷۳
منابع .....	۸۵

## مقدمه

کتاب حاضر با عنوان «ریاضیات گسسته» در راستای برنامهٔ درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های ریاضی دورهٔ دوم متوسطه تألیف شده است. این کتاب بر خلاف درس‌هایی چون حسابان که بیشتر به مباحثی در ریاضیات پیوسته می‌پردازد، به درس‌هایی مانند گراف، ترکیبیات و روش‌های شمارشی و نظریهٔ اعداد می‌پردازد که در حیطهٔ ریاضیات گسسته قرار دارند و با مجموعه‌های متناهی و یا شمارا سر و کار دارند. یکی از تفاوت‌های مهم این کتاب با کتاب قبلی مربوط به دورهٔ پیش‌دانشگاهی، کاهش قابل ملاحظه محتوا است. همانند پایه‌های قبلی، ساختار کتاب بر اساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان، «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کنند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به عهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با در نظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به وسیله معلم وجود دارد. در هر حال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد دربارهٔ یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی برای همه طراحان الزامی است. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوای آن خواهد شد. شایسته است همکاران ارجمند بر رعایت این موضوع نظارت دقیق داشته باشند. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید بر اساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که احیاناً پیش از این، سال‌ها به صورت سنتی ارائه شده‌اند و یا توسط برخی از کتاب‌های غیراستاندارد توصیه می‌شوند. طرح این‌گونه سؤالات که اهداف آموزشی کتاب را دنبال نمی‌کنند در کلاس درس و نیز در ارزشیابی‌ها، به هیچ عنوان توصیه نمی‌شود.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد. اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان از کلیه امکانات موجود نظیر سامانه اعتبارسنجی، وبگاه گروه ریاضی دفتر تألیف، پیام‌نگار (ایمیل)، دعوت از دبیران مجرب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دبیران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. در راستای مشارکت دبیران محترم ریاضی، پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب توسط این عزیزان از استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال شده است، که لازم است از زحمات آنها تشکر و قدردانی شود. اعضای تیم تألیف به حضور و مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می‌کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق رمزبینه سریع پاسخ نظرسنجی کتاب‌های درسی دارد.

مؤلفان



نظرسنجی کتاب‌درسی

معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب کتاب های درسی از طریق سامانه «نظرسنجی از محتوای کتاب درسی» به نشانی «nazar.roshd.ir» یا نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴ - ۱۵۸۷۵ ارسال کنند.



سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی



# آشنایی با نظریهٔ اعداد



- ۱ استدلال ریاضی
- ۲ بخش پذیری در اعداد صحیح
- ۳ رابطهٔ هم نهشتی روی  $Z$  و کاربردهای آن

نظریه اعداد و به خصوص مبحث هم نهشتی‌ها کاربردهای بسیاری در علوم مربوط به رایانه، رمزنگاری و رمزگشایی، حساب با اعداد صحیح بزرگ، طراحی الگوریتم‌های سودمند برای حساب رایانه‌ای و ایجاد اعداد شبه تصادفی دارد.



## درس ۱ استدلال ریاضی

نقش استدلال در زندگی انسان‌ها انکارناپذیر است. همه ما در زندگی روزمره و یا در زندگی حرفه‌ای خود نیازمند کسب توانمندی در این زمینه هستیم. تسلیم عقل در برابر استدلال موهبتی الهی است که امکان تعامل بین انسان‌ها و توسعه علوم گوناگون و رشد و بالندگی را در زمینه‌های مختلف برای بشر فراهم ساخته است. استدلال و اثبات در ریاضیات نیز جایگاه ویژه‌ای دارد. درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و توسعه آن کمک شایانی می‌نماید. هدف ما در این درس آشنایی با برخی از روش‌های استدلال و اثبات در ریاضی است.

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید:

الف) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش پذیر است.

ب) عدد  $2^n + 1$  به ازای همه عددهای طبیعی  $n$ ، عددی اول است.

حل: گاهی ممکن است برای فهم یک گزاره، مثال‌هایی را برای صدق آن بررسی کنیم.

برای نمونه برای گزاره الف داریم:

$$5 + 6 + 7 = 18$$

$$10 + 11 + 12 = 33$$

$$25 + 26 + 27 = 78$$

$$31 + 32 + 33 = 96$$

در همه موارد حاصل جمع‌های به دست آمده، درستی گزاره الف را نشان می‌دهند همچنین برای

$n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=3$  و  $n=4$  حاصل  $2^n + 1$  به ترتیب برابر ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ است

که همگی اعداد اول هستند و ظاهراً بر درستی گزاره ب دلالت می‌کنند.

آیا ارائه این مثال‌ها برای برقراری گزاره‌های الف و ب کافی هستند، اگر کافی نیست آیا

ارائه مثال‌های بیشتر کفایت می‌کند؟

در مورد الف هر چقدر مثال ارائه کنید، مشاهده خواهید کرد که گزاره برقرار است، اما در مورد

گزاره ب، اگر  $n=5$  آن‌گاه:

$$2^5 + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$



که به وضوح نشان می‌دهد، حاصل یک عدد اول نیست. همین «مثال نقض» نشان می‌دهد که گزارهٔ ب در حالت کلی درست نیست. این روش استدلال به صورت معمول برای رد کردن یک حکم کلی به کار می‌رود و استدلال به کمک «مثال نقض» است.

در مورد گزاره الف با اینکه نمی‌توانید مثال نقضی ارائه کنید، اما درستی گزاره با ارائه مثال به دست نمی‌آید. مثلاً یک احتمال این است که نتوانید مثال نقضی ارائه کنید و یا اینکه تاکنون مثال نقضی برای آن ارائه نشده باشد. به هر حال در اینجا اثبات دشوار نیست. کافی است سه عدد طبیعی را با  $n$ ،  $n+1$  و  $n+2$  نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

که نشان می‌دهد گزاره الف در حالت کلی درست است.

این نوع اثبات کردن را «اثبات مستقیم» می‌نامند. البته اثبات مستقیم ممکن است کاملاً پیچیده باشد. هدف این کتاب طرح اثبات‌های دشوار نیست<sup>۱</sup>. محتوای آموزش این درس در چارچوب مطالبی است که تاکنون آموخته‌اید. در کار در کلاس نمونه‌هایی از استدلال به روش «اثبات مستقیم» و استدلال به کمک «مثال نقض» را مشاهده خواهید کرد.

## کار در کلاس

هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$ :  $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

پ) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد  $2^n - 1$  اول است.

ت) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

ث) اگر برای سه مجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  داشته باشیم  $A \cup B = A \cup C$  آنگاه  $B = C$

ج) اگر  $k$  حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه  $4k + 1$  مربع کامل است.

## خواندنی

یافتن مثال نقض ممکن است کار بسیار دشواری باشد. گاهی سال‌ها وقت برای یافتن مثال نقض لازم بوده است. به طور مثال عبارت  $991n^2 + 1$  را برای  $n$ ‌های طبیعی در نظر بگیرید. اگر حاصل این عبارت را برای  $n=1$ ،  $n=2$ ، ... و  $n=1000$  به دست آورید هیچ کدام مجذور کامل نمی‌باشند. آیا به نظر شما می‌توان حکم کرد که «برای  $n$ ‌های طبیعی عبارت  $991n^2 + 1$  هیچ‌گاه مجذور کامل نیست.» پاسخ منفی است! سرینسکی ریاضی‌دان معاصر لهستانی، کوچک‌ترین عدد طبیعی که به ازای آن  $991n^2 + 1$  مجذور کامل باشد را ارائه کرد. این عدد ۲۹ رقم دارد! عدد  $12055735790331359447442538737$  مثال نقض مورد نظر است.

۱- طرح مسائل در ارزشیابی‌ها باید در سطح مطالب کتاب باشد. طرح مسائل پیچیده که نیاز به دانش محتوایی سطح بالا دارند مورد تأیید مؤلفین نیست.

## اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $n^2 - 5n + 7$  عددی فرد است.

حل: دو حالت در اینجا ممکن است رخ دهد:

الف)  $n$  زوج است، به عبارت دیگر  $n = 2k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ): در این حالت داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1$$

که حاصل یک عدد فرد است.

ب)  $n$  فرد است، یعنی  $n = 2k - 1$  ( $k \in \mathbb{N}$ ): در این حالت هم داریم:

$$\begin{aligned} n^2 - 5n + 7 &= (2k - 1)^2 - 5(2k - 1) + 7 = 4k^2 - 4k + 1 - 10k + 5 + 7 \\ &= 4k^2 - 14k + 13 = 2(2k^2 - 7k + 6) + 1 \end{aligned}$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است.

به عبارت دیگر زوج یا فرد بودن  $n$ ، فرد بودن  $n^2 - 5n + 7$  را نتیجه می‌دهد.

اگر زوج بودن  $n$  را با  $p$  و فرد بودن  $n$  را با  $q$  و فرد بودن  $n^2 - 5n + 7$  را با  $r$  نمایش دهیم، حکم را می‌توان به صورت گزاره  $p \vee q \Rightarrow r$  نمایش داد. با توجه به هم ارزی  $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$  شیوه اثبات در مثال فوق توجیه می‌شود.

$$\begin{aligned} p \vee q \Rightarrow r &\equiv r \vee \sim(p \vee q) \\ &\equiv r \vee (\sim p \wedge \sim q) \\ &\equiv (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q) \\ &\equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \end{aligned}$$

به طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزاره دلخواه داریم:

$$P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n \Rightarrow r \equiv (P_1 \Rightarrow r) \wedge (P_2 \Rightarrow r) \wedge \dots \wedge (P_n \Rightarrow r)$$

نوع دیگری از در نظر گرفتن حالت‌های ممکن، در مثال زیر ارائه شده است.

مثال: ثابت کنید اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند و  $ab = 0$  آنگاه  $a = 0$  یا  $b = 0$ .

حل: برای  $a$  دو حالت ممکن است رخ دهد:

الف) اگر  $a = 0$ ، در این حالت حکم برقرار است (چرا؟)

ب) اگر  $a \neq 0$ ، در این حالت  $a^{-1}$  (معکوس  $a$ ) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطه  $ab = 0$  در  $a^{-1}$  داریم:

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \times 0$$

$$\Rightarrow b = 0$$

بنابراین در هر دو حالت حکم برقرار است.

الف) اگر  $a$  و  $b$  دو عدد صحیح باشند و  $ab$  عددی فرد باشد، ثابت کنید  $a^2 + b^2$  زوج است.

ب)  $A = \{3, 4\}$  یک زیرمجموعه از مجموعه  $\{1, 2, \dots, 6\}$  است و  $n \in S$ ، اگر  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$  یک عدد زوج باشد ثابت کنید  $n \in A$ .

## اثبات غیر مستقیم

### اثبات به روش برهان خلف

در هندسه (۱) با اثبات به روش برهان خلف که نوعی اثبات غیرمستقیم است آشنا شده‌اید. در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی بودن همه مراحل) معلوم می‌شود که فرض نادرست بودن حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

در تعاملات و محاورات روزمره هم ممکن است از این روش استدلال استفاده کنیم. آنجا که با فردی نظری کاملاً متضاد داریم و به درستی نظر خود اطمینان داریم، برای رسیدن به نتیجه موردنظرمان، موقتاً نظر مخالف خود را می‌پذیریم و با استفاده از دنباله‌ای از استدلال‌ها و ادبیاتی که مورد توافق دو طرف است، نشان می‌دهیم که پذیرفتن نظر او به بن بست یا تناقض منجر می‌شود.

مثال: ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل: فرض کنیم که  $r$  یک عدد گویا و  $x$  یک عدد گنگ باشد. نشان می‌دهیم که  $r+x$  یک عدد گنگ است. اگر (فرض خلف)  $r+x$  گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. پس تفاضل  $r+x$  و  $r$  باید عددی گویا باشد یعنی  $r+x-r \in Q$  و از آنجا  $x \in Q$  که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌گردد.

مثال: حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل: فرض کنیم  $r$  یک عدد گویای ناصفر باشد و  $x$  عددی گنگ باشد ولی  $rx$  عددی گویا (فرض خلف) باشد. می‌دانیم که حاصل ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست. علاوه بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویاست. بنابراین  $(\frac{1}{r})(rx) \in Q$  و از آنجا  $x \in Q$  که با فرض در تناقض است.

مثال:  $a_1, a_2, a_3$  عددهایی صحیح هستند و  $b_1, b_2, b_3$  هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته اند. ثابت کنید  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$  عددی زوج است.

حل: برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم.  $a_1, a_2, a_3$  را به ترتیب ۵، ۸ و ۱ در نظر می‌گیریم و  $b_1, b_2, b_3$  را ۸، ۱ و ۵ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) = (5 - 8)(8 - 1)(1 - 5) = (-3)(7)(-4) = 84$$

اگر  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$  زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هر سه عامل  $a_1 - b_1, a_2 - b_2$  و  $a_3 - b_3$  هم باید فرد باشند (چرا؟) و در نتیجه مجموع آنها هم باید عددی فرد باشد، یعنی  $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)$  باید عددی فرد باشد. اما مجموع این سه عبارت صفر است!

## کاور کلاسی

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر  $x$  یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید  $\frac{1}{x}$  نیز گنگ است.

ب) اگر تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته ولی  $g$  در  $x = a$  ناپیوسته باشد، ثابت کنید  $f+g$  در  $x = a$  ناپیوسته است.

## اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آنها را گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم.

اگر  $P$  و  $Q$  دو گزاره هم‌ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آنگاه گزاره‌های  $P \Rightarrow Q$  و  $Q \Rightarrow P$

هر دو درست هستند و در نتیجه  $P \Leftrightarrow Q$  یک گزاره درست است.

به عکس اگر ترکیب دو شرطی  $P \Leftrightarrow Q$  درست باشد، آنگاه  $P$  و  $Q$  دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آنها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود. به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را بررسی کنیم. در عمل به‌طور معمول درستی یا نادرستی گزاره‌ای که معمولاً ساده‌تر است را انتخاب می‌کنیم. البته این کار ممکن است که در یک مرحله انجام نشود، به‌طور مثال اگر  $P, Q$  و  $R$  سه گزاره باشند و  $Q \Leftrightarrow R$  و  $P \Leftrightarrow Q$  یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات درستی یا نادرستی هر یک، تکلیف دو گزاره دیگر را معلوم خواهد کرد. به هر حال ممکن است این عمل ادامه یابد و در تعدادی متناهی مرحله کار انجام شود.

با توجه به آنچه گفته شد، در هنگام استفاده از این روش اثبات (که گاهی به آن «روش بازگشتی» هم می‌گویند) توانایی ارائه ترکیب دو شرطی درست و مناسب بسیار اساسی است.

مثال: ترکیب دو شرطی  $(a, b \in \mathbb{R}), a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$  درست است ولی ترکیب دو شرطی  $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$  درست

نیست (چرا؟)

اگر  $a, b \in \mathbb{R}$  کدام یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

الف)  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

ب)  $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$

مثال: اگر  $a > 0$  ثابت کنید  $a + \frac{1}{a} \geq 2$

اگر  $a > 0$ ، داریم:  $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$

این ترکیب دو شرطی بیان نمی‌کند که کدام گزاره درست است، بلکه تنها بیانگر آن است که دو گزاره هم ارز هستند و اثبات هر کدام، دیگری را نتیجه می‌دهد. به نظر شما چرا این دو گزاره هم ارز هستند؟ اثبات کدام یک ساده‌تر است؟

همچنین  $a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0$

و در نهایت:  $a^2 + 1 - 2a \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$

آخرین گزاره یعنی  $(a-1)^2 \geq 0$  همواره برقرار است، به عبارت دیگر حکم هم ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار است. پس حکم ثابت شده است. مراحل اثبات را (با شرط  $a > 0$ ) به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0 \text{ همواره برقرار است.}$$

به هر حال این نوع استدلال در گفت‌وگوها و مذاکرات معمول هم مورد استفاده قرار می‌گیرد، آنجا که برای بررسی یک حکم، معادل آن را به مخاطب یادآوری می‌کنیم و از عباراتی نظیر: آنچه که شما می‌گویید معادل این است که ...، یا گفته شما به مثابه آن است که ...، در آنجا باید از قوانین و ادبیات مورد پذیرش طرفین پیروی کنیم و در ریاضیات از منطق ریاضی. در هر حال در هنگام استفاده از این نوع استدلال در زندگی روزمره هم ممکن است پس از چند مرحله به نتیجه برسیم.

مثال: ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

حل: اگر  $a$  و  $b$  دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ گزاره همیشه درست.}$$

مثال: اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید:  $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

حل:

اثبات کوتاه و زیبایی است. حکم با یک گزاره همیشه درست (سمت راست) هم ارز است.

راه دوم:  $a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0$ . گزاره همیشه درست.

البته ممکن است شما هم راه حل دیگری برای این مسئله ارائه کنید.

شیوه‌ای که در این قسمت از درس مورد استفاده قرار گرفت را برای نشان دادن نادرستی یک گزاره نیز می‌توان به کار برد.

### کار در کلاس

الف) اگر  $n$  یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن  $n$  و زوج بودن  $n^2$  هم‌ارزند؟

ب) آیا دو گزاره زیر هم‌ارزند؟

۱ نقطه  $C$  روی عمود منصف پاره خط  $AB$  قرار دارد.

۲ فاصله نقطه  $C$  از دو سر پاره خط  $AB$  یکسان است.

### تمرین

۱ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

الف) اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی هم علامت باشند داریم:

ب) برای هر سه عدد حقیقی  $x$  و  $y$  و  $z$  داریم:

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

پ) برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  داریم:

$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$

۲ عددی حقیقی مانند  $x$  ارائه کنید به طوری که  $x^3 < x^2$ .

۳ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد گنگ باشند ولی  $\alpha + \beta$  گویا باشد، ثابت کنید  $\alpha - \beta$  و  $\alpha + 2\beta$  گنگ هستند.

$x^2 + y^2 = (x + y)^2$

۴ آیا اعدادی صحیح مانند  $x$  و  $y$  وجود دارند که

۵ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر  $a$  و  $b$  چنان وجود دارند که:

$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  ( $a+b \neq 0$ )

۶ گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.



قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی یا دسته‌بندی کردن تعدادی از چیزها را، بدون آنکه باقی مانده‌ای داشته باشیم، «عاد کردن» یا شمارش آن اشیا، توسط شمارنده‌ها می‌گویند. مثلاً، ۱۲ شیء را می‌توان با شمارنده‌های مثبت عدد ۱۲ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ دسته‌بندی یا شمارش کرد. در این فصل برای نمایش این مفهوم از نماد « $\mid$ » استفاده کرده و مثلاً می‌نویسیم  $2 \mid 12$  و می‌خوانیم عدد ۲ عدد ۱۲ را می‌شمارد یا عاد می‌کند. بیان دیگر این مفهوم آن است که بگوییم عدد ۱۲ بر عدد ۲ بخش پذیر است (باقی مانده تقسیم صفر است).

توجه داشته باشید که دسته‌بندی کردن اشیا در دسته‌های صفرتایی یا شمارش تعدادی شیء خاص به صورت صفر تا صفر تا کار بی‌معنایی است؛ لذا صفر هیچ عدد غیر صفری را نمی‌شمارد و هیچ عدد غیر صفری بر صفر بخش پذیر نمی‌باشد در ضمن توجه داشته باشید که هر عدد بر خودش و بر ۱ بخش پذیر است؛ یعنی اگر  $a$  عددی طبیعی باشد  $1 \mid a$  و  $a \mid a$ . (عدد ۱ هر عدد صحیح را عاد می‌کند و هر عدد بر خودش بخش پذیر است).

حال با توجه به اینکه مفهوم بخش پذیری  $b$  بر  $a$  معادل است با اینکه بنویسیم  $a \mid b$  (عدد  $a$ ، عدد  $b$  را می‌شمارد یا عدد  $a$ ، عدد  $b$  را عاد می‌کند) مفهوم بخش پذیری را می‌توان برای هر دو عدد صحیح به کار برد، مثلاً می‌توان گفت، عدد  $28 - 4$  بر  $4$  بخش پذیر است (زیرا،  $4 \times (-7) = -28$  یا باقی مانده تقسیم  $28 - 4$  بر عدد  $4$  صفر است) پس در حالت کلی و با تعمیم مفهوم عاد کردن به مجموعه اعداد صحیح عاد کردن به صورت زیر تعریف می‌شود.

عدد صحیح  $a$ ، که مخالف صفر است<sup>۲</sup>، شمارنده عدد  $b$  است - یا  $a$ ،  $b$  را می‌شمارد یا  $a \mid b$  یا  $b$  بر  $a$  بخش پذیر است - هرگاه عددی صحیح چون  $q$  وجود داشته باشد به طوری که  $b = aq$ .

اگر عدد  $b$  بر عدد  $a$  بخش پذیر نباشد یا عدد  $a$  عدد  $b$  را عاد نکند می‌نویسیم،  $a \nmid b$

۱- در سراسر این فصل منظور از عدد، عدد صحیح است.

۲- اینکه صفر عدد صفر را می‌شمارد به صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

۱ با توجه به تعریف رابطه عاد کردن جاهای خالی را پر کنید.

الف)  $7 \mid 63 \Leftrightarrow 63 = \dots \times \dots$

ب)  $91 = 7 \times \dots \Leftrightarrow \dots \mid 91$

پ)  $-6 \mid 54 \Leftrightarrow \dots = \dots \times (-6)$

ت)  $5 \mid -35 \Leftrightarrow \dots = 5 \times \dots$

ث)  $0 = 18 \times \dots \Leftrightarrow 18 \mid \dots$

ج)  $a \mid 1 \Rightarrow a = \dots$  یا  $a = \dots$

چ)  $26 = 2 \times 13 \Rightarrow 2 \mid \dots$  و  $\dots \mid 26$

۲ با استفاده از تعریف عاد کردن و قوانین ضرب و تقسیم اعداد توان دار با پایه‌های برابر، ابتدا نشان دهید که  $3^5 \mid 3^9$  و

سپس ثابت کنید:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m \leq n \Rightarrow a^m \mid a^n$$

$$(3^9 = 3^5 \times 3^4 \Rightarrow 3^5 \mid \dots)$$

## ویژگی‌های رابطه عاد کردن

**ویژگی ۱:** اگر عدد  $a$  عدد  $b$  را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیح عدد  $b$  را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$a \mid b \Rightarrow a \mid mb$$

مثال:  $3 \mid 6 \Rightarrow 3 \mid 6 \times 5, 3 \mid 6 \times 4, 3 \mid 6 \times (-7), \dots$

نتیجه: اگر عدد  $a$  عدد  $b$  را بشمارد، آنگاه  $b^n$  را می‌شمارد و در حالت کلی  $b^n$  را می‌شمارد که  $n \in \mathbb{N}$  است. یعنی:

$$\begin{cases} \text{الف) } a \mid b \Rightarrow a \mid b^2 \\ \text{ب) } a \mid b \Rightarrow a \mid b^n \end{cases}$$

برای اثبات (الف) کافی است از ویژگی ۱ استفاده کرده و  $m$  را مساوی  $b$  فرض کنیم؛ و برای اثبات (ب) نیز کافی است  $m = b^{n-1}$  فرض شود.

سؤال: آیا از اینکه  $a \mid bc$  می‌توان نتیجه گرفت که  $a$  حداقل یکی از دو عدد  $b$  و  $c$  را عاد می‌کند؟ به گزاره‌های زیر دقت

کنید و پس از آن پاسخ دهید:

الف)  $3 \mid 6 \times 9$  و  $3 \mid 6$  و  $3 \mid 9$

ب)  $3 \mid 6 \times 5$  و  $3 \mid 6$  و  $3 \nmid 5$

ج)  $6 \mid 3 \times 4$  و  $6 \nmid 3$  و  $6 \nmid 4$

سؤال: آیا از اینکه  $a \mid b$  می‌توان نتیجه گرفت که  $ka \mid kb$ ؟ آیا از  $ka \mid kb$  می‌توان نتیجه گرفت  $a \mid b$ ؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$a \mid b \Rightarrow b = \overset{\text{در } k \text{ ضرب}}{\dots} \Rightarrow kb = \dots \Rightarrow \dots$$

$$ka \mid kb \Rightarrow kb = \overset{\text{بر } k \text{ تقسیم}}{\dots} \Rightarrow b = \dots \Rightarrow \dots$$

**ویژگی ۲:** اگر عدد  $a$  عدد  $b$  را بشمارد و عدد  $b$  نیز عدد  $c$  را بشمارد آنگاه عدد  $a$  عدد  $c$  را می‌شمارد.

$$a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$$

اثبات:  $\begin{cases} a|b \Rightarrow b = aq_1 \text{ (۱)} \\ b|c \Rightarrow c = bq_2 \end{cases}$

$$c = bq_2 \stackrel{(۱)}{\Rightarrow} c = \dots q_2 \stackrel{q_1 q_2 = q}{\Rightarrow} c = a \dots \Rightarrow a|c$$

این خاصیت را «خاصیت تعدی» برای رابطه عاد کردن می‌نامیم.

**سؤال:** با استفاده از خاصیت تعدی برای رابطه عاد کردن، نشان دهید که:

$$a|b \Rightarrow a|b^n$$

اثبات:  $a|b$  تعدی فرض:  $a|b \Rightarrow \dots | \dots$   
 و می‌دانیم:  $b|b^n$

**ویژگی ۳:** هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

اثبات:  $\left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow b = \dots \times q_1 \\ a|c \Rightarrow \dots = aq_2 \end{array} \right\} \Rightarrow b \pm c = \dots \underbrace{(q_1 \pm q_2)}_q \Rightarrow a | \dots$

**سؤال:** آیا از اینکه  $a|b + c$  همواره می‌توان نتیجه گرفت که  $a|b$  یا  $a|c$ ؟

**ویژگی ۴:** اگر  $a|b$  و  $b \neq 0$  در این صورت  $|a| \leq |b|$ .

اثبات: چون  $a|b$  پس  $b = aq$  و چون  $b \neq 0$  پس  $q \neq 0$  و چون  $q \in \mathbb{Z}$  لذا  $|q| \geq 1$ . حال اگر طرفین نامساوی اخیر را

در  $|a|$  ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$1 \leq |q| \Rightarrow |a| \times 1 \leq |a| |q| \Rightarrow |a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq \dots$$

نتیجه: اگر  $a|b$  و  $b|a$  آنگاه  $a = \pm b$ .

اثبات:  $\left. \begin{array}{l} a|b \stackrel{(۴)}{\Rightarrow} |a| \leq \dots \\ b|a \stackrel{(۴)}{\Rightarrow} \dots \leq |a| \end{array} \right\} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$

## کار در کلاس

**۱** اگر  $a \neq 0$  عددی صحیح و دو عدد  $(7m+6)$  و  $(6m+5)$  بر  $a$  بخش پذیر باشند ثابت کنید  $a = \pm 1$ .

$$\left. \begin{array}{l} a|7m+6 \Rightarrow a|42m+\dots \\ a|6m+5 \Rightarrow \dots|42m+\dots \end{array} \right\} \Rightarrow a|(42m+36) - (42m+35)$$

$$\Rightarrow a|1 \Rightarrow a = \pm 1 \text{ (چرا؟)}$$

۲ اگر  $a|b$  نشان دهید که  $a^n|b^n$ .

$$\text{اثبات: } a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = \dots \Rightarrow b^n = \dots q^n \Rightarrow a^n | b^n$$

۳ اگر  $a|b$  و  $c|d$  نشان دهید که  $ac|bd$ .

$$\left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow b = aq_1 \\ c|d \Rightarrow \dots = \dots \end{array} \right\} \Rightarrow b \times d = (a \times c) \underbrace{(q_1 q_2)}_q$$

$$\Rightarrow \dots = a \times c \times q \Rightarrow \dots | bd$$

۴ اگر  $a|b$  و  $a|c$  نشان دهید که  $a|mb \pm nc$ .

(از ویژگی ۱ و ویژگی ۳ استفاده کنید).

شما در سال‌های قبل با تعریف و مفهوم اعداد اول آشنا شده‌اید و می‌دانید که هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول، که ثابت شده است مجموعه‌ای نامتناهی است، به صورت  $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$  نمایش داده می‌شود.

تذکر: با توجه به تعریف عدد اول، اگر  $p$  عددی اول باشد و  $a$  عددی طبیعی و  $a|p$  در این صورت  $a=1$  یا  $a=p$ .

مثال: اگر عدد طبیعی  $a$  دو عدد  $(9k+7)$  و  $(7k+6)$  را عاد کند، ثابت کنید  $a=1$  یا  $a=5$ .

$$a | 9k+7 \Rightarrow a | 7 \times (9k+7)$$

$$\Rightarrow a | 63k + \dots$$

$$a | 7k+6$$

$$\Rightarrow a | 9 \times (7k+6) \Rightarrow a | \dots + 54$$

$$\Rightarrow a | (\dots + 54) - (63k + \dots)$$

$$\Rightarrow a | 5 \Rightarrow a = \dots \text{ یا } a = \dots$$

## خواندنی

می‌دانیم که هر عدد طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی  $10!$  عدد  $10!$  را عاد می‌کند (چرا؟) و به طور کلی می‌توان نوشت:  $\forall k \leq n, k|n!$ ؛ بنابراین عدد  $100!+2$  و همین‌طور عدد  $100!+3$  و  $\dots$  و بالاخره عدد  $100!+100$  همه اعدادی غیراول هستند. بنابراین با توجه به اینکه اعداد  $(100!+2)$  و  $(100!+3)$  و  $\dots$  و  $(100!+100)$ ، تعداد  $99$  عدد طبیعی و متوالی‌اند ما توانسته‌ایم  $99$  عدد طبیعی متوالی بیابیم که هیچ‌کدام اول نباشند.

(برای اینکه نشان دهیم عدد  $100!+7$  بر  $7$  بخش‌پذیر است، کافی است از عدد  $7$  در دو عدد  $100!$  و  $7$ ،

فاکتور بگیریم یا با استفاده از خواص عاد کردن بنویسیم:  $7|100!+7$  و  $7|7$  و  $7|100!$ )

## بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

می‌خواهیم با توجه به تعریف رابطه عاد کردن، مفاهیم  $b$  م م (بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک) و  $k$  م م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) دو عدد را معرفی کنیم.

توجه دارید که مقسوم‌علیه همان شمارنده است. به عبارت دیگر، اگر بنویسیم  $a|b$ ، یعنی  $a$  شمارنده  $b$  است یا  $b$  بر  $a$  بخش‌پذیر است و این یعنی  $a$  مقسوم‌علیه  $b$  است؛ و نیز توجه دارید که  $b$  مضرب  $a$  است، یعنی  $b = aq$  یا  $a|b$ .

**تعریف:** عدد طبیعی  $d$  را  $b$  م م دو عدد صحیح  $a$  و  $b$  می‌نامیم ( $a$  و  $b$  هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم  $(a,b) = d$ ، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشند.

(الف)  $d|a, d|b$

(ب)  $\forall m > 0; m|a, m|b \Rightarrow m \leq d$

شرط (الف) مقسوم‌علیه مشترک بودن را برای  $d$  تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که  $d$  از هر مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی چون  $m$  بزرگ‌تر است.

اگر داشته باشیم  $(a,b) = 1$  در این صورت می‌گوییم،  $a$  و  $b$  نسبت به هم اول‌اند.

مثال:  $(1,12) = 1$  ,  $(7,11) = 1$  ,  $(4,9) = 1$  ,  $(3,4) = 1$

$(4,-6) = 2$  ,  $(0,6) = 6$  ,  $(8,16) = 8$  ,  $(6,9) = 3$

**تعریف:** عدد طبیعی  $c$  را  $k$  م م دو عدد صحیح و ناصفر  $a$  و  $b$  می‌نامیم و می‌نویسیم  $[a,b] = c$ ، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشند.

(الف)  $a|c$  ,  $b|c$

(ب)  $\forall m > 0, a|m, b|m \Rightarrow c \leq m$

توضیح دهید که هریک از شرط‌های (الف) و (ب) کدام ویژگی را تأمین می‌کنند؟

مثال:  $[3,4] = 12$  ,  $[6,4] = 12$  ,  $[1,8] = 8$  ,  $[-4,16] = 16$

### کاردرکلاس

۱ با توجه به تعاریف  $b$  م م و  $k$  م م ثابت کنید:

(الف)  $a|b \Rightarrow (a,b) = |a|$

(ب)  $a|b \Rightarrow [a,b] = |b|$

راهنمایی: برای اثبات (الف) باید دو شرط موجود در تعریف  $b$  م م را برای  $|a|$  بررسی کنیم، یعنی نشان دهیم که  $|a||a|$

و... و نیز برای هر  $m > 0$  که  $m|a$  و  $m|b$  نشان دهیم  $m \leq \dots$  و همین‌طور برای اثبات (ب) ...

۲ اگر  $p$  عددی اول باشد و  $a \in \mathbb{Z}$  و  $p \nmid a$ ، ثابت کنید،  $(p, a) = 1$

$$(p, a) = d \begin{cases} d \mid p \Rightarrow d = 1 \text{ یا } \dots \\ d \mid a \quad (1) \end{cases}$$

و این با فرض  $p \nmid a$  تناقض دارد)  $d = p \Rightarrow p \mid \dots$

پس فقط  $d = \dots$  یا  $(p, a) = \dots$ .

تذکر: توجه دارید که در مورد اعدادی که اول نباشند، مطلب کار در کلاس ۲ ممکن است برقرار نباشد:

$$\text{مثال: } (4, 6) = 2 \neq 1 \text{ ولی } 4 \nmid 6$$

## قضیه تقسیم و کاربردها

ممکن است در تقسیم عدد صحیح  $a$  بر عدد طبیعی  $b$ ، باقی مانده صفر نباشد، یعنی  $a$  بر  $b$  بخش پذیر نباشد  $(b \nmid a)$ . در این صورت قضیه تقسیم که به بیان آن خواهیم پرداخت (این قضیه را بدون اثبات می پذیریم) کمک می کند تا بحث بخش پذیری در  $\mathbb{Z}$  را کامل کنیم.

**قضیه تقسیم:** اگر  $a$  عددی صحیح و  $b$  عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند  $q$  و  $r$  یافت می شوند به قسمی که  $a = bq + r$  و  $0 \leq r < b$ .

مثال: اگر ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنیم داریم:  $q = 3$  و  $r = 4$ ، و به عبارت دیگر  $25 = (7 \times 3) + 4$ . حال اگر ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنیم و  $q = -3$  در نظر بگیریم، در این صورت تساوی  $25 = 7 \times (-3) - 4$  حاصل می شود که نمی توان  $(-4)$  را به عنوان باقی مانده معرفی کرد، زیرا طبق قضیه تقسیم باقی مانده باید نامنفی و کوچک تر از مقسوم علیه باشد در این صورت با اضافه و کم کردن مضارب مثبتی از مقسوم علیه، شرایط قضیه تقسیم را برقرار می کنیم:

$$\begin{aligned} -25 &= 7 \times (-3) - 4 = 7 \times (-3) - 4 - 7 + 7 \\ &= 7 \times (-3) - 7 + 3 = 7 \underbrace{[(-3) - 1]}_q + 3 = 7q + 3 \Rightarrow r = 3 \end{aligned}$$

تذکر: همان طور که از دوره ابتدایی به خاطر دارید در تقسیم عدد  $a$  بر  $b$ ،  $a$  را مقسوم،  $b$  را مقسوم علیه،  $q$  را خارج قسمت و  $r$  را باقی مانده می نامیم.

مثال: اگر باقی مانده تقسیم اعداد  $m$  و  $n$  بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد  $(2m - 5n)$  بر ۱۷ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} \text{طبق فرض: } m &= 17q_1 + 5 \\ \text{طبق فرض: } n &= 17q_2 + 3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 2m = 2 \times 17q_1 + 10 \\ -5n = (-5) \times 17q_2 - 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q_1 - 5q_2) - 5$$



$$\begin{aligned}
&= 17(2q_1 - 5q_2) - 5 - 17 + 17 \\
&= 17(\underbrace{2q_1 - 5q_2}_{q_r} - 1) + 17 - 5 \\
&\Rightarrow (2m - 5n) = 17(\underbrace{q_r - 1}_q) + 12 \\
&= 17q + 12 \Rightarrow r = 12
\end{aligned}$$

## افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

با توجه به قضیه تقسیم، می‌دانیم که اگر  $a$  عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی  $b$ ، و با توجه به اینکه باقی‌مانده تقسیم یعنی  $r$  در رابطه  $0 \leq r < b$  صدق می‌کند، برای  $a$  بر حسب  $r$  دقیقاً  $b$  حالت وجود دارد، مثلاً اگر عدد صحیح  $a$  را بر  $5$  تقسیم کنیم در این صورت یا  $a$  بر  $5$  بخش پذیر است، یعنی  $r = 0$ ، یا باقی‌مانده تقسیم  $a$  بر  $5$  عدد  $1$  است یا  $\dots$  یا باقی‌مانده تقسیم  $4$  است؛ به عبارت دیگر،  $a = \dots$  یا  $a = 5k + 3$  یا  $a = \dots$  یا  $a = 5k + 1$  یا  $a = 5k$  پس می‌توان گفت هر عدد صحیح مانند  $a$  را می‌توان به یکی از پنج صورت فوق نوشت.

مسئله ۱: اگر  $m \in \mathbb{Z}$  نشان دهید که  $m$  را به یکی از دو صورت  $2k$  یا  $2k + 1$  (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.

حل: کافی است  $m$  را بر  $2$  تقسیم کنیم؛ در این صورت طبق قضیه تقسیم خواهیم داشت:

$$m = 2k + r, \quad 0 \leq r < 2 \Rightarrow m = \dots \text{ یا } m = \dots$$

مسئله ۲: ثابت کنید اگر  $p > 3$  عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت  $p = 6k + 1$  یا  $p = 6k + 5$  نوشته می‌شود.

حل: کافی است  $p$  را بر  $6$  تقسیم کنیم، در این صورت طبق قضیه تقسیم خواهیم داشت:

$$p = 6k \quad (1)$$

$$p = 6k + 1 \quad (2)$$

$$p = 6k + 2 \quad (3)$$

$$p = 6k + 3 \quad (4)$$

$$p = 6k + 4 \quad (5)$$

$$p = 6k + 5 \quad (6)$$

در حالت (۱)، (۳) و (۵) زوج است و لذا با اول بودن آن تناقض دارد. در حالت (۴) و با فاکتورگیری از ۳ داریم:

$$p = 3(2k + 1)$$

یا  $p = 3k'$  یا  $3|p$  که با اول بودن  $p$  در تناقض است و لذا فقط حالت‌های (۲) و (۶) باقی می‌ماند و حکم اثبات می‌شود.

(توجه دارید که عکس مطلب فوق در حالت کلی برقرار نیست؛ مثلاً  $(25 = 6 \times 4 + 1)$  ولی  $25$  اول نیست.)

مسئله ۳: ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند  $a$  به یکی از دو صورت  $4k + 1$  یا  $4k + 3$  نوشته می‌شود، سپس

نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل  $(8t + 1)$  نوشته می‌شود (باقی‌مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر  $8$ ، مساوی با  $1$

است.)

حل : فرض کنیم  $a \in \mathbb{Z}$  و  $a$  فرد باشد، اگر  $a$  را بر ۴ تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$$a = 4k \quad (1)$$

$$a = 4k + 1 \quad (2)$$

$$a = 4k + 2 \quad (3)$$

$$a = 4k + 3 \quad (4)$$

(چهار مجموعه  $A_1 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k\}$  و  $A_2 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k + 1\}$  و  $A_3 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k + 2\}$  و  $A_4 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k + 3\}$  را افراز می کنند.)

حالت های ... و ... زوج بوده و لذا  $a = 4k + 1$  یا  $a = 4k + 3$

$$\text{اگر } a = 4k + 1 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(\underbrace{2k^2 + k}_{k'}) + 1 = 8k' + 1$$

$$\text{اگر } a = 4k + 3 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 8(\underbrace{2k^2 + 3k + 1}_t) + 1 = 8t + 1$$

### تمرین

۱ فرض می کنیم  $ab = cd$  ( $a, b, c, d$  اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطه عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرد.

۲ ثابت کنید: اگر  $a|b$  آنگاه  $a|-b$  و  $-a|b$  و  $-a|-b$ .

۳ اگر  $a > 1$  و  $a|9k+4$  و  $a|5k+3$ ، ثابت کنید  $a$  عددی اول است.

۴ اگر عددی مانند  $k$  در  $\mathbb{Z}$  باشد به طوری که  $5|4k+1$ ، ثابت کنید:  $25|16k^2 + 28k + 6$

۵ آیا از اینکه  $a|b$  و  $c|d$ ، همواره می توان نتیجه گرفت که  $a+c|b+d$ ؟

۶ ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول اند.

راهنمایی: فرض کنید  $(m, m+1) = d$  و ثابت کنید  $d|1$  و نتیجه بگیرید  $d=1$ .

۷ اگر  $p \neq q$  و هر دو عدد اول باشند ثابت کنید  $(p, q) = 1$ .

۸ اگر  $m, n \in \mathbb{N}$  و  $a, b \in \mathbb{Z}$  ثابت کنید:

$$m \leq n, a|b \Rightarrow a^m|b^n$$

۹ اگر باقی مانده تقسیم عدد  $a$  بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی مانده تقسیم عدد  $a$  بر ۵۶ بیاید.

۱۰ اگر  $a$  عددی صحیح و فرد باشد و  $2|a+b$  در این صورت باقی مانده تقسیم عدد  $(a^2 + b^2 + 3)$  بر ۸ را بیاید.

۱۱ اگر  $n$  عددی صحیح باشد ثابت کنید  $3|n^2 - n$

راهنمایی: برای  $n$  سه حالت  $n=3k$  و  $n=3k+1$  و  $n=3k+2$  در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید  $3|n^2 - n$ .

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح  $n$  بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی مانده تقسیم نیز همواره بر  $n$  بخش پذیر است.

۱۳ اگر  $a$  عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح  $a$  یا  $a+2$  یا  $a+4$  بر ۳ بخش پذیر است.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر  $3!$  بخش پذیر است.

۱۶ حاصل هر یک را به دست آورید:  $(m \in \mathbb{Z})$

الف)  $([m^2, m], m^5)$

ب)  $(2m, 6m^2)$

پ)  $(3m+1, 3m+2)$

ت)  $[m^4, (m^2, m^3)]$

ث)  $(72, 48), 120$

## فعالیت

در درس قبل دیدیم که باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و ۳. حال اگر هر کدام از این باقی‌مانده‌ها را نمایندهٔ یک مجموعه از اعداد در نظر بگیریم که باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴، به ترتیب ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد، داریم:

(مجموعهٔ اعدادی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر عدد  $m$ ، مساوی با عدد  $r$  باشد با نماد  $[r]_m$  نشان می‌دهیم)

$$A_0 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots, 16, \dots\} = [0]_4$$

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 1\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, \dots, 13, \dots, 21, \dots\} = [1]_4$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 2\} = \{\dots, -6, \dots, 2, 6, 10, \dots\} = [2]_4$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 3\} = \{\dots, -13, \dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\} = [3]_4$$

- ۱ دو عضو دلخواه از مجموعهٔ  $A$  را در نظر بگیرید. آیا تفاضل این دو عدد مضرب ۴ است؟
- ۲ از مجموعهٔ  $A_1$  دو عضو دلخواه را در نظر بگیرید و تفاضل آنها را حساب کنید. آیا عدد حاصل مضرب ۴ است؟
- ۳ نتیجه‌ای را که از ۱ و ۲ گرفتید در حالت کلی برای هر دو عضو دلخواه از  $A_1$  اثبات کنید.

$$a, b \in A_1 \Rightarrow \begin{cases} a = 4k_1 + 1 \\ b = \dots \end{cases} \Rightarrow a - b = (\dots) - (4k_1 + 1)$$

$$\Rightarrow a - b = 4(k_1 - k_2) \Rightarrow 4 \mid \dots$$

- ۴ آیا درست است که بگوییم اعضای مجموعهٔ  $A_2$  همگی در تقسیم بر عدد ۴، باقی‌ماندهٔ یکسان دارند؟ در مورد مجموعهٔ  $A_3$  چه می‌توان گفت؟

می‌دانیم مجموعه‌های  $A_0$ ،  $A_1$ ،  $A_2$  و  $A_3$  یک افراز برای مجموعهٔ  $\mathbb{Z}$  هستند و بنابراین هر دو عدد صحیح، مانند  $a$  و  $b$ ، یا هر دو به یکی از این چهار مجموعه تعلق دارند و یا هر کدام در یک مجموعه

واقع اند ( $A_1, A_2, A_3, A_4$  اشتراکی با هم ندارند. چرا؟) و لذا اگر  $a$  و  $b$  هر دو در یک مجموعه از این چهار مجموعه باشند (باقی مانده تقسیم  $a$  بر  $b$  مساوی باشد یا اصطلاحاً  $a$  بر  $b$   $4$  هم باقی مانده باشند) همواره  $a - b$  بر  $4$  و اگر این طور نباشد  $4 \nmid a - b$ .

**تعریف:** برای هر عدد طبیعی مانند  $m$  و هر دو عدد صحیح مانند  $a$  و  $b$ ، اگر  $m \mid a - b$ ، می‌گوییم « $a$  هم‌نهشت با  $b$  است به‌سنج یا پیمانه  $m$ »؛ و می‌نویسیم  $a \equiv b \pmod{m}$ . تعریف رابطه هم‌نهشتی به پیمانه  $m$ ، به زبان ریاضی عبارت است از:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b \quad (m \in \mathbb{N})$$

مثال: 
$$\begin{cases} 12 \equiv 2 \pmod{5}, -11 \equiv 1 \pmod{6} \\ -295 \equiv -5 \pmod{10}, 23 \equiv -7 \pmod{3} \end{cases}$$

**قرارداد:** مجموعه همه اعداد صحیح که باقی مانده تقسیم آنها بر عدد طبیعی  $m$  برابر با  $r$  می‌باشد، یعنی  $A_r = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$  را کلاس یا دسته هم‌نهشتی  $r$  به پیمانه  $m$  می‌نامیم و با نماد  $[r]_m$  نمایش می‌دهیم. برای استفاده از رابطه هم‌نهشتی، ابتدا خواص و ویژگی‌های این رابطه را بررسی می‌کنیم که با توجه به تعریف این رابطه و خواص رابطه عادی کردن، ویژگی‌های رابطه هم‌نهشتی به راحتی اثبات می‌شوند. شما در کامل کردن اثبات‌ها شرکت کنید.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + c \pmod{m} \\ a - c \equiv b - c \pmod{m} \end{cases}$$

**ویژگی ۱:** به دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

اثبات: 
$$\begin{aligned} a \equiv b \pmod{m} &\Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid a + c - b - c \\ &\Rightarrow m \mid (a + c) - (\dots + \dots) \Rightarrow (\dots + \dots) \equiv (b + c) \pmod{m} \end{aligned}$$

**مثال:** با توجه به فعالیت قبل،  $7 \equiv -1 \pmod{4}$  یا  $[-1, 7] \in A_4$  در این صورت اگر  $5$  واحد به دو طرف این هم‌نهشتی اضافه کنیم فاصله این دو عدد یا تفاضل آنها همچنان حفظ شده و همان  $8$  که مضرب  $4$  است باقی می‌ماند. به عبارت دیگر، اعداد حاصل یعنی  $7 + 5 = 12$  و  $-1 + 5 = 4$  نیز هر دو در یکی از  $A_i$ ها قرار خواهند گرفت.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

**ویژگی ۲:** دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.

اثبات: 
$$\begin{aligned} a \equiv b \pmod{m} &\Rightarrow m \mid \dots - \dots \Rightarrow m \mid \dots \times (a - b) \Rightarrow m \mid ac - \dots \\ &\Rightarrow \dots \equiv bc \pmod{m} \end{aligned}$$

تذکر: عکس ویژگی ۲ برقرار نیست، یعنی اگر  $ac \equiv bc$ ، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که  $a \equiv b$  (قانون حذف برای رابطه هم‌نهستی در حالت کلی برقرار نیست) برای این مطلب یک مثال نقض بزنید.

$$a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

**ویژگی ۳:** (دو طرف یک رابطه هم‌نهستی را می‌توان به توان  $n$  رساند.) ( $n \in \mathbb{N}$ )

مثال:  $(5 \equiv 2 \Rightarrow 5^3 \equiv 2^3)$

اثبات: (از اتحاد  $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$  استفاده می‌کنیم)

$$a \equiv b \Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | (a-b) \underbrace{(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})}_c \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow m | a^n - b^n \Rightarrow \dots \equiv \dots$$

تذکر: می‌دانیم  $5^2 \equiv 3^2$  ولی  $5 \not\equiv 3$  بنابراین نتیجه می‌گیریم که ...

$$a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow \begin{cases} ac \equiv bd & \textcircled{1} \\ a+c \equiv b+d & \textcircled{2} \\ a-c \equiv b-d & \textcircled{3} \end{cases}$$

**ویژگی ۴:** دو طرف دو رابطه هم‌نهستی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع یا از هم منها و یا

در هم ضرب کرد.

$$(15 \equiv 10, 7 \equiv 2 \Rightarrow 15 \times 7 \equiv 10 \times 2, 15 \times 2 \equiv 10 \times 7)$$

$$\text{و } 15 + 7 \equiv 10 + 2 \Rightarrow 22 \equiv 12$$

اثبات ①:

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \Rightarrow m | \dots \xrightarrow{\times c} \dots \Rightarrow m | ac - bc \\ c \equiv d \Rightarrow m | \dots \xrightarrow{\times b} \dots \Rightarrow m | bc - \dots \end{array} \right\} + \Rightarrow m | (ac - bc) + (\dots - bd)$$

$$\Rightarrow m | ac - \dots \Rightarrow \dots \equiv bd$$

اثبات ② به عهده شما

$$a \equiv b, b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$$

**ویژگی ۵:**

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \Rightarrow m | a - b \\ b \equiv c \Rightarrow m | b - c \end{array} \right\} \Rightarrow m | (a - b) + (b - c)$$

اثبات:

$$\Rightarrow m | a - c \Rightarrow a \equiv c$$



**تذکر مهم:** اگر باقی مانده تقسیم  $a$  بر  $m$  مساوی با  $r$  باشد در این صورت  $a \equiv r^m$

$$a = mq + r \Rightarrow a \equiv r^m$$

$$(179 = 11 \times 16 + 3 \Rightarrow 179 \equiv 3^{11})$$

اثبات:

$$a = mq + r \Rightarrow a - r = mq \Rightarrow m | a - r \Rightarrow \dots \equiv \dots^m$$

نتیجه ۱: هرگاه بخواهیم کوچک ترین عدد نامنفی و هم نهشت با عدد  $a$  به پیمانه  $m$  را مشخص کنیم، کافی است عدد  $a$  را بر  $m$  تقسیم کرده و باقی مانده را به دست آوریم.

مثال:  $296 \equiv ?^{11} \rightarrow \dots$

نتیجه ۲: اگر دو عدد  $a$  و  $b$  تقسیم بر عدد طبیعی  $m$ ، هم باقی مانده باشند در این صورت  $a \equiv b^m$ .

مثال: باقی مانده تقسیم عدد  $A = (27)^7 + 19$  را بر ۱۳ بیابید.

$$27 = 13 \times 2 + 1 \Rightarrow 27 \equiv 1^{13} \Rightarrow \underbrace{(27)^7}_{\equiv 1^7} \equiv 1^{13} = 1 \text{ و } 19 = 13 \times 1 + 6$$

$$\Rightarrow \underbrace{19}_{\equiv 6^{13}} \xrightarrow{\text{با توجه به ① و ②}} (27)^7 + 19 \equiv 1 + 6 \xrightarrow{\text{با توجه به ①}} A \equiv 7^{13} \Rightarrow r = 7$$

پس باقی مانده  $A$  بر ۱۳، برابر با ۷ می باشد.

مثال: باقی مانده تقسیم عدد  $A = (1000)^{13} \times 12 + 10$  را بر ۷ بیابید.

$$1000 = 7 \times 142 + 6 \Rightarrow 1000 \equiv 6^7 \text{ و } 6 \equiv -1 \Rightarrow 1000 \equiv -1^7$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \equiv (-1)^{13} = -1$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \times 12 \equiv (-1) \times 12 = -12$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \times 12 + 10 \equiv (-12) + 10 = -2 \text{ و } -2 \equiv 5^7$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \times 12 + 10 \equiv 5 \Rightarrow r = 5$$

$$a \equiv b^m \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$$

**ویژگی ۶:** می توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم نهستی هر ضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

طبق فرض:  $a \equiv b^m$

$$\Rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk$$

می دانیم:  $mt \equiv mk^m$

مثال: می دانیم  $7 \equiv 2^5$  اگر به سمت چپ رابطه  $3 \times 5 = 15$  و به سمت راست آن  $5 \times 5 = 25$  واحد اضافه کنیم خواهیم داشت

$7 + 15 \equiv 2 + 25^5$  یا  $22 \equiv 27^5$  که این رابطه برقرار است.

$$ac \equiv bc \pmod{m}, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

**ویژگی ۷:** اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم‌نهستی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه آن هم‌نهستی را بر م‌م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم. (این ویژگی را بدون اثبات می‌پذیریم)

**نتیجه مهم:** اگر  $ac \equiv bc \pmod{m}$  و  $(c, m) = 1$  در این صورت  $a \equiv b \pmod{m}$  در واقع قاعده حذف در هم‌نهستی‌ها، برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد، برقرار است.

**مثال:** واضح است که  $4 \times 6 \equiv 4 \times 3 \pmod{3}$  و چون  $(4, 3) = 1$  پس  $6 \equiv 3 \pmod{3}$ .

### فعالیت

همان‌طور که در دوره ابتدایی آموختید عددنویسی در مبنای ۱۰ انجام می‌شود که در آن ارزش مکانی ارقام، ده تاده تا در نظر گرفته می‌شود (ده تا یکی می‌شود ده تا و ده تاده تایی می‌شود صد تا و ده تا صد تایی می‌شود هزار تا و ...). بنابراین به راحتی می‌توانیم هر عدد را در مبنای ده بسط بدهیم. به‌عنوان مثال عدد ۱۳۹۷ را می‌توان به‌صورت زیر بسط داد:

$$1397 = 1 \times 1000 + 3 \times 100 + 9 \times 10 + 7$$

$$\Rightarrow 1397 = 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10 + 7$$

**۱** هر یک از دو عدد زیر را در مبنای ده بسط بدهید:

$$1388109 = 1 \times 10^6 + \dots$$

$$13571122 =$$

**۲** باقی‌مانده تقسیم عدد  $A = 1358112$  را بر عدد ۹ بیابید.

می‌دانیم  $10 \equiv 1 \pmod{9}$  و بنابر ویژگی‌های رابطه هم‌نهستی  $10^n \equiv 1 \pmod{9}$  و داریم:

$$A = 1 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + \dots + \dots + \dots + 1 \times 10 + 2$$

$$10^6 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 1 \times 10^6 \equiv 1 \pmod{9}$$

$$10^5 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 3 \times 10^5 \equiv 3 \pmod{9}$$

$$10^4 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow \dots \equiv \dots$$

$$10^3 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow \dots \times 10^3 \equiv \dots$$

$$10^2 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 1 \times 10^2 \equiv \dots$$

$$10 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 1 \times 10 \equiv \dots$$

$$\begin{array}{r} 2 \equiv 2 \\ \hline A \equiv 1 + 3 + 5 + 8 + 1 + 1 + 2 \end{array}$$

با جمع طرفین هم‌نهستی‌ها داریم:

اگر دقت کنید سمت راست هم نهشتیِ اخیر مجموع ارقام  $A$  است. بنابراین می‌توان گفت «باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹»

عدد  $n$  رقمی  $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_2 a_1 a_0}$  را بسط دهید و در هم‌نهشتی به پیمانه ۹ به جای هر توان  $10^k$  عدد ۱ را قرار دهید، سپس همین نتیجه‌گیری را در حالت کلی بررسی کنید.

$$\begin{aligned} A &= 10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0 \\ &\Rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0 \\ &\Rightarrow A \equiv \dots \end{aligned}$$

### کار در کلاسی

**۱** با توجه به اینکه  $10^3 \equiv 1$ ، نتیجه می‌گیریم،  $\forall k \in \mathbb{N}, 10^k \equiv 1$ ، بنابراین، مشابه فعالیت قبل، باقی‌مانده تقسیم عدد  $A = 5983248$  را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعده کلی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد  $n$  رقمی بر ۳ بیان کنید.

**۲** می‌دانیم که  $10^{11} \equiv -1$ ؛ بنابراین برای هر  $n$  زوج،  $10^n \equiv 1$  و برای هر  $n$  فرد،  $10^n \equiv -1$ . حال اگر در هم‌نهشتی به پیمانه ۱۱ و در بسط عدد  $A = 4985327$  به جای توان‌های زوج عدد  $10^k$ ، عدد یک و به جای توان‌های فرد عدد  $10^k$ ، عدد  $(-1)$  قرار دهیم باقی‌مانده تقسیم عدد  $A$  را بر ۱۱ بیابید.

$$\begin{aligned} A &= 4 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + \dots + 2 \times 10 + 7 \\ &\Rightarrow A \equiv 4 \times \dots + \dots \times (-1) + \dots \times 1 + \dots + 2 \times (-1) + 7 \\ &\Rightarrow A \equiv 7 - 2 + 3 - 5 + 8 - 9 + 4 = 6 \Rightarrow r = \dots \end{aligned}$$

**۳** می‌دانیم  $10^2 \equiv 0$  و  $10^5 \equiv 0$  و  $10^8 \equiv 0$  در این صورت:

$$\forall k \in \mathbb{N}; 10^k \equiv \dots \text{ و } 10^k \equiv \dots \text{ و } 10^k \equiv 0$$

بنابراین اگر در بسط هر عدد  $n$  رقمی مانند  $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$  به جای توان‌های عدد  $10^k$  (در هم‌نهشتی‌های به پیمانه ۲ و ۵ و  $10^k$ ) صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A &= 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + a_0 \\ &\Rightarrow A \equiv 0 \times a_{n-1} + \dots + \dots + \dots \times a_2 + \dots + a_0 \\ &\Rightarrow A \equiv \dots \text{ و } A \equiv \dots \text{ و } A \equiv a_0 \end{aligned}$$

نتیجه حاصل را برای یافتن باقی‌مانده تقسیم اعداد  $n$  رقمی بر ۲ و ۵ و  $10^k$  و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید.

یکی از کاربردهای هم‌نهستی در تقویم‌نگاری و محاسبه روزهای هفته برحسب تاریخ داده شده است. به‌عنوان مثال: اگر اول مهر ماه در یک سال یکشنبه باشد، ۲۲ بهمن در همان سال چه روزی از هفته خواهد بود؟ برای پاسخ دادن به سؤالاتی شبیه این سؤال فعالیت زیر را انجام دهید.

## فعالیت

می‌دانیم هر روز از روزهای هفته، مثلاً شنبه، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود. به‌عنوان مثال اگر ۱۲ فروردین در یک سال یکشنبه باشد در این صورت  $19 = 12 + 7$  فروردین و  $26 = 19 + 7$  فروردین نیز یکشنبه می‌باشد. در بحث تقویم و روزهای هفته دقت دارید که شش ماه اول سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دوم سال غیر از اسفند (که، به‌جز سال کبیسه، ۲۹ روزه است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند.

حال فرض کنید در یک سال ۹ دی ماه یکشنبه باشد، در همان سال ۲۸ دی ماه چند شنبه است؟ با توجه به مطالب مذکور ۱۶ دی و ۲۳ دی یکشنبه بوده و کافی است از ۲۳ دی تا ۲۸ دی ۵ روز بعد را حساب کنیم که به روز ۰۰۰ می‌رسیم.

حال اگر فاصله ۹ دی تا ۲۸ دی را حساب کنیم ( $19 = 28 - 9$ ) مشاهده می‌شود که ۱۹ روز فاصله داریم و چون  $19 \equiv 5^7$  لذا کافی است یکشنبه را مطابق جدول مقابل مبدأ فرض کرده و مشخص کنیم که ۵ روز بعد چه روزی از هفته است یا عدد ۵ متناظر با کدام روز است.

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

**۱** اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، فاصله ۱ مهر است تا ۱۲ بهمن؛ یعنی  $d = 29 + 3 \times 30 + 12 = 131$

از طرفی  $131 \equiv 000^7$  و با توجه به جدول فوق روز متناظر با عدد ... پنجشنبه است، یعنی ۱۲ بهمن در آن سال پنجشنبه است.

**۲** از روی تقویم سال جاری روز هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید که ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته خواهد بود. درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

## معادله هم‌نهستی

تعریف: یک رابطه هم‌نهستی همراه با مجهولی چون  $x$  به فرم  $ax \equiv b^m$  را یک معادله هم‌نهستی می‌نامیم؛ و منظور از حل معادله هم‌نهستی پیدا کردن همه جواب‌هایی چون  $x \in \mathbb{Z}$  است که در این معادله صدق کنند، یعنی  $ax \equiv b^m$ .  
( $a, b \in \mathbb{Z}$ )

۱- ۹ دی ماه روز بصیرت نام‌گذاری شده است.

به عنوان مثال، معادله  $x \equiv 2 \pmod{3}$  را در نظر بگیرید. در این معادله  $x$  می تواند ۲ یا ۵ باشد. عدد بعدی که می تواند به جای  $x$  قرار بگیرد و در معادله صدق کند عدد ۸ است و اگر بخواهیم تمام جواب های این معادله یا جواب های عمومی آن را داشته باشیم کافی است از تعریف هم نهستی استفاده کنیم،

$$x \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 3 \mid x - 2 \Rightarrow (x - 2) = 3k \Rightarrow x = 3k + 2$$

که اگر  $k$  را به ترتیب صفر و ۱ و ۲ قرار بدهیم همان جواب های  $x_0 = 2$  و  $x_0 = 5$  و  $x_0 = 8$  را به دست می آوریم و برای هر  $k \in \mathbb{Z}$ ، جوابی برای معادله به دست می آید. در معادله فوق ضریب  $x$  عدد یک است و اگر ضریب  $x$  عددی غیر از یک باشد برای دست یابی به جواب های عمومی معادله باید ضریب  $x$  را حذف کنیم که ویژگی های ۵ و ۶ و نتیجه ویژگی ۶ به ما کمک می کنند.

مثال: جواب های عمومی معادله  $4x \equiv 17 \pmod{5}$  را به دست آورید.

$$4x \equiv 17 \pmod{5}, 17 \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 2 \pmod{5}$$

$$\begin{array}{l} \text{ویژگی ۵} \\ \Rightarrow 4x \equiv 2 + (2 \times 5) \end{array}$$

$$\Rightarrow 4x \equiv 12 \pmod{5} \Rightarrow \cancel{4}x \equiv \cancel{4} \times 3 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 3$$

$$(5 \mid x - 3) \Rightarrow x - 3 = 5k \Rightarrow x = 5k + 3$$

مثال: همه اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش پذیر باشند.

حل: اگر آن عدد را  $x$  فرض کنیم باید  $7 \mid 3x - 13$  یا  $3x \equiv 13 \pmod{7}$

$$3x \equiv 13 \pmod{7} \Rightarrow 3x \equiv 13 - 7 = 6 \pmod{7}$$

$$\begin{array}{l} (3, 7) = 1 \\ \Rightarrow \cancel{3}x \equiv \cancel{3} \times 2 \pmod{7} \Rightarrow x = 7k + 2 \end{array}$$

**قضیه:** معادله هم نهستی  $ax \equiv b \pmod{m}$  دارای جواب است اگر و فقط اگر  $(a, m) \mid b$ . این قضیه را بدون اثبات می پذیریم.

نتیجه: اگر  $(a, m) = 1$  چون برای هر  $b$ ، همواره  $b \mid b$  پس معادله  $ax \equiv b \pmod{m}$  همواره دارای جواب است.

مثال: معادله  $6x \equiv 11 \pmod{9}$  دارای جواب نیست زیرا،  $(6, 9) = 3$  و  $3 \nmid 11$  و معادله  $4x \equiv 18 \pmod{6}$  دارای جواب است. چرا؟

این معادله را حل کنید:

$$4x \equiv 18 \pmod{6} \Rightarrow 2 \times 2x \equiv 2 \times 9 \pmod{6}, (2, 6) = 2$$

$$\begin{array}{l} \text{ویژگی ۶} \\ \Rightarrow 2x \equiv 9 \pmod{6} \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 9 \pmod{6}$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 9 + 3 = 12 \pmod{6}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}x \equiv \cancel{2} \times 6 \pmod{6} \Rightarrow x = 3k + 6$$

## حل معادلات سیاله و کاربردهای آن

### فعالیت

۱ آیا می‌توانید یک کیسه ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟ (می‌توانید از یکی از دو وزنه یا هر دو باهم استفاده کنید و از هر وزنه به تعداد کافی در اختیار داریم)  
یک جواب مسئله استفاده از ۴ وزنه ۴ کیلویی و یک وزنه ۳ کیلویی است.

$$4 \times \dots + 1 \times 3 = \dots$$

آیا برای این مسئله می‌توانید یک جواب دیگر بیابید؟

$$1 \times \dots + \dots \times 5 = 19$$

در واقع شما به دنبال جواب‌های حسابی (صحیح و نامنفی) برای معادله  $4x + 3y = 19$  هستید.

( $x$  تعداد وزنه‌های ۴ کیلویی به کار رفته و  $y$  تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی به کار رفته است)

۲ اگر در قسمت قبل بخواهیم فقط از وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی استفاده کنیم آیا عمل توزین امکان‌پذیر است؟

باید جواب‌هایی چون  $x \in W$  و  $y \in W$  بیابیم که  $\dots \times x + \dots \times y = \dots$  چون مجموع دو عدد زوج همواره ... است پس چنین  $x$  و  $y$  ای در  $W$  وجود ندارد.

تعریف: هرگاه بخواهیم جواب‌های معادله  $ax + by = c$  یعنی  $x$  و  $y$  را در اعداد صحیح بیابیم و  $c \in \mathbb{Z}$  و  $b$  و  $a$  در این صورت معادله مذکور ( $ax + by = c$ ) را یک معادله سیاله درجه اول یا خطی می‌نامیم.

### تبدیل یک معادله سیاله به معادله هم‌نهستی

معادله سیاله  $ax + by = c$  دارای دو مجهول است و به دو صورت می‌تواند به یک معادله هم‌نهستی (با مجهول  $x$  یا  $y$ ) تبدیل

شود:

$$ax + by = c \Rightarrow ax - c = (-b)y \Rightarrow -b | ax - c \Rightarrow b | ax - c$$

$$\Rightarrow ax \equiv c \pmod{b} \quad (b > 0) \quad \text{یا} \quad ax \equiv c \pmod{-b} \quad (b < 0) \quad \text{یا} \quad ax \equiv c \pmod{|b|}$$

$$by \equiv c \pmod{-a} \quad \text{و} \quad by \equiv c \pmod{a}$$

و به طریق مشابه می‌توان نوشت:

تذکر: با توجه به قضیه قبل نتیجه می‌گیریم که «شرط لازم و کافی برای آنکه معادله سیاله  $ax + by = c$  دارای جواب

باشد آن است که،  $c \in (a, b)$

۱ با تبدیل معادله سیاله  $4x + 5y = 9$  به معادله هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله سیاله را بیابید.

$$\begin{aligned} 4x + 5y = 9 &\Rightarrow 4x \equiv \dots \\ &\Rightarrow 4x \equiv 9 - \dots \Rightarrow 4x \equiv 4 \\ &\Rightarrow x \equiv \dots \Rightarrow x = 5k + \dots \\ &\Rightarrow 4(5k+1) + 5y = 9 \\ &\Rightarrow 20k + 4 + 5y = 9 \\ &\Rightarrow 20k + 5y = 5 \\ &\Rightarrow 4k + y = 1 \Rightarrow y = \dots k + 1 \end{aligned}$$

۲ در قسمت ۱ فعالیت قبل مشخص کنید به چند طریق می‌توان عمل وزن کردن را انجام داد.

کافی است جواب‌های عمومی معادله  $4x + 3y = 19$  را (برحسب  $k$ ) بیابیم و به‌ازای هر  $k \in \mathbb{Z}$  که  $x$  و  $y$  منفی نباشند تعداد حالت‌ها را شمارش کنیم:

$$\begin{aligned} 4x + 3y = 19 &\Rightarrow 4x \equiv \dots \\ &\Rightarrow 4x \equiv 1 \Rightarrow 4x \equiv 1 + \dots \\ &\Rightarrow x \equiv \dots \times 1 \Rightarrow x = 3k + 1 \\ &\Rightarrow 4(3k+1) + 3y = 19 \\ &\Rightarrow 12k + 4 + 3y = 19 \\ &\Rightarrow 12k + 3y = \dots \Rightarrow \dots + y = 5 \\ &\Rightarrow y = -4k + 5 \end{aligned}$$

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \text{ و } k = \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

به‌ازای  $k=2$  و بیشتر از آن  $y < 0$  و به‌ازای  $k=-1$  و کمتر از آن  $x < 0$  که قابل قبول نمی‌باشند و لذا به دو صورت فوق می‌توان این کیسه ۱۹ کیلویی را وزن کرد.

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

حل: اگر  $x$  و  $y$  را به ترتیب تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی فرض کنیم حل این مثال معادل است با تعداد

$$2000x + 5000y = 18000$$

$$2000x + 5000y = 18000$$

$$\Rightarrow 2x + 5y = \dots$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 18 \text{ و } 18 \equiv \dots$$

$$\Rightarrow x \equiv 9 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow x \equiv \dots \Rightarrow x = 5k + 4$$

$$\Rightarrow 2(5k + 4) + 5y = 18$$

$$\Rightarrow 10k + 8 + 5y = 18$$

$$\Rightarrow 10k + 5y = 10 \Rightarrow y = -2k + 2$$

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ و } k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 0 \end{cases} \quad (\text{فقط به ازای } 1 \text{ و } 0 \text{ برای } x \text{ و } y \text{ جواب‌ها نامنفی هستند})$$

پس به دو طریق امکان تبدیل کردن ۱۸۰۰۰ تومان به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی، وجود دارد.

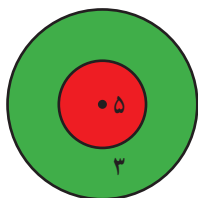
مثال: در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه‌سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند)

حل: اگر تعداد چلو خورش قورمه‌سبزی و چلو خورش قیمه سفارش داده شده را به ترتیب با  $x$  و  $y$  نشان دهیم خواهیم داشت:

$$x + y = 5 \Rightarrow x \equiv 5 \Rightarrow x = k + \dots$$

$$\Rightarrow k + \cancel{x} + y = \cancel{x} \Rightarrow y = \dots$$

چون  $x$  و  $y$  اعدادی نامنفی هستند پس باید  $k \in \{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$  و لذا به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند.



مثال: تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایره هم مرکز، تیراندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایره با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایره بزرگ‌تر و خارج دایره کوچک‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر انداخته و همه تیرها به داخل دایره بزرگ‌تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟

حل: اگر  $x$  و  $y$  را به ترتیب تعداد اصابت‌ها به دایره کوچک‌تر و بزرگ‌تر فرض کنیم، داریم:

$$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x \equiv 42$$

$$\Rightarrow 5x \equiv 42 + 3 \Rightarrow x \equiv 9 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow x = 5k + 9$$

$$5(5k + 9) + 3y = 42$$

$$\Rightarrow 15k + 45 + 3y = 42$$



$$\Rightarrow 15k + 3y = -3 \Rightarrow y = -5k - 1$$

$$x, y \in W \Rightarrow k \in \{-1, -2, -3\} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=14 \end{cases}$$

( $x=6$  و  $y=4$  یعنی تیرانداز ۶ تیر را به دایره کوچک‌تر و ۴ تیر را به دایره بزرگ‌تر زده است).

## تمرین

۱ عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته هم‌نهستی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟

۲ اگر  $k \in \mathbb{Z}$ ، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است

$$k \equiv 0 \pmod{3} \text{ یا } k \equiv 1 \pmod{3} \text{ یا } k \equiv 2 \pmod{3}$$

(به عبارت دیگر،  $k \in [0]_3$  یا  $k \in [1]_3$  یا  $k \in [2]_3$ )

۳ اگر  $a \equiv b \pmod{m}$  و  $n | m$  ثابت کنید  $a \equiv b \pmod{n}$ .

۴ فرض کنیم،  $a \equiv b \pmod{m}$  و  $b \equiv c \pmod{n}$  و  $(m, n) = d$  در این صورت ثابت کنید  $a \equiv c \pmod{d}$ .

۵ ثابت کنید: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد  $a$  بر  $b$  و  $m$  مساوی باشند آن‌گاه  $a \equiv b \pmod{m}$ .

۶ عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

۷ با استفاده از بسط دو جمله‌ای ختم‌یابی کنید،

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

ثابت کنید که برای هر  $n \in \mathbb{N}$  و  $a, b \in \mathbb{Z}$  همواره  $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$ .

۸ با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد  $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$  بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

۹ باقی‌مانده تقسیم عدد  $A = (2^{11} + 7) \times 9$  را بر ۲۳ بیابید.

۱۰ اگر دو عدد  $(3a - 5)$  و  $(4a - 7)$  رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد  $(9a + 6)$  را به دست آورید.

۱۱ باقی‌مانده تقسیم عدد  $1! + 2! + 3! + \dots + 500!$  را بر ۱۰ به دست آورید (رقم یکان  $A$  را بیابید)

۱۲ جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی  $7x + 5y = 11$  را به دست آورید.

۱۳ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۱۴ معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آنها را به دست آورید.

الف)  $423x \equiv 79 \pmod{11}$

ب)  $8x \equiv 20 \pmod{12}$

ج)  $51x \equiv 11 \pmod{6}$

۱۵ اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۶ اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۷ همه اعداد صحیح چون  $a$  را بیابید که ۵ برابر آنها به علاوه ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشد.

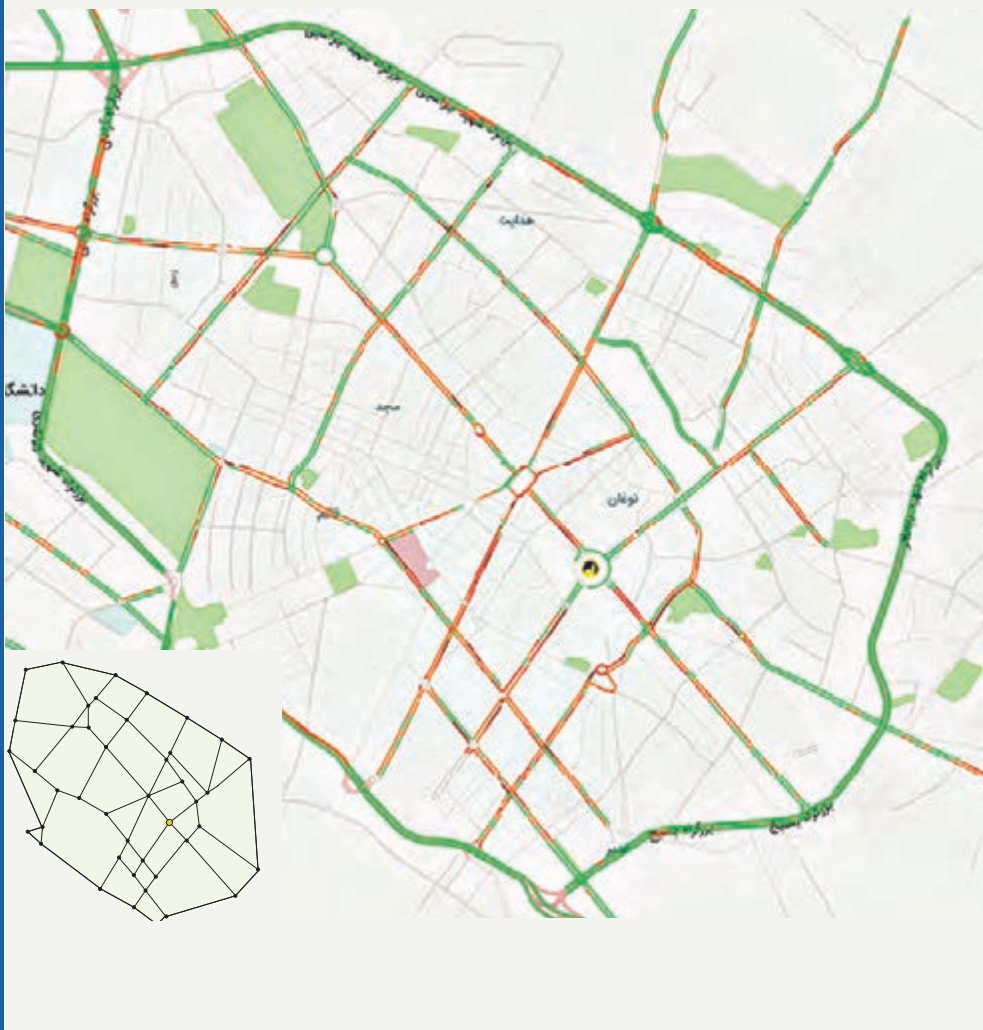
۱۸ به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۱۹ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

۲۰ شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز

کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد

و یا امتیازی ندارد)



## گراف و مدل سازی

# ۲

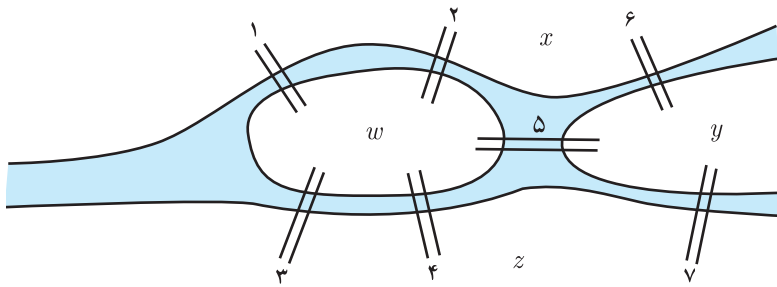
- ۱ معرفی گراف
- ۲ مدل سازی با گراف

نظریه گراف یکی از موضوع های مهم در ریاضیات گسسته است که به مطالعه مدل سازی مسائل به وسیله گراف ها و مطالعه آنها می پردازد. در واقع گراف مدلی ریاضی برای یک مجموعه گسسته است که اعضای آن به طریقی به هم مرتبط هستند. اعضای این مجموعه می توانند انسان ها، شهرها، اتم ها و... باشند و در هر مورد نوعی از ارتباط بین اعضا مدنظر است و با توجه به آن ارتباط مسئله مورد نظر با گراف مدل سازی شده و مورد بررسی قرار می گیرد.



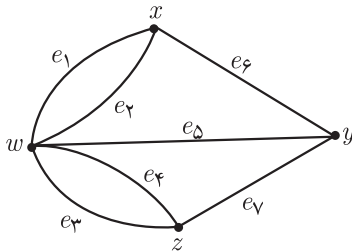
در اوایل قرن هجدهم، معمایی فکر برخی از اهالی شهر کونیگسبرگ (در حال حاضر در روسیه) را به خود مشغول کرده بود.

رودخانه این شهر که از میان شهر عبور می‌کرد مانند آنچه در شکل زیر می‌بینید، شهر را به چند قسمت تقسیم می‌کرد. برخی از مردم این شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می‌توان با حرکت از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور از هر کدام از پل‌ها، به نقطه شروع حرکت بازگشت؟



شکل ۱

لئونارد اویلر<sup>۱</sup> (۱۷۸۳ – ۱۷۰۷)، ریاضی‌دان برجسته سوئیسی، برای حل این مسئله از شکل زیر، که امروزه به آن «گراف» می‌گوییم، کمک گرفت و با استفاده از استدلال ثابت کرد که این کار امکان‌پذیر نیست.



شکل ۲

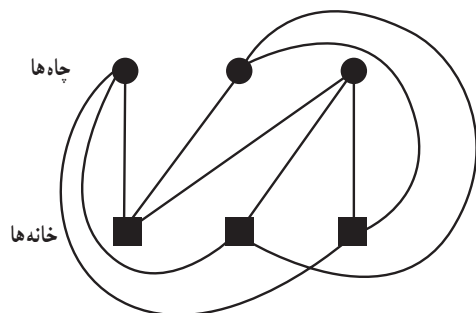
اگر چهار ناحیه  $x$  و  $y$  و  $z$  و  $w$  را با ۴ نقطه نمایش دهیم و به ازای هر پل که بین دو ناحیه قرار دارد نقاط متناظر با آن ناحیه‌ها را به هم وصل نماییم شکل مقابل به دست می‌آید که گراف حاصل از مدل‌سازی مسئله مذکور است. مدل‌سازی بسیاری از مسائل با گراف، دسته‌بندی منظم و تفکر منطقی درباره آنها را آسان‌تر می‌نماید.

اگرچه بیشتر مورخان تاریخ ریاضی شروع بحث گراف را از این مسئله اویلر می‌دانند، اما نمی‌توان

<sup>۱</sup> Leonhard Euler

مطمئن بود که متفکران و دانشمندان دیگری پیش از آن تاریخ برای حل مسائل از مدل‌سازی با گراف بهره نگرفته باشند. به طور مثال در حدود ۱۰۰ سال پیش از آن شیخ بهایی، ریاضی‌دان ایرانی<sup>۱</sup> (۱۰۰۰-۹۲۵ خورشیدی) مسئله‌ای به این صورت طرح کرد:

سه خانه و سه چاه آب، مانند شکل مقابل مفروض‌اند. آیا می‌توان از هر چاه به هر خانه یک کانال آب حفر کرد به طوری که هیچ دو کانالی یکدیگر را قطع نکنند؟



شکل ۳

حل این مسئله هم ارتباط نزدیکی به مباحث گراف دارد. اگر خانه‌ها و چاه‌ها را ۶ نقطه مشخص کنیم و کانال‌ها را با خط‌ها یا منحنی‌ها نمایش دهیم در این صورت دو مجموعه مجزای ۳ عضوی از نقاط داریم که باید نقاط مجموعه اول به تک‌تک نقاط مجموعه دوم وصل شوند. شکل حاصل از این کار یک گراف است و می‌توان نشان داد که این کار نشدنی است و لاقلاً دو تا از خط‌ها یکدیگر را قطع می‌کنند. حال به مثالی از تحلیل یک وضعیت به کمک گراف می‌پردازیم.

مثال: ۵ تیم فوتبال  $a, b, c, d, e$  در یک گروه قرار دارند و تیم‌ها دوبه‌دو با هم بازی می‌کنند و برخی از این بازی‌ها انجام

شده است و اطلاعات زیر را داریم:

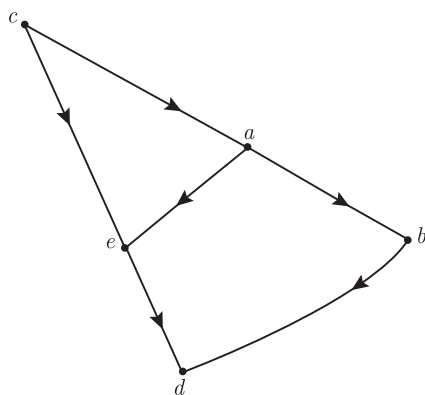
تیم  $a$  تیم‌های  $b$  و  $e$  را برده و به  $c$  باخته است.

تیم  $b$  به  $a$  باخته و از  $d$  برده است.

تیم  $c$  از تیم‌های  $a$  و  $e$  برده است.

تیم  $d$  به تیم‌های  $b$  و  $e$  باخته است.

تیم  $e$  به  $a$  و  $c$  باخته و از تیم  $d$  برده است.



شکل ۴

برای نمایش تمام اطلاعات بالا به صورت خلاصه، از نموداری به شکل ۴

استفاده می‌کنیم که به ازای هر تیم یک نقطه می‌گذاریم و هر دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر تیم‌های مربوط به آنها با هم بازی کرده باشند؛ و جهت خط یا منحنی‌ای که دو نقطه را به هم وصل می‌کند باید از تیم برنده به سمت تیم بازنده باشد.

حال با یک نگاه به نمودار رسم شده، علاوه بر دریافت اطلاعات بالا به

سادگی به سؤال‌های زیر نیز می‌توان جواب داد.

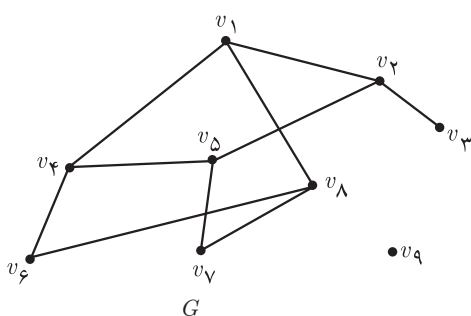
– مشخص کنید هر تیم با کدام تیم‌ها بازی نکرده است.

– اگر هر برد ۳ امتیاز داشته باشد در بازی‌هایی که تا اینجا انجام شده

است کدام تیم‌ها بیشترین امتیاز را کسب کرده‌اند؟

۱- دکتر مهدی بهزاد، متولد ۱۳۱۵، ریاضی‌دان مشهور ایرانی، یکی از پیشگامان نظریه گراف در ایران است. بسیاری از پژوهش‌گران در این زمینه او را پدر علم گراف در ایران می‌دانند.

مسئله: سؤال دیگری مطرح کنید که با دیدن نمودار گراف مثال قبل بتوان به آن جواب داد.



شکل ۵

همان طور که دیدیم یک گراف متشکل است از مجموعه‌ای از نقاط و مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها، که به هر یک از این نقاط **رأس** و به هر یک از پاره‌خط‌ها **یال** می‌گوییم. توجه کنید که یال‌ها لازم نیست حتماً پاره‌خط راست باشند و می‌توانند به صورت منحنی نیز باشند و در هر سر یال باید رأسی قرار داشته باشد. همان طور که دیدیم یک گراف را می‌توان با رسم نمودار آن نشان داد و نیز می‌توان آن را با نمادهای ریاضی معرفی کرد. در ادامه به شکلی ساده چند تعریف مقدماتی و نحوه نمایش یک گراف را بررسی می‌کنیم.

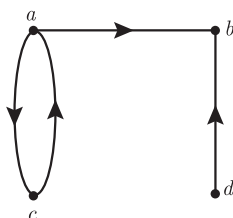
گراف  $G$  را با ۹ رأس و ۱۰ یال، مانند شکل ۵، در نظر می‌گیریم و با بررسی آن برخی تعاریف را نیز مطرح می‌نماییم. با توجه به اینکه یک گراف مجموعه‌ای از رئوس<sup>۱</sup> و یال‌هاست می‌توان به جای نمایش آن با شکل بالا، با نمادهای ریاضی مجموعه یال‌ها و رئوس آن را به صورت زیر نمایش داد.

$$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_8, v_9\}$$

$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_5, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_6, v_5v_7, v_6v_7, v_6v_8, v_7v_8, v_8v_9\}$$

به وضوح، با داشتن شکل گراف، شما می‌توانید مجموعه‌های  $V(G)$  و  $E(G)$  را بنویسید و همچنین با داشتن دو مجموعه  $V(G)$  و  $E(G)$  می‌توانید ابتدا به تعداد  $n(V(G))$  (تعداد اعضای مجموعه  $V(G)$ ) که آن را با  $|V(G)|$  نیز نمایش می‌دهیم (نقطه رأس) مشخص نمایید و سپس با توجه به  $E(G)$  رأس‌های متناظر را به هم وصل نمایید.

همان طور که در مثال تیم‌های فوتبال ملاحظه کردید گاهی اوقات لازم است برای یال‌ها جهت تعیین کنیم.



شکل ۶

به گرافی که برای یال‌های آن جهت تعیین شده باشد، **گراف جهت‌دار** می‌گوییم. در این حالت برای نمایش اینکه جهت یک یال از سمت کدام رأس به سمت کدام رأس است یال‌ها را با زوج مرتب نمایش می‌دهیم. به طور مثال مجموعه رئوس و یال‌های گراف جهت‌دار شکل ۶ را این گونه نمایش می‌دهیم.

$$V = \{a, b, c, d\} \quad E = \{(a, b), (a, c), (c, a), (d, b)\}$$

## کار در کلاس

– دو مجموعه  $V(G)$  و  $E(G)$  به صورت زیر داده شده‌اند. با توجه به آنها شکل گراف مورد نظر را بکشید.

الف)  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$

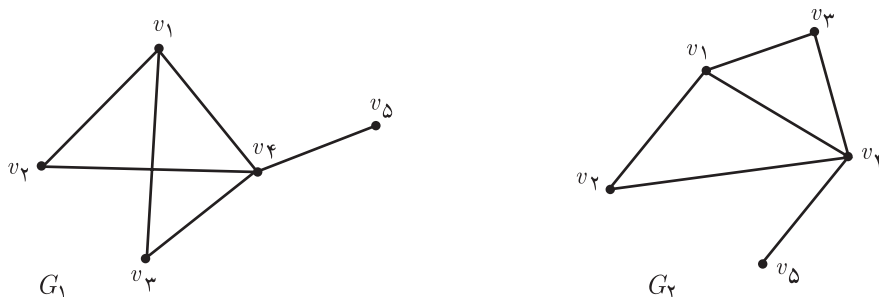
ب)  $V(G) = \{a, b, c, d\}$

$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_5, v_5v_1, v_5v_6\}$

$E(G) = \{(a, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a)\}$

۱- مجموعه رئوس گراف همواره ناتهی در نظر گرفته می‌شود.

توجه: برای رسم نمودار یک گراف (شکل گراف) روش یکتایی مدنظر نیست. آنچه مهم است این است که باید مشخص باشد که گراف مورد نظر چند رأس و چند یال دارد و کدام یال به کدام رئوس متصل است. به طور مثال با نوشتن مجموعه‌های  $V(G)$  و  $E(G)$  برای هر یک از شکل‌های زیر، نشان دهید هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند.



شکل ۷

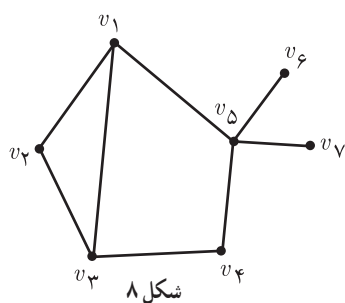
$$V(G_1) = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$V(G_2) = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$E(G_1) = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$E(G_2) = \{ \quad \quad \quad \}$$

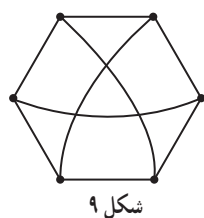
■ مرتبه و اندازه یک گراف: تعداد رأس‌های گراف  $G$  یعنی  $|V(G)|$  را مرتبه آن گراف می‌گوییم و با  $p(G)$  نمایش می‌دهیم و تعداد یال‌های گراف یعنی  $|E(G)|$  را اندازه گراف  $G$  می‌گوییم و با  $q(G)$  نمایش می‌دهیم. معمولاً برای راحتی کار به جای  $p(G)$  از  $p$  و به جای  $q(G)$  از  $q$  استفاده می‌کنیم. به طور مثال گراف‌های نمایش داده شده در شکل ۷ از مرتبه ۵ و اندازه ۶ هستند. بنابراین  $p=5$  و  $q=6$ .



شکل ۸

■ درجه یک رأس: درجه رأس  $v$  در گراف  $G$  برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف  $G$  که به رأس  $v$  متصل‌اند و آن را با  $deg_G(v)$  یا به طور ساده‌تر با  $deg(v)$  یا  $d(v)$  نمایش می‌دهیم. اگر درجه یک رأس فرد باشد آن را رأس فرد و اگر زوج باشد آن را رأس زوج می‌نامیم. به طور مثال در شکل مقابل داریم:

$$deg(v_1) = 3, \quad deg(v_5) = 4$$



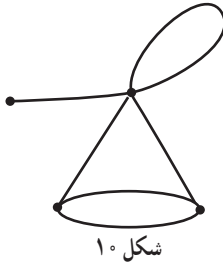
شکل ۹

■ گراف  $K$  - منتظم: گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد  $k$  باشند، گراف  $k$  - منتظم می‌نامیم. مثلاً گراف شکل ۹ یک گراف ۶ رأسی ۳ - منتظم است.

■ رأس تنها: به رأسی که درجه آن صفر باشد؛ یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد، رأس تنها (یا ایزوله) می‌گوییم.

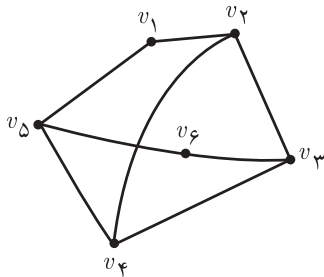
■ گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند، یعنی هیچ یالی نداشته باشد، گراف تهی می‌نامیم. بنابراین منظور از گراف تهی  $n$  رأسی، گرافی شامل  $n$  رأس تنها و بدون یال است.

درجهٔ سایر رئوس گراف شکل ۸ را بنویسید و مشخص کنید کدام رئوس فرد و کدام رئوس زوج اند.



شکل ۱۰

بین دو رأس از یک گراف ممکن است بیش از یک یال وجود داشته باشد. همچنین یک یال ممکن است یک رأس را به خود آن رأس وصل نماید که در این صورت به این یال **طوقه** گفته می‌شود. این دو مورد در شکل ۱۰ نمایش داده شده‌اند. گرافی را که در آن هیچ یک از این دو مورد اتفاق نیفتاده باشد را **گراف ساده** می‌گوییم. دیدیم که گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده نیست. ما در این کتاب فقط گراف‌های ساده را بررسی خواهیم کرد و از این به بعد منظورمان از گراف، گراف ساده است.



شکل ۱۱

■ دو رأس مجاور (همسایه): دو رأس  $u$  و  $v$  را دو رأس همسایه یا مجاور می‌گوییم هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند، یعنی  $uv \in E(G)$ . به طور مثال در گراف شکل ۱۱، رأس  $v_1$  با رئوس  $v_2$  و  $v_3$  همسایه است و رأس  $v_4$  با رئوس  $v_1$  و  $v_3$  همسایه است.

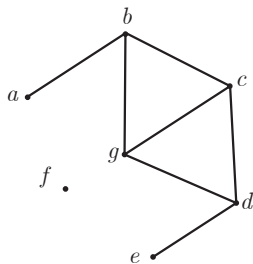
توجه: در زمان رسم نمودار یک گراف توجه داشته باشید که هیچ یالی خودش را قطع نکند و همچنین هیچ یالی نباید از روی رأسی که مربوط به دو سر آن یال نیست عبور نماید.

■ مجموعه همسایه‌های یک رأس: فرض کنیم  $v \in V(G)$ ، به مجموعهٔ رأس‌هایی از گراف  $G$  که به رأس  $v$  متصل هستند، «همسایگی باز رأس  $v$ » می‌گوییم و با  $N_G(v)$  نمایش می‌دهیم. اضافه کردن خودِ رأس  $v$  به  $N_G(v)$  «همسایگی بستهٔ رأس  $v$ » را به دست می‌دهد که آن را با  $N_G[v]$  نمایش می‌دهیم. می‌توان این دو مجموعه را به صورت زیر نمایش داد:

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$$

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

به‌طور مثال در گراف شکل ۱۲ داریم:



شکل ۱۲

$$N_G(a) = \{b\}$$

$$N_G[a] = \{a, b\}$$

$$N_G(c) = \{b, d, g\}$$

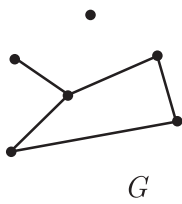
$$N_G[c] = \{b, c, d, g\}$$

$$N_G(f) = \emptyset$$

$$N_G[f] = \{f\}$$

■ دو یال مجاور: دو یال را مجاور می‌گوییم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها به آن متصل باشند. به‌طور مثال در شکل ۱۲، یال‌های  $bc$  و  $cd$  مجاوراند.

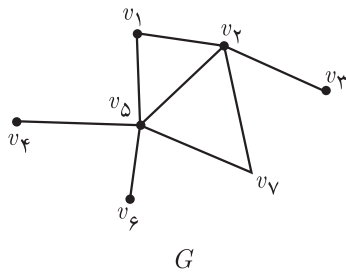




شکل ۱۳

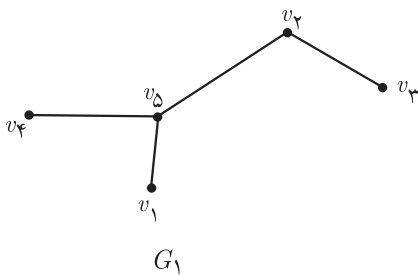
■ **بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجهٔ یک گراف**: بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف  $G$  را با  $\Delta(G)$  و کوچک‌ترین آنها را با  $\delta(G)$  نمایش می‌دهیم و به ترتیب آنها را ماکزیمم و مینیمم درجهٔ گراف می‌نامیم. به طور مثال در گراف شکل ۱۳ داریم:

$$\Delta(G) = 3, \quad \delta(G) = 0$$



شکل ۱۴

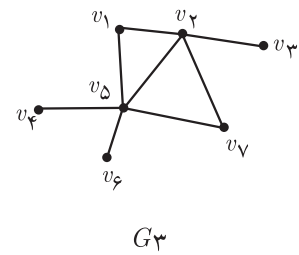
■ **زیرگراف**: یک زیرگراف از گراف  $G$  گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ رئوس گراف  $G$ ، و مجموعهٔ یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ یال‌های  $G$  باشد. به طور مثال گراف‌های  $G_1$  و  $G_2$  و  $G_3$  که در شکل ۱۵ آمده‌اند، زیرگراف‌هایی از گراف  $G$  در شکل ۱۴ هستند.



$G_1$



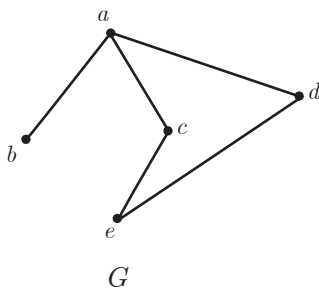
$G_2$



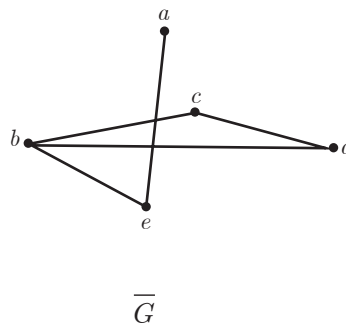
$G_3$

شکل ۱۵

■ **مکمل یک گراف**: مکمل گرافی مانند  $G$  که آن را با  $G^c$  یا  $\bar{G}$  نمایش می‌دهیم گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن همان مجموعهٔ رئوس گراف  $G$  است و بین دو رأس از  $G^c$  یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در  $G$  یالی وجود نداشته باشد. در شکل ۱۶ یک گراف و مکملش نمایش داده شده است.



$G$



$\bar{G}$

شکل ۱۶

**مسئله ۱:** اگر  $G$  یک گراف با  $n$  رأس و  $v$  یک رأس آن باشد و  $d_G(v)$  و  $d_{\bar{G}}(v)$  به ترتیب درجه رأس  $v$  در گراف های  $G$  و  $\bar{G}$  باشند، مقدار  $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v)$  را به دست آورید.

**مسئله ۲:** یک گراف  $n$  رأسی حداکثر چند یال می تواند داشته باشد؟

**مسئله ۳:** اگر  $G$  یک گراف  $n$  رأسی باشد، مقدار  $q(G) + q(\bar{G})$  را به دست آورید.

**■ گراف کامل:** گرافی را که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر، مجاور باشد گراف کامل می نامیم. گراف کامل  $n$  رأسی را با  $K_n$  نمایش می دهیم. می توان گفت  $K_n$  یک گراف  $n$  رأسی و  $n-1$  منتظم است.

**مسئله ۱:** یک گراف کامل  $p$  رأسی چند یال دارد؟

**مسئله ۲:** اگر  $G$  یک گراف  $p$  رأسی باشد، چه رابطه ای بین تعداد یال های گراف های  $G$ ،  $\bar{G}$  و  $K_p$  وجود دارد؟

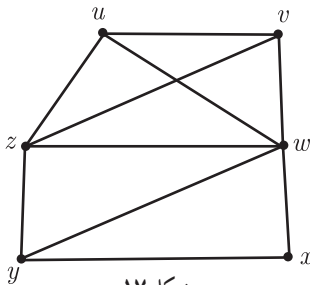
**مسئله ۳:** مکمل گراف کامل چه نوع گرافی است؟

**■ مسیر:** اگر  $u$  و  $v$  دو رأس از گراف  $G$  باشند، یک مسیر از  $u$  به  $v$  (یک  $u-v$  مسیر) در  $G$  دنباله ای از رئوس دوهو و متمایز در  $G$  است که از  $u$  شروع و به  $v$  ختم می شود به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در  $G$  مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر). قرارداد می کنیم که دنباله متشکل از تنها یک رأس  $v$ ، یک مسیر است با طول صفر از رأس  $v$  به خودش.

**مثال**

$uvw$  یک  $u-v$  مسیر به طول ۲ است.

$uzyvw$  یک  $u-v$  مسیر به طول ۴ است.



شکل ۱۷



شکل ۱۸

**■ گرافی را که تنها از یک مسیر  $n$  رأسی تشکیل شده باشد با  $P_n$  نمایش می دهیم.**

به طور مثال  $P_5$  در شکل ۱۸ نمایش داده شده است.

**■ دور:** دنباله  $v_1 v_2 v_3 \dots v_n v_1$  ( $n \geq 3$ ) از رئوس دو به دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول  $n$  می نامیم. به طور مثال در گراف شکل ۱۷ دورهای  $xwvzyx$ ،  $ywzy$ ،  $uvwu$  به ترتیب به طول ۳ و ۴ و ۶ هستند.



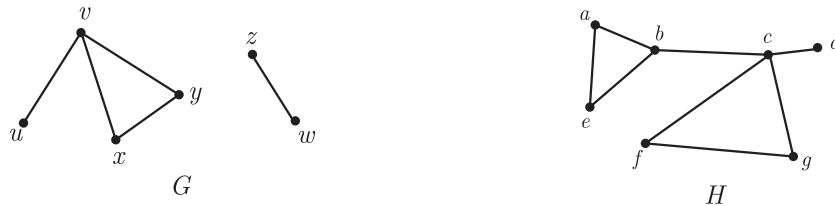
شکل ۱۹

**■ گرافی را که تنها از یک دور  $n$  رأسی تشکیل شده باشد را با  $C_n$  نمایش می دهیم.**

به طور مثال  $C_5$  در شکل ۱۹ نمایش داده شده است.

**مسئله:** در گراف شکل ۱۷، دوری به طول ۵ بیابید.

■ همبندی و ناهمبندی یک گراف: گراف  $G$  را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم. به طور مثال گراف  $H$  در شکل ۲۰ همبند و گراف  $G$  ناهمبند است زیرا مثلاً بین رئوس  $v$  و  $w$  هیچ مسیری وجود ندارد.



شکل ۲۰

### فعالیت

- ۱ سه گراف دلخواه رسم کنید.
- ۲ مجموع درجات رئوس هر یک از ۳ گرافی را که رسم کرده‌اید محاسبه کنید.
- ۳ تعداد یال‌های هر یک از ۳ گراف را محاسبه نمایید.
- ۴ حدس می‌زنید چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌ها و مجموع درجات رئوس یک گراف وجود دارد.
- ۵ پاسخ خود را با دوستانتان مطرح کرده و در این باره بحث کنید.

### فعالیت

- ۱ یک گراف دلخواه مانند  $G$  با  $n$  رأس  $v_1, v_2, \dots, v_n$  و  $m$  یال  $e_1, e_2, \dots, e_m$  در نظر بگیرید.
  - ۲ تمام یال‌های گراف  $G$  را حذف کنید.
  - ۳ مجموع درجات تمام رئوس گراف حاصل چند است؟ تعداد یال‌های گراف حاصل چند است و این دو عدد چه ارتباطی با هم دارند؟
  - ۴ یال  $e_1$  را در جای خود (بین همان دو رأسی که  $e_1$  قبل از حذف شدن بین آنها قرار داشت) قرار دهید و به سؤال ۳ جواب دهید.
  - ۵ تمام یال‌های  $e_1, e_2, \dots, e_m$  را یکی یکی در جای خود قرار دهید تا به گراف اولیه  $G$  برسید و پس از اضافه کردن هر یال مجدداً برای گراف جدید ساخته شده به سؤال ۳ جواب دهید.
  - ۶ آیا مجموع درجات رئوس یک گراف می‌تواند عددی فرد باشد؟ چرا؟
  - ۷ برای تساوی  $\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = \deg(v_1) + \deg(v_2) + \dots + \deg(v_n) = 2m$  استدلال خود را بیان نمایید.
- با توجه به آنچه در این فعالیت به دست آوردیم، می‌توان قضیه زیر را بیان نمود.
- قضیه: اگر  $G$  یک گراف با مرتبه  $p$  و اندازه  $q$  و  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  مجموعه رئوس آن باشند، آنگاه:

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$$

نتیجه: تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

اثبات: فرض کنیم  $G$  یک گراف و  $A$  مجموعه همه رئوس فرد گراف  $G$  و  $B$  مجموعه همه رئوس زوج گراف  $G$  باشد. در

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$$

این صورت داریم. از طرفی  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$  و  $\sum_{v \in B} \deg(v)$  زوج اند. (چرا؟) بنابراین  $\sum_{v \in A} \deg(v)$  نیز عددی زوج است و این نتیجه می‌دهد که  $n(A)$  عددی زوج است. (چرا؟)

### فعالیت

یک جمع ۷ نفره از دانش‌آموزان یک کلاس را در نظر بگیرید. فرض کنید دوستی بین اعضای این گروه یک رابطه دوطرفه است، یعنی هر دو نفر از آنها یا هر دو با هم دوست‌اند و یا هیچ‌یک با دیگری دوست نیست. اکنون:

الف) گراف  $G$  رأسی ۷ رأسی را تشکیل دهید به این صورت که به ازای هر دانش‌آموز یک رأس قرار دهید، سپس هر دو رأس را به هم وصل کنید اگر و تنها اگر دانش‌آموزان متناظر با آن دو رأس با هم دوست باشند.

ب) با استفاده از قضیه قبل نشان دهید که امکان ندارد درجه تمام رئوس گراف حاصل برابر با ۳ باشد.

پ) با توجه به مراحل قبل و با استفاده از گراف نشان دهید که اگر تعداد افراد یک جمع عددی فرد باشد امکان ندارد تمام نفرات آن جمع، دارای تعداد فردی دوست در آن جمع باشند.

### فعالیت

فرض کنید  $G$  یک گراف باشد و داشته باشیم  $\delta(G) \geq 4$ . می‌خواهیم نشان دهیم که  $G$  شامل یک مسیر به طول بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است.

۱. رأس دلخواه  $v_1$  را در  $G$  در نظر می‌گیریم. حتماً  $v_1$  به رأس دیگری متصل است. (چرا؟) فرض کنیم آن رأس  $v_2$  باشد.
۲. حتماً  $v_2$  به رأسی به جز رأس  $v_1$  متصل است. (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس  $v_3$  باشد.
۳. حتماً  $v_3$  به رأسی از مجموعه  $V(G) - \{v_1, v_2\}$  وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس  $v_4$  باشد.
۴. حتماً  $v_4$  به رأسی از مجموعه  $V(G) - \{v_1, v_2, v_3\}$  وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس  $v_5$  باشد.
۵. مسیر  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$  یک مسیر به طول ۴ در گراف  $G$  است.

### کاور کلاسی

در هر یک از حالت‌های زیر تعداد یال‌های گراف  $G$  را به دست آورید.

الف)  $G$  یک گراف  $n$  رأسی  $K$ -منتظم است.

ب)  $G$  یک گراف  $n$  رأسی کامل است. ( $G = K_n$ )

۱ گراف  $G$  با مجموعه رأس‌های  $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$  و مجموعه یال‌های  $E(G) = \{ab, ac, cd, ef, db, cf, be\}$  مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید.

(الف) مرتبه و اندازه گراف  $G$  را بنویسید.

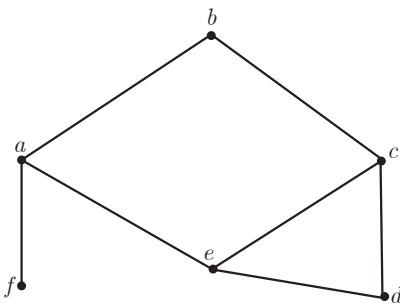
(ب) درجه رأس‌های  $G$  را مشخص نمایید.

(پ) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

(ت) کدام رأس‌های گراف  $G$  با رأس  $f$  مجاورند؟

(ث) گراف  $H$  با مجموعه رأس‌های  $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

و مجموعه یال‌های  $E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_1\}$  مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های (الف) تا (پ) در مورد گراف  $H$  پاسخ دهید.



شکل ۲۱ •g

۲ گراف  $G$  (شکل ۲۱) را در نظر بگیرید.

(الف) مجموعه‌های  $V(G)$  و  $E(G)$  را بنویسید.

(ب)  $\Delta(G)$  و  $\delta(G)$  را مشخص نمایید.

(پ) مجموعه همسایه‌های رأس‌های  $f$  و  $g$  را بنویسید.

(ت) اگر  $N_G(x) = \{a, c\}$ ، آنگاه  $x$  کدام رأس است؟

۳ گراف  $G$  با مجموعه رأس‌های  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  مفروض است. اگر  $N_G(v_1)$  دارای ۵ عضو باشد و مجموعه‌های  $N_G(v_i)$  برای  $2 \leq i \leq 6$  تک‌عضوی باشند، گراف  $G$  را رسم کنید.

۴ در گراف  $G$  با مجموعه رأس‌های  $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$  داریم:

$$N_G(a) = \{b, c, d\}$$

$$N_G(b) = \{a, c\}$$

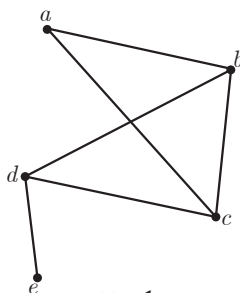
$$N_G(c) = \{a, b\}$$

$$N_G(d) = \{a, f\}$$

$$N_G(e) = \{ \}$$

$$N_G(f) = \{d\}$$

گراف  $G$  را رسم و اندازه آن را مشخص کنید.



شکل ۲۲

۵ گراف  $G$  (شکل ۲۲) رسم شده است. مجموع درجه‌های رأس‌های گراف  $\bar{G}$  را

مشخص کنید و همچنین درجات رئوس  $a$  و  $c$  در گراف  $\bar{G}$  را تعیین نمایید.

۶ گراف کامل  $K_p$  دارای ۳۶ یال است. در این گراف  $\Delta(G)$  و  $\delta(G)$  را مشخص کنید.

۷ گراف‌های کامل از مرتبه ۱ تا ۵ را رسم کنید.

۸ در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف  $r$ -منتظم از مرتبه  $n$  رسم کنید.

الف)  $n = 4$      $r = 1$     ب)  $n = 4$      $r = 2$

پ)  $n = 5$      $r = 2$     ت)  $n = 5$      $r = 3$

ث)  $n = 6$      $r = 4$     ج)  $n = 7$      $r = 3$

۹ برای هر یک از حالت‌های زیر در صورت امکان یک گراف ۵ رأسی رسم کنید به طوری که:

الف) یک رأس تنها داشته باشد.    ب) دو رأس تنها داشته باشد.

پ) سه رأس تنها داشته باشد.    ت) چهار رأس تنها داشته باشد.

ث) پنج رأس تنها داشته باشد.

۱۰ هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می‌دهند. ۶ نفر از آنها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده‌اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

۱۱ علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکه اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد.

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

ب) اگر بودن در فهرست دوستان به این صورت باشد که هر دو نفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ‌کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

۱۲ یک گراف ۹ رأسی رسم کنید به طوری که:

الف) دوره‌هایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

ب) دوره‌هایی به طول ۵ و ۶ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

۱۳ فرض کنید  $G$  یک گراف باشد و  $\delta(G) \geq K$ . درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف)  $G$  لزوماً شامل یک مسیر به طول  $K$  است.

ب)  $G$  لزوماً شامل یک مسیر به طول  $K + 1$  است.

۱۴ یک گراف ۴ رأسی غیرتهی  $K$ -منتظم بکشید که:

الف)  $K$  بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب)  $K$  کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۵ یک گراف ۵ رأسی غیرتهی  $K$ -منتظم بکشید که:

الف)  $K$  بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

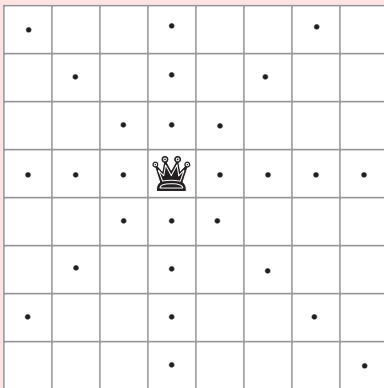
ب)  $K$  کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

## درس ۲ مدل سازی با گراف

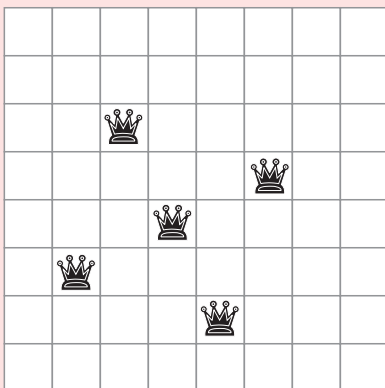
برخی از مسائل روزمره زندگی را می توان به کمک مدل سازی نخست به یک مسئله ریاضی تبدیل نمود و سپس با حل مسئله ریاضی، مسئله اصلی را نیز حل کرد. به طور کلی، بعضی مفاهیم ریاضی در مدل سازی مسائل زندگی واقعی بسیار پرکاربرد هستند. «احاطه گری» یکی از این مفاهیم پرکاربرد است که در ادامه با تاریخچه، مفهوم و کاربردهایی از آن آشنا خواهیم شد.

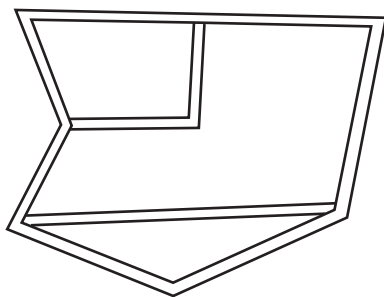
### تاریخچه

در قرن نوزدهم میلادی مسائلی مانند «یافتن حداقل تعداد مهره وزیر که می تواند با چینش مناسب تمام صفحه شطرنج را بپوشاند» (یعنی هر خانه صفحه شطرنج که در آن وزیر قرار نگرفته است توسط حداقل یک وزیر تهدید شده باشند) ذهن برخی از مردم اروپا را به خود مشغول کرده بود.

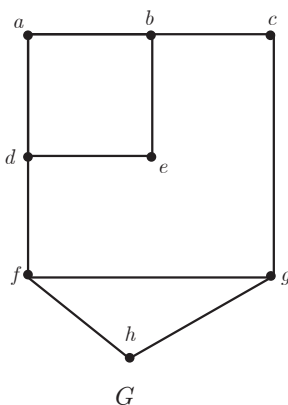


تفکر درباره پرسش هایی از این دست باعث به وجود آمدن مفهومی در شاخه گراف در ریاضیات با نام احاطه گری شد. برای آشنایی با این مفهوم به مسئله بعد دقت کنید.





شکل ۱



شکل ۲

شکل مقابل نقشه منطقه‌ای از یک شهر است. قرار است در برخی تقاطع‌های این شهر دستگاه‌های خودپرداز به گونه‌ای نصب شود که دو شرط زیر را داشته باشد:

۱ برای راحتی شهروندان دستگاه‌ها به گونه‌ای نصب شده باشند که هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد، یا در همان تقاطع به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند.

۲ به جهت صرفه‌جویی در هزینه‌ها با کمترین تعداد دستگاه خودپرداز ممکن این کار صورت بگیرد.

حال فرض کنید منطقه مورد نظر را با گراف شکل ۲ مدل‌سازی کرده باشیم. الف) در این مدل‌سازی تقاطع‌ها و خیابان‌های بین آنها هر کدام به چه صورت نمایش داده شده‌اند؟

ب) رأس‌هایی از گراف را مشخص کنید که، با توجه به مدل‌سازی انجام شده، اگر خودپردازها در آن تقاطع‌ها قرار گیرند، شرط ۱ برآورده گردد. چنین مجموعه‌ای از رئوس را یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف می‌نامیم. به‌طور مثال مجموعه شامل همه رئوس گراف  $G$ ، یک مجموعه احاطه‌گر است. آیا می‌توانید یک مجموعه احاطه‌گر ۴ عضوی مثال بزنید؟

**تعریف:** زیر مجموعه  $D$  از مجموعه رئوس گراف  $G$  را مجموعه احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در  $D$  باشد و یا حداقل با یکی از رئوس  $D$  مجاور باشد.<sup>۱</sup>

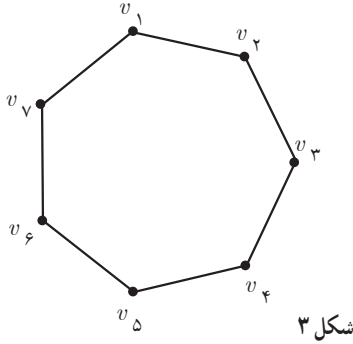
معمولاً به سادگی می‌توان مجموعه‌های مختلفی از رئوس گراف  $G$  را مشخص کرد که در شرط ۱ صدق کنند؛ به عبارتی یک گراف می‌تواند مجموعه‌های احاطه‌گر گوناگونی داشته باشد. از طرفی واضح است که هر مجموعه که شامل یک مجموعه احاطه‌گر باشد، احاطه‌گر است. در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر یک گراف، مجموعه‌ای را که کمترین تعداد عضو را داشته باشد مجموعه احاطه‌گر مینیمم آن گراف می‌نامیم. اگر چنین مجموعه‌ای را برای گراف  $G$  بیابیم، این مجموعه در هر دو شرط ۱ و ۲ مطرح شده در مسئله بالا صدق خواهد کرد.

**تعریف:** در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف  $G$ ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعه احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف  $G$  می‌نامیم و آن را با  $\gamma(G)$  نمایش می‌دهیم.

گاهی اوقات برای راحتی به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از گراف  $G$ ، یک  $\gamma$ -مجموعه می‌گوییم.

۱- از آنجا که عدد احاطه‌گری یک گراف ناهمبند، به سادگی و با استفاده از یک عمل جمع به دست می‌آید، لذا در این کتاب عدد احاطه‌گری گراف‌های همبند مد نظر است مگر اینکه مستقیماً به ناهمبندی گراف اشاره شود.





مثال: برای گراف شکل ۳ که دور  $C_7$  است، مجموعه  $\{v_1, v_2, v_5, v_7\}$  یک مجموعه احاطه گر و مجموعه های  $\{v_1, v_2, v_5\}$  و  $\{v_1, v_2, v_7\}$  دو مجموعه احاطه گر مینیمم یا اصطلاحاً دو  $\gamma$ -مجموعه اند؛ و داریم  $\gamma(G) = 3$ .

شکل ۳

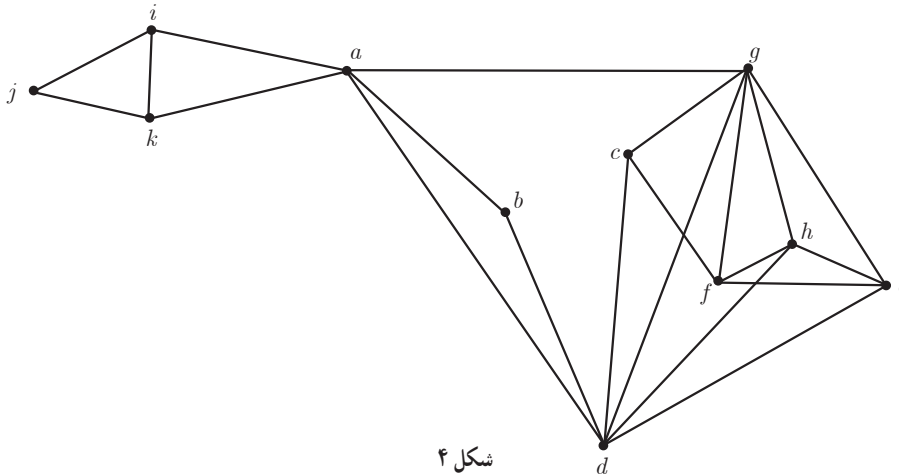
مثال: فرض کنید  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$  شهرهای یک استان باشند و فاصله های مستقیم این شهرها از یکدیگر، دو به دو، مطابق جدول زیر باشد.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a	۰	۵۰	۸۰	۴۰	۶۰	۹۰	۵۰	۷۰	۵۰	۶۰	۵۰
b	۵۰	۰	۵۵	۳۰	۶۰	۷۰	۶۰	۶۰	۹۰	۸۵	۸۰
c	۸۰	۵۵	۰	۴۰	۶۰	۲۰	۵۰	۵۵	۱۰۰	۹۵	۹۰
d	۴۰	۳۰	۴۰	۰	۳۰	۵۵	۳۰	۳۰	۸۰	۷۵	۷۰
e	۶۰	۶۰	۶۰	۳۰	۰	۵۰	۱۰	۵	۶۰	۵۵	۵۵
f	۹۰	۷۰	۲۰	۵۵	۵۰	۰	۴۰	۴۵	۱۰۰	۹۰	۸۰
g	۵۰	۶۰	۵۰	۳۰	۱۰	۴۰	۰	۵	۷۰	۶۵	۶۰
h	۷۰	۶۰	۵۵	۳۰	۵	۴۵	۵	۰	۶۵	۶۰	۵۵
i	۵۰	۹۰	۱۰۰	۸۰	۶۰	۱۰۰	۷۰	۶۵	۰	۵	۱۰
j	۶۰	۸۵	۹۵	۷۵	۵۵	۹۰	۶۵	۶۰	۵	۰	۵
k	۵۰	۸۰	۹۰	۷۰	۵۵	۸۰	۶۰	۵۵	۱۰	۵	۰

می خواهیم تعدادی ایستگاه رادیویی در برخی از شهرهای این استان تأسیس کنیم به طوری که همه شهرهای استان از پوشش امواج رادیویی برخوردار گردند. و از طرفی برای کاهش هزینه ها می خواهیم کمترین تعداد ممکن ایستگاه رادیویی را احداث کنیم. اگر هر ایستگاه رادیویی تا  $50$  کیلومتر اطراف خود را پوشش دهد، حداقل چند ایستگاه رادیویی احتیاج داریم و در چه شهرهایی باید آنها را احداث کنیم؟

حل: برای مدل سازی این مسئله کافی است گراف مربوط به آن را به این طریق رسم کنیم که به جای هر شهر یک رأس قرار دهیم و سپس دو رأس را به هم وصل کنیم اگر و تنها اگر فاصله مستقیم آن دو شهر از  $50$  کیلومتر بیشتر نباشد. در این صورت مجموعه احاطه گر مینیمم برای گراف مذکور، جواب مسئله را مشخص می کند. (چرا؟)

با توجه به آنچه گفته شد گراف زیر، گراف حاصل از مدل سازی برای این مسئله است.



شکل ۴

حال کافی است یک مجموعه احاطه گر مینیمم در این گراف بیابیم و ایستگاه های رادیویی را در شهرهای متناظر با رئوس این مجموعه احاطه گر مینیمم مستقر کنیم. یافتن یک مجموعه احاطه گر مینیمم برای گراف فوق در تمرینات پایان درس به شما واگذار شده است.

### کار در کلاس

۱ مشخص کنید کدام یک از مجموعه های زیر برای گراف شکل ۵ احاطه گر

هست و کدام نیست؟

الف)  $A = \{a, b, c, d, e\}$

ب)  $B = \{f, g, h, i, j\}$

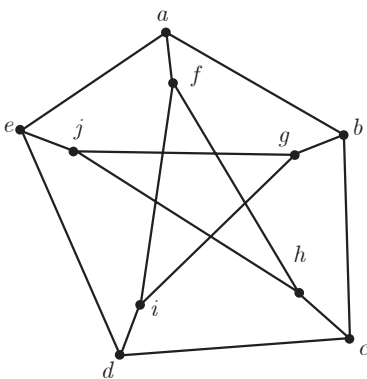
پ)  $C = \{a, b, j, h, g\}$

ت)  $D = \{a, i, h\}$

ث)  $E = \{f, g, h, e, d\}$

ج)  $F = \{f, g, h, e\}$

چ)  $H = \{g, h, e\}$



شکل ۵

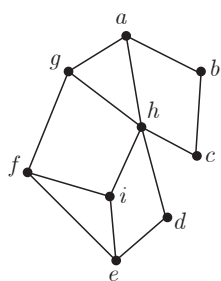
۲ از مجموعه های مطرح شده در سؤال ۱ که احاطه گر بودند در کدام یک از آنها رأس یا رأس هایی وجود دارد که با حذف آنها مجموعه باقی مانده هنوز احاطه گر باشد؟

تعریف: یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش دیگر احاطه گر نباشد احاطه گر **مینیمال** می نامیم.

۳ مجموعه ای احاطه گر با کمترین تعداد رأس که می توانید، بنویسید و پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی های خود مقایسه کنید.

۴ یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

۵ آیا می توان هر مجموعهٔ احاطه گر دلخواه غیر مینیمال را با حذف برخی رئوسش به یک مجموعهٔ احاطه گر مینیمال تبدیل کرد؟ (استدلال کنید)



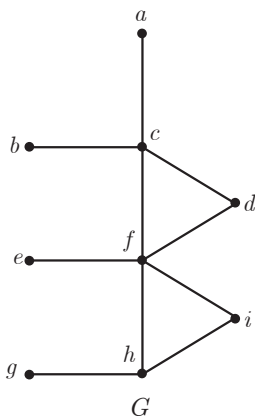
شکل ۶

مثال: در گراف شکل ۶ یک مجموعهٔ احاطه گر غیر مینیمال انتخاب کنید و با حذف برخی رأس‌ها، آن را به یک مجموعهٔ احاطه گر مینیمال تبدیل نمایید.

حل: مجموعه  $\{a, b, c, d, e, f\}$  یک مجموعهٔ احاطه گر است. از آنجا که با حذف برخی رأس‌های آن (مثلاً رأس  $a$ ) این مجموعه باز هم احاطه گر خواهد بود، لذا احاطه گر مینیمال نیست. حال با حذف سه رأس  $a, c, e$  از آن، مجموعه  $\{b, d, f\}$  حاصل می‌شود که باز هم احاطه گر است اما چون این مجموعه با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه گر نخواهد بود لذا احاطه گر مینیمال است.

### کار در کلاس

در گراف شکل ۷:



شکل ۷

- ۱ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه گر باشد.
- ۲ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه گر مینیمال باشد.
- ۳ یک مجموعهٔ احاطه گر ۳ عضوی مشخص نمایید.
- ۴ آیا رأسی در گراف  $G$  وجود دارد که دو رأس از  $a, b, e, g$  را احاطه کند؟
- ۵ حداقل تعداد رأس‌هایی که تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند چند است؟  $\gamma(G)$  چند است؟

### معرفی یک نماد

با مفهوم جزء صحیح<sup>۱</sup> یک عدد آشنا هستید و می‌دانید که اگر  $x$  یک عدد صحیح باشد،  $[x]$  برابر با خود  $x$  است، و اگر عدد صحیح نباشد، عدد صحیح قبل از  $x$  است.

$$[x] = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

حال فرض کنید تعدادی از کارمندان یک شرکت قرار است با چند تاکسی به محلی بروند و هر ۴ نفر یک تاکسی نیاز دارند.

الف) اگر تعداد کارمندان ۱۲ نفر باشد، چند تاکسی نیاز است؟

۱- گاهی اوقات به جزء صحیح یک عدد، کف آن عدد هم گفته می‌شود. در برخی کتاب‌ها  $[a]$  را با  $\lfloor a \rfloor$  نمایش می‌دهند و به آن کف  $a$  می‌گویند.

ب) اگر تعداد کارمندان ۱۴ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟

پ) اگر تعداد کارمندان ۱۶ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟

ت) آیا با تقسیم تعداد کارمندان به عدد ۴، تعداد تاکسی‌های مورد نیاز به دست می‌آید؟ اگر عدد حاصل عدد صحیح نباشد چه تعداد تاکسی نیاز است؟

ث) مفهوم سقف یک عدد که در ادامه مطرح شده است را می‌توان در مواردی مشابه آنچه در اینجا مطرح شد به کار برد.

در صورتی که  $x$  عددی غیر صحیح باشد برای نمایش عدد صحیح بعد از  $x$  از  $\lceil x \rceil$  استفاده می‌کنیم و آن را سقف  $x$  می‌خوانیم. در حالت کلی

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\lceil 3 \rceil = 3$$

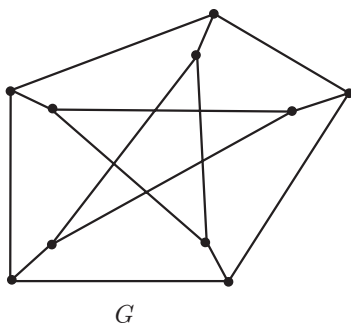
$$\lceil 3/5 \rceil = 3$$

$$\lceil 3 \rceil = 3$$

$$\lceil 3/5 \rceil = 4$$

■ سؤال: برای کدام اعداد کف و سقف آنها با هم برابر است؟

## فعالیت



شکل ۸

می‌دانیم در هر گراف، هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می‌کند.

۱ در گراف مقابل  $\Delta$  چند است؟

۲ هر رأس حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند و این تعداد چه ارتباطی با  $\Delta$  دارد؟

۳ آیا ۲ رأس می‌توانند همه رئوس گراف  $G$  را احاطه کنند؟

۴ حداقل  $\lceil \frac{1}{4} \rceil$  رأس برای احاطه همه رئوس لازم است. چرا؟

۵  $\gamma(G)$  چند است؟

۶ در یک گراف دلخواه با ماکزیم درجه  $\Delta$ ، یک رأس دلخواه حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند؟

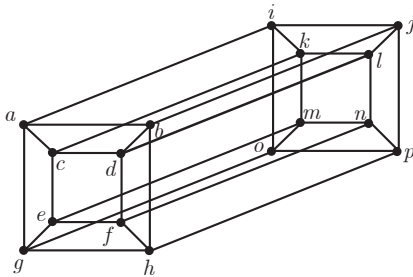
۷ تعداد کمتر از  $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$  رأس نمی‌توانند تمام  $n$  رأس یک گراف را احاطه کنند. چرا؟

بنابراین :

اگر  $G$  یک گراف  $n$  رأسی با ماکزیمم درجه  $\Delta$  باشد و  $D$  یک مجموعه احاطه‌گر در آن باشد، آنگاه  $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq |D|$  و از آنجا که  $\gamma(G)$  نیز اندازه یک مجموعه احاطه‌گر است همواره داریم  $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \gamma(G)$  (اصطلاحاً گفته می‌شود در گراف  $G$  عدد  $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$  یک کران پایین است برای  $\gamma(G)$ ؛ یعنی  $\gamma(G)$  نمی‌تواند از آن کمتر شود).

### کار در کلاس

۱ یک شبکه رایانه‌ای متشکل از ۱۶ رایانه را در نظر بگیرید که در آن هر رایانه، مطابق شکل ۹ به چند رایانه دیگر متصل است.



شکل ۹

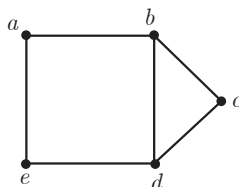
گراف شکل ۹ یک مدل‌سازی از شبکه مورد نظر است که در آن هر رأس نمایشگر یک رایانه است و یال بین دو رأس نمایانگر آن است که رایانه‌های نظیر به آن دو رأس مستقیماً با هم در ارتباط‌اند. می‌خواهیم مجموعه‌ای با کمترین تعداد ممکن از رایانه‌ها (رأس‌ها) انتخاب کنیم. به طوری که توسط این مجموعه از رایانه‌ها به تمام رایانه‌های این شبکه وصل باشیم. مجموعه انتخاب شده از رئوس برای گراف مورد نظر چه نوع مجموعه‌ای است؟

۲ با توجه به رابطه  $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \gamma(G)$ ، حداقل چند رأس برای احاطه کردن تمام رئوس این گراف لازم است؟ آیا می‌توانید مجموعه‌ای احاطه‌گر با این تعداد رأس مشخص نمایید؟

۳ گراف‌های  $P_1, P_2, P_3, C_4$  را رسم کنید و عدد احاطه‌گری هر یک را مشخص نمایید.

۴ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر  $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$  باشد.

۵ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر  $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$  نباشد.



G

شکل ۱۰

مثال : عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۰ را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.

حل : به سادگی می‌توان دید که مجموعه دو عضوی  $\{a, c\}$  یک مجموعه احاطه‌گر است.

بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف کوچک‌تر یا مساوی ۲ است؛ یعنی  $\gamma(G) \leq 2$ .

اما اگر  $\gamma(G) = 1$ ، یعنی یک رأس در گراف  $G$  وجود دارد که به تنهایی تمام رئوس دیگر را احاطه کرده است (به تمام رئوس دیگر وصل است) یعنی رأسی با درجه ۴ در گراف وجود دارد که با توجه به گراف  $G$  می‌بینیم که چنین رأسی وجود ندارد و لذا  $\gamma(G) > 1$ . بنابراین  $1 < \gamma(G) \leq 2$  و لذا  $\gamma(G) = 2$ .

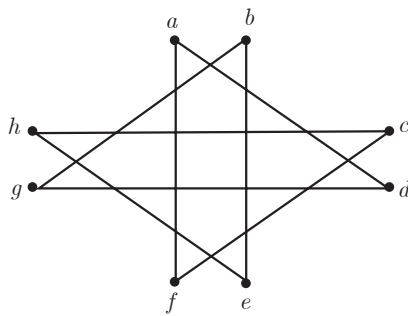
روش دیگر برای حل: نوع دیگری از استدلال به این صورت است که با توجه به کران پایین مطرح شده برای  $\gamma(G)$  و اینکه  $\Delta(G)=3$  داریم:

$$\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lfloor \frac{5}{4} \right\rfloor \leq \gamma(G)$$

بنابراین  $\gamma(G) \leq 2$  و با توجه به مجموعه احاطه گر دو عضوی ارائه شده در بالا داریم  $\gamma(G) = 2$  و لذا  $\gamma(G) = 2$ .

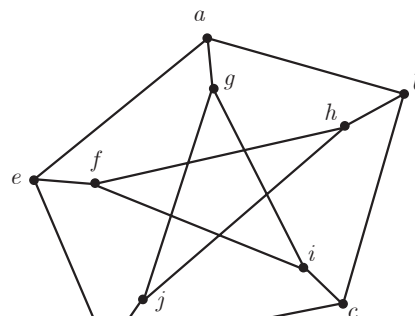
## کاور کلاس

- تمام  $\gamma$ -مجموعه‌های (مجموعه‌های احاطه گر مینیمم) گراف  $G$  در مثال قبل را بنویسید.
- عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص کنید.



H

(ب)



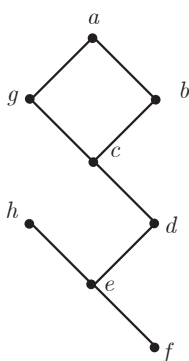
G

(الف)

شکل ۱۱

## فعالیت

- می‌خواهیم عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۲ را مشخص کنیم.



G

شکل ۱۲

الف) ابتدا می‌بینیم که با توجه به کران پایین  $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor = 2$  حداقل  $\gamma(G) \geq 2$  برای رأس  $a$  برای احاطه کردن رئوس لازم است اما در مراحل بعدی می‌بینیم که ۲ رأس برای احاطه تمام رئوس این گراف کافی نیست.

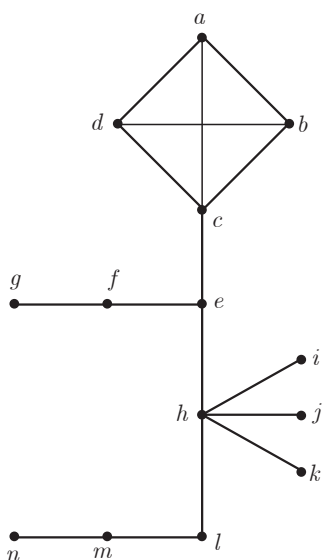
ب) برای احاطه کردن رأس  $h$  حداقل یکی از رئوس  $e$  یا  $h$  باید در مجموعه احاطه‌گر باشند و با بودن هر کدام از آنها در مجموعه احاطه‌گر، رئوس  $a, b, c, g$  کماکان احاطه نشده باقی می‌مانند.

پ) برای احاطه کردن رئوس  $a, b, c, g$  حداقل دو رأس دیگر نیاز هست، زیرا هیچ رأسی به تنهایی نمی‌تواند هر چهارتای آنها را احاطه کند.

ت) بنابراین حداقل ۳ رأس باید در هر مجموعه احاطه‌گر از گراف  $G$  باشد یعنی  $\gamma(G) \geq 3$ .

ث) از طرفی چون  $\{a, c, e\}$  یک مجموعه احاطه‌گر است،  $\gamma(G) \leq 3$ . پس  $\gamma(G) = 3$ .

۲ می‌خواهیم عدد احاطه‌گر گراف شکل ۱۳ را مشخص نماییم.



شکل ۱۳

الف) ابتدا کران پایین  $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$  را بررسی می‌کنیم که عدد  $\left\lfloor \frac{14}{6} \right\rfloor = 3$  را

می‌دهد. پس  $\gamma(G) \geq 3$ .

ب) اما حداقل یکی از رئوس  $a, b, c, d$  باید انتخاب شود. چرا؟

پ) حداقل یکی از رئوس  $f$  و  $g$  باید انتخاب شود. چرا؟

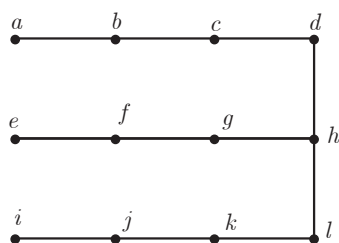
ت) حداقل یکی از رئوس  $i$  و  $h$  باید انتخاب شود. چرا؟

ث) حداقل یکی از رئوس  $m$  و  $n$  باید انتخاب شود. چرا؟

ج) بنابراین حداقل ۴ رأس در هر مجموعه احاطه‌گر باید باشد. لذا  $\gamma(G) \geq 4$  و

با توجه به اینکه  $\{c, f, h, m\}$  یک مجموعه احاطه‌گر است لذا  $\gamma(G) \leq 4$  بنابراین

$\gamma(G) = 4$ .



شکل ۱۴

مثال: عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۴ را به دست آورید و یک مجموعه احاطه‌گر

مینیم برای آن ارائه کنید.

حل: برای احاطه کردن رأس  $a$  لازم است یکی از دو رأس  $a$  و  $b$  در مجموعه

احاطه‌گر باشند. به همین صورت یکی از رئوس  $e$  و  $f$  و نیز یکی از رئوس  $i$  و  $j$

نیز باید در هر مجموعه احاطه‌گر باشند. اما این سه رأس انتخاب شده در هر حالت

نمی‌توانند رئوس  $l, h, d$  را احاطه کنند. لذا حداقل یک رأس دیگر یعنی حداقل ۴

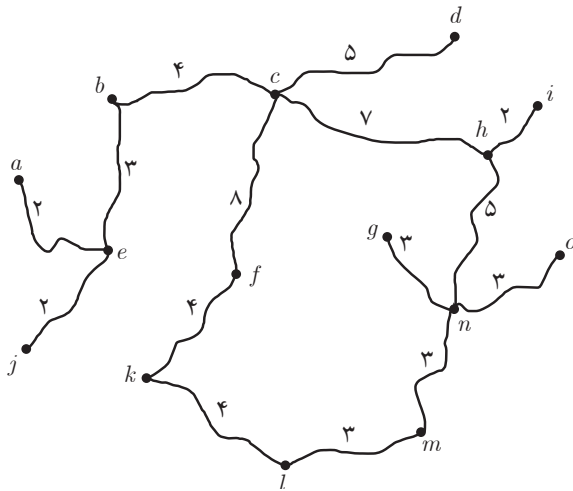
رأس برای احاطه رئوس این گراف لازم است: یعنی  $\gamma(G) \geq 4$  از طرفی  $\{b, f, j, h\}$

یک مجموعه احاطه‌گر است و لذا  $\gamma(G) \leq 4$ . بنابراین داریم  $\gamma(G) = 4$ .

۱ در مثال ایستگاه‌های رادیویی (دومین مثال این درس)

الف) تعداد و محل نصب ایستگاه‌ها را مشخص نمایید.

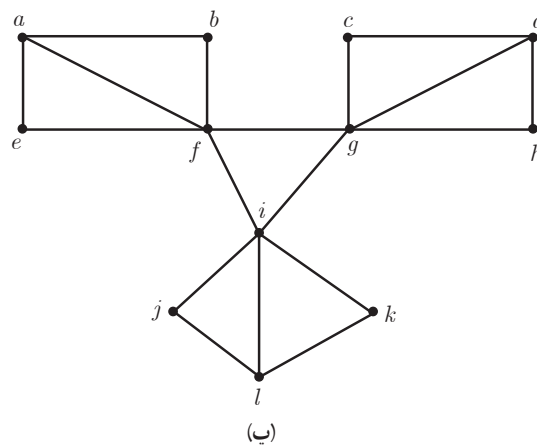
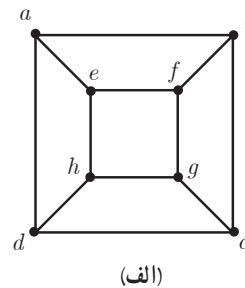
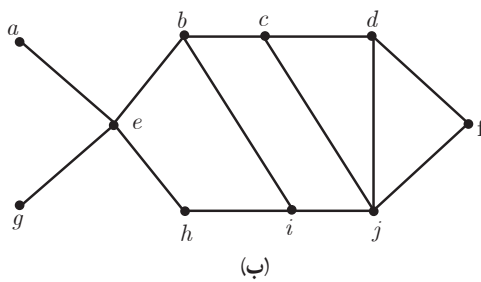
ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در شهر  $b$  احداث کنیم حداقل چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟



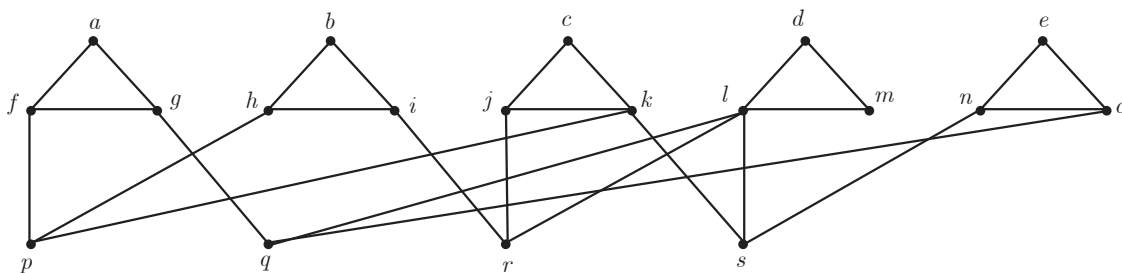
شکل ۱۵

۲ نقشه مقابل نقشه یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاهاست و مسافت جاده‌های بین روستاها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاها احداث کنیم به گونه‌ای که فاصله هر روستا تا نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا از  $۱۰$  کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشه فوق، مسئله مورد نظر را با یک گراف مناسب مدل‌سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان‌ها را مشخص کنید.

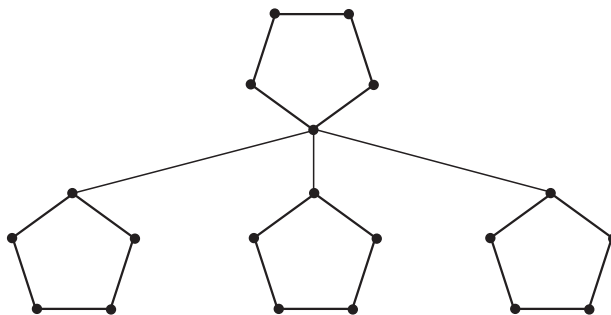
۳ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.







(ت)



(ث)

۴ اگر برای گراف  $G$  داشته باشیم  $\gamma(G) = 1$ ، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف  $G$  می‌توان پی برد؟  $\Delta(G)$  و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف  $G$  می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.

۵  $\gamma(P_n)$  و  $\gamma(C_n)$  را به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  مشخص کنید.

۶ اگر  $G$  یک گراف  $k$ -منتظم  $n$  رأسی باشد نشان دهید  $\left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor \leq \gamma(G)$

۷ یک گراف  $2$ -منتظم  $12$  رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

۸ الف) یک گراف  $6$  رأسی که  $\gamma$ -مجموعه آن با اندازه یک باشد رسم کنید.

ب) یک گراف  $6$  رأسی که  $\gamma$ -مجموعه آن با اندازه دو باشد رسم کنید.

پ) فرض کنید  $n$  و  $k$  دو عدد طبیعی باشند و  $k \leq \frac{n}{4}$ . روشی برای رسم یک گراف  $n$  رأسی که عدد احاطه‌گری آن  $k$  باشد، ارائه دهید.

۹ الف) یک گراف  $6$  رأسی با عدد احاطه‌گری  $2$  رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه  $2$  داشته باشد.

ب) یک گراف  $6$  رأسی با عدد احاطه‌گری  $2$  رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه  $2$  داشته باشد.

۱۰ برای هر  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \geq 4$ ) دلخواه توضیح دهید که

الف) چگونه می‌توانید یک گراف  $n$  رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

ب) چگونه می‌توانید یک گراف  $n$  رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

۱۱ گراف  $P_{12}$  را رسم کنید.

الف) یک  $\gamma$  - مجموعه از آن را مشخص نمایید.

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال  $\epsilon$  عضوی از آن را مشخص نمایید.



## ترکیبیات (شمارش)

۳

۱ مباحثی در ترکیبیات

۲ روش‌هایی برای شمارش

مسائل ترکیبیات در بخش‌های زیادی از ریاضیات مانند جبر، نظریه احتمالات و هندسه به وجود می‌آیند. ترکیبیات در علوم رایانه، بهینه‌سازی، فیزیک آماری و... کاربردهای فراوان دارد. ساختارهای ترکیبیاتی یکی از مهم‌ترین مباحث ترکیبیات است. مربع‌های لاتین یکی از ساختارهای مهم ترکیبیاتی‌اند و دارای کاربردهای بسیاری هستند. یکی از کاربردهای مربع‌های لاتین در مبحث رمزنگاری است.



## یادآوری و تکمیل

در سال‌های قبل با ابزارهایی همچون اصل جمع و اصل ضرب برای شمارش آشنا شده و با بعضی از تکنیک‌ها و روش‌های شمارش مانند تبدیل  $r^1$  شیء از  $n$  شیء (انتخاب  $r$  شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم باشد) و ترکیب  $r^2$  شیء از  $n$  شیء (انتخاب  $r$  شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم نباشد) نیز آشنایی داشته و از آنها در حل مسائل شمارشی استفاده کرده‌اید.

گاهی اوقات برای شمارش در حالت‌های خاص باید از روش‌هایی همچون دسته‌بندی اشیا یا تقسیم کل جایگشت‌های ممکن بر تعداد حالت‌هایی که تکراری یا بی‌اثر محسوب می‌شوند، استفاده کنیم. در این درس با توجه به طرح و حل مثال‌هایی، شما با این روش‌ها آشنا خواهید شد.

مثال: فرض کنید می‌خواهیم با سه حرف «ج»، «پ» و «ز» و ارقام ۲، ۳، ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است:

الف) تعداد کل رمزهایی که می‌توان تشکیل داد.

ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند.

پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند.

ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

حل:

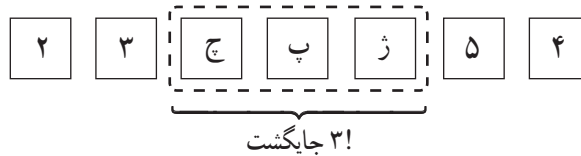
الف) ۳ حرف و ۴ رقم روی هم ۷ شیء متمایز بوده و به  $7!$  طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند و رمز تولید کنند.

ب) کافی است ابتدا سه حرف را با هم یک شیء در نظر بگیریم و آنها را با ۴ رقم داده شده روی هم ۵ شیء فرض کنیم. در این صورت  $5!$  جایگشت دارند؛ در هر جایگشت، سه حرف داده شده در عین

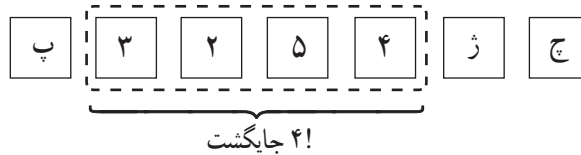
$$۱- (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$۲- \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

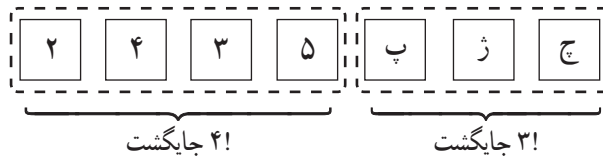
حال که کنار هم هستند ۳! جایگشت دارند و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل رمزهای مورد نظر برابر است با  $5! \times 3!$



پ) مشابه قسمت (ب) ابتدا ۴ رقم داده شده را یک شیء فرض می‌کنیم که با ۳ حرف مفروض روی هم ۴ شیء بوده و ۴! جایگشت داشته و در هر جایگشت ۴ رقم داده شده هم ۴! در کنار هم جایگشت دارند، لذا تعداد رمز مورد نظر، طبق اصل ضرب عبارت است از  $4! \times 4!$



ت) حروف را یک شیء و ارقام را نیز با هم یک شیء فرض می‌کنیم که روی هم دو شیء شده و ۳! حروف در کنار هم و ۴! نیز ارقام کنار هم جایگشت دارند که طبق اصل ضرب تعداد رمزهای مورد نظر عبارت است از  $2! \times 3! \times 4!$



ما برای حل این مثال از دسته‌بندی اشیا استفاده کردیم. حال مسئله‌ای را طرح و حل می‌کنیم ولی هیچ توضیحی برای حل آن نمی‌دهیم تا شما خودتان راه حل این مسئله را توضیح دهید.

مثال: ۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۴ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم (در یک ردیف) قرار بگیرند اگر بخواهیم:

الف) همواره دانش‌آموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب) به صورت یک‌درمیان قرار بگیرند (هیچ دو دانش‌آموز هم پایه کنار هم نباشند).

پ) اگر دانش‌آموزان پایه یازدهم نیز ۵ نفر باشند، به چند طریق می‌توان آنها را به صورت یک‌درمیان قرار داد؟

الف)  $2! \times 4! \times 5!$

ب)  $5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 5! \times 4!$

پ)  $(5! \times 5!) \times 2$

## جایگشت‌های با تکرار

گاهی اوقات چند شیء تکراری یا یکسان در بین اشیا یافت می‌شود. در این حالت تعداد جایگشت‌های این اشیا با تعداد جایگشت‌ها در حالتی که هیچ دو شیء یکسانی در بین اشیا نباشد، متفاوت بوده و به نظر می‌رسد کمتر باشد. به عنوان مثال تعداد جایگشت‌های سه حرف  $a$ ،  $b$  و  $c$  برابر با  $3! = 6$  است ولی تعداد جایگشت‌های سه حرف  $a$  و  $a$  و  $b$  برابر با  $3$  است ( $baa$ ,  $aba$ ,  $aab$ ) در واقع چون جابه‌جایی دو حرف  $a$  حالت جدیدی تولید نمی‌کند و حالت تکراری به حساب می‌آید پس در واقع می‌بایست تعداد کل جایگشت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که دو حرف تکراری می‌توانند جابه‌جا شوند یعنی  $2!$  تقسیم کنیم، پس پاسخ این سؤال  $3 = \frac{3!}{2!}$  است.

چون دو حرف  $a$  به  $2!$  طریق می‌توانند با هم جابه‌جا شوند و این تعداد جابه‌جایی به صورت ضربی در  $3!$  محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، پس باید با تقسیم  $3!$  بر  $2!$  از عملیات ضربی خارج شود.

### کار در کلاس

محاسبه کنید با ارقام  $1$ ،  $1$ ،  $2$  و  $1$  چند رمز چهار رقمی می‌توان نوشت؟  
اگر  $4$  رقم متمایز بودند جواب این سؤال  $4!$  بود ولی چون در این  $4!$  و به صورت ضربی،  $3!$  حالت ممکن برای یک‌ها محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، لذا کافی است برای رسیدن به جواب، تعداد کل حالت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که رمز  $4$  رقمی جدید تولید نمی‌شود تقسیم کنیم یعنی پاسخ،  $\dots = \frac{4!}{\dots}$  است.

اعداد  $4$  رقمی ممکن  
 $1112, 1121, 1211, 2111$   
۴ رمز ممکن

تذکر: هرگاه  $n$  شیء مفروض باشند و در بین آنها  $k$  شیء تکراری یا مشابه وجود داشته باشد، برای محاسبه تعداد جایگشت‌های این  $n$  شیء ابتدا آنها را متمایز فرض کرده و جایگشت‌های آنها را حساب می‌کنیم و سپس حاصل را بر جایگشت‌های اشیا تکراری (به دلیل ورود در محاسبات به صورت ضربی) تقسیم می‌کنیم؛ یعنی این تعداد برابر است با:  $\frac{n!}{k!}$ .

با همین استدلال می‌توان قضیه زیر را، که به آن قضیه جایگشت با تکرار می‌گوییم، بیان کرد:  
قضیه جایگشت با تکرار: اگر  $n$  شیء مفروض باشند، به طوری که  $n_1$  تای آنها از نوع اول و یکسان و  $n_2$  تای آنها از نوع دوم و یکسان و ... و  $n_k$  تای آنها از نوع  $k$ ام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

مثال: با ارقام  $5$ ،  $4$ ،  $4$ ،  $2$ ،  $3$ ،  $2$ ،  $2$ ،  $1$  و  $1$  چند عدد  $9$  رقمی می‌توان نوشت؟

حل: طبق قضیه جایگشت با تکرار

$$\frac{9!}{2! \times 3! \times 2!}$$

تعداد چهارها → ← تعداد یک‌ها  
تعداد دوها

مثال: ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟  
 حل: کل جایگشت‌های ۹ نفر عبارت از ۹! است که چون دو نفری که در اتاق دو نفره هستند با جابه‌جایی آنها مجدداً همان دو نفر در همان اتاق بوده و حالت جدیدی تولید نمی‌شود و نیز جابه‌جایی سه نفر و چهار نفر در اتاق‌های سه نفره و چهار نفره حالت جدیدی تولید نمی‌کند و تعداد این جایگشت‌های بی‌اثر برای دو نفر، سه نفر و چهار نفر به ترتیب ۲!، ۳! و ۴! است، پس پاسخ این سؤال طبق قضیه برابر است با  $\frac{9!}{2! \times 3! \times 4!}$ . این مثال به روشی دیگر و با استفاده از ترکیب برای انتخاب افراد (جابه‌جایی افراد انتخاب شده برای اتاق‌ها مهم نیست):

$$\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{4} = \frac{9!}{2! \times 7!} \times \frac{7!}{3! \times 4!} \times 1 = \frac{9!}{2! \times 3! \times 4!}$$

انتخاب سه نفر از ۷ نفر باقی‌مانده برای اتاق سه‌نفره  
 انتخاب دو نفر برای اتاق دو نفره

## فعالیت

شخصی وارد یک گل‌فروشی می‌شود و می‌خواهد دسته‌گلی شامل سه شاخه گل، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک، انتخاب کند. (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است)  
**۱** هر سطر جدول زیر یک انتخاب را نمایش می‌دهد، شما این جدول را کامل کنید.



دسته گل انتخابی	مریم	رُز	میخک
۱ یک شاخه گل مریم، یک شاخه گل رُز و یک شاخه گل میخک	*	*	*
۲ دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل مریم	*		**
۳ سه شاخه گل رُز	...	***	...
۴ .....	...	**	*
۵ .....	***	...	...
۶ .....	**	...	*
۷ دو شاخه گل مریم و یک شاخه گل رُز	...	...	...
۸ سه شاخه گل میخک	...	...	...
۹ دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل رُز	...	...	...
۱۰ .....	...	...	...

همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای جدا کردن سه نوع گل از دو خط عمودی و برای مشخص کردن تعداد انتخاب‌ها از هر نوع گل از \* استفاده شده است.



۲ آیا در هر حالت از حالت های ۱ تا ۱۰ جابه جایی ستاره ها با هم دسته گل جدیدی تولید می کند؟ جابه جایی دو خط عمودی با هم چگونه؟

۳ با توجه به قضیه جایگشت با تکرار تعداد کل جایگشت های این ۵ شیء (۳ ستاره و ۲ خط عمودی) را به دست آورید.

$$\text{تعداد کل جایگشت ها} = \frac{5!}{\dots \times \dots} = \binom{5}{2} = \binom{3+2}{2}$$

۴ این مسئله را در حالت کلی و برای انتخاب دلخواه  $n$  شاخه گل از بین  $k$  نوع گل بررسی کنید.

$n$  = تعداد ستاره ها = تعداد شاخه گل های انتخابی

..... = تعداد خط های عمودی برای جدا کردن  $k$  نوع گل

..... = تعداد کل اشیا (شامل ستاره ها و خط های عمودی)

$$\text{تعداد کل جایگشت ها} = \frac{[n + (k-1)]!}{n! \times \dots} = \binom{n + (k-1)}{k-1}$$

..... ← جابه جایی ستاره ها با هم، دسته گل جدیدی تولید نمی کند.

مثال: به چند طریق می توان از بین ۴ نوع گل، دسته گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟  
حل:

$$\begin{matrix} \text{انواع گل} = k = 4 \\ \text{تعداد شاخه گل انتخابی به دلخواه} = n = 8 \end{matrix} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3! \times 8!}$$

مثال: به چند طریق می توان دسته گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد، به شرط آنکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟

حل: ابتدا ۱ شاخه (به اجبار) از هر نوع گل برمی داریم.  $9-4=5$  شاخه گل باقی مانده را به دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می کنیم:

$$k = 4 \Rightarrow \text{تعداد حالت های مطلوب} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8}{3} \leftarrow n = 9 - 4 = 5 \text{ تعداد انتخاب های دلخواه}$$

## فعالیت

می خواهیم تعداد انتخاب های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل را مشخص کنیم. اگر فرض کنیم  $x_1$  تعداد انتخاب ها از گل نوع اول و  $x_2$  تعداد انتخاب ها از گل نوع دوم و  $x_3$  تعداد ..... باشد، در این صورت می بایست جمع انتخاب ها از سه نوع گل، برابر با ۷ باشد یعنی  $x_1 + x_2 + \dots = 7$  با توجه به اینکه هر جواب صحیح و نامنفی این معادله نشان دهنده یک انتخاب هفت تایی از سه نوع گل بوده و برعکس هر انتخاب هفت تایی از این سه نوع گل یک جواب صحیح و نامنفی برای این معادله است جدول صفحه بعد را کامل کرده و سپس تعداد جواب های معادله را به دست آورید.



تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول $x_1$	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم $x_2$	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع سوم $x_3$	$x_1 + x_2 + x_3 = 7$
۱	۰	۶	$1 + 0 + 6 = 7$
۱	۱	۵	$1 + 1 + 5 = 7$
...	...	...	$4 + 2 + 1 = 7$
...	۷	...	.....
...	۴	۲	.....
...	...	...	.....

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = 7$  برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{\dots}{\dots} = \dots, \text{ یعنی، گل}$$

با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت:

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه  $n$  شاخه گل از بین  $k$

$$\text{نوع گل یعنی برابر است با } \binom{n+k-1}{k-1}.$$

### کار در کلاس

۱ معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = 7$  چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

(راهنمایی: مثال را ملاحظه کنید، از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود.)

۲ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  برابر است با  $\binom{n-1}{k-1}$ .

(راهنمایی: ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برداشته و لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه به  $(n - k)$  تقلیل می‌یابد و...)

۳ معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه  $x_1 > 1$  و  $x_3 > 3$  باشد؟

۴ معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$  چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ ( $x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$ )

۵ معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$  چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه  $x_3 = 4$  و  $x_5 > 2$  باشد؟

۱- طرح سؤال‌هایی برای معادلات ستیاله که شرط‌هایی برای  $x_i$ ها به صورت  $a \leq x_i \leq b$  در آن لحاظ شده باشد در امتحانات و ارزشیابی‌ها جایز نیست.

## مربع‌های لاتین

سه مدرس به نام‌های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند در یک روز در سه جلسه ۸-۱۰، ۱۰-۱۲ و ۲-۴ در سه کلاس  $A$ ،  $B$  و  $C$  تدریس کنند. هر کلاس سه جلسه درسی خواهد داشت و هر مدرس در هر یک از کلاس‌ها دقیقاً یک بار باید تدریس کند. نام مدرس‌ها را در جدول مقابل به گونه‌ای وارد کنید که شرایط خواسته شده محقق گردد.

جلسات کلاس‌ها	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۲-۴
$A$			
$B$			
$C$			

### فعالیت

۱ به جای نام سه مدرس مذکور به ترتیب اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهید و یک جدول  $3 \times 3$  از اعداد به دست آورید.


۲ موارد معادل در دو ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

- |  |   |
|--|---|
| (الف) در هیچ سطری عدد تکراری نداریم.         | (a) هیچ مدرسی در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است. |
| (ب) در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم.          | (b) هر یک از مدرسین در تمام کلاس‌ها تدریس داشته است.        |
| (پ) هر یک از اعداد در تمام سطرها آمده است.   | (c) هیچ مدرسی در یک کلاس دوبار تدریس نکرده است.             |
| (ت) هر یک از اعداد در تمام ستون‌ها آمده است. | (d) هر یک از مدرسین در هر یک از جلسه‌ها تدریس داشته است.    |

**تعریف:** یک جدول مربعی از اعداد ۱، ۲، ... و  $n$  به شکل یک مربع  $n \times n$  را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، ... و  $n$  پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین<sup>۱</sup>» می‌نامیم. (به هر یک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.)

۱- اوپلر برای نام‌گذاری این مربع‌ها از حروف لاتین استفاده می‌کرد، به همین دلیل این مربع‌ها به نام مربع‌های لاتین معروف شده‌اند.

مثال: دو مربع لاتین  $3 \times 3$  و دو مربع لاتین  $4 \times 4$  در زیر نمایش داده شده است.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

### کار در کلاس

۱ دو مربع لاتین  $5 \times 5$  بنویسید.

۲ با استدلال کلامی بگویید که چرا با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است؟

۳ شکل زیر یک مربع لاتین  $n \times n$  است که به آن «مربع لاتین چرخشی» می‌گوییم. مربع لاتین بودن آن را چگونه توجیه می‌کنید؟

۱	۲	۳	...	...	...	$n-1$	$n$
$n$	۱	۲	۳	...	...	$n-2$	$n-1$
$n-1$	$n$	۱	۲	۳	...	$n-3$	$n-2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۳	۴	۵				۱	۲
۲	۳	۴	...	...	...	$n$	۱

با توجه به آنچه در کار در کلاس دیدیم برای هر عدد طبیعی مانند  $n$ ، مربع لاتین  $n \times n$  وجود دارد. حال فرض کنیم یک مربع لاتین مانند شکل زیر داریم و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱، ۲، ۳، ...،  $n$  یک مربع جدید به دست آورده ایم. خواهیم دید که مربع به دست آمده نیز یک مربع لاتین خواهد بود، زیرا در غیر این صورت در سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود خواهد داشت که این موضوع با توجه به خواص جایگشت ایجاب می کند که در سطر یا ستونی از مربع اول نیز عضو تکراری وجود داشته باشد و این با مربع لاتین بودن آن در تناقض است.

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

$1 \rightarrow 3$   
 $2 \rightarrow 2$   
 $3 \rightarrow 4$   
 $4 \rightarrow 1$

۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳

با جایگزینی اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۴ از جدول اول به ترتیب با اعداد ۳، ۲، ۴، ۱ و ۱ جدول دوم حاصل شده است.

## کار در کلاس

برای هر یک از مربع های لاتین زیر یک جایگشت مشخص نمایید. سپس برای هر یک از جایگشت ها از روی مربع لاتین داده شده یک مربع لاتین به دست آورید.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

۱	۳	۵	۴	۲
۵	۴	۲	۱	۳
۲	۱	۳	۵	۴
۳	۵	۴	۲	۱
۴	۲	۱	۳	۵

## دو مربع لاتین متعامد

**تعریف:** فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مربع لاتین هم مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم های سمت چپ مربوط به مربع  $A$  و تمام رقم های سمت راست مربوط به مربع  $B$  (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین  $A$  و  $B$  «متعامدند» هرگاه هیچ یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه های مربع جدید تکرار نشده باشند.

به طور مثال برای دو مربع  $A$  و  $B$  به صورت زیر داریم :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 22 & 33 & 44 & 11 \\ 34 & 21 & 12 & 43 \\ 41 & 14 & 23 & 32 \\ 13 & 42 & 31 & 24 \end{bmatrix}$$

یک محک برای تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین بدین صورت است که برای متعامد بودن باید هر دو جایگاه (درايه) در یکی از مربع ها که اعداد یکسانی دارند، جایگاه های (درايه های) نظیر به آنها از مربع دیگر اعداد متمایزی داشته باشند. این محک معمولاً زمانی که می خواهیم نشان دهیم دو مربع لاتین متعامد نیستند به کار می رود. به این صورت که کافی است در یکی از دو مربع دو درایه یکسان پیدا کنیم به طوری که در جایگاه های نظیر به این دو درایه در مربع دیگر نیز درایه های یکسان (یکسان با هم و نه لزوماً یکسان با درایه های مربع اول) وجود داشته باشد.

به طور مثال در شکل زیر اگر در مربع لاتین  $A$  دو عدد یکسان (مانند  $a$  در شکل) به گونه ای بیابیم که در جایگاه های متناظر با آنها در مربع لاتین  $B$  (جایگاه های هاشور خورده) نیز اعداد یکسانی باشند، مثلاً خانه های هاشور خورده هر دو حاوی عدد  $b$  باشند در این صورت دو مربع  $A$  و  $B$  متعامد نیستند.

$$A = \begin{bmatrix} & & & & \\ & a & & & \\ & & & & \\ & & & & a \\ & & & & \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} & & & & \\ & \text{hatched} & & & \\ & & & & \\ & & & & \text{hatched} \\ & & & & \end{bmatrix}$$

مثال : در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{(ب)} & & \text{(الف)} & \end{matrix}$$

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

(ب)

حل: الف) مربع حاصل از کنار هم قرار دادن درایه‌های دو مربع داده شده به صورت مقابل است و چون عدد دو رقمی تکراری در آن نیست لذا دو ماتریس داده شده متعامدند.

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

ب) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون اول و جایگاه سطر دوم ستون دوم در مربع اول درایه‌های یکسان (هر دو عدد یک هستند) دارند و دو مربع دوم نیز درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۳ هستند) دارند.

۱		
	۱	

۳		
	۳	

ب) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون دوم و جایگاه سطر چهارم ستون اول در مربع اول درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۲ هستند) دارند و در مربع دوم نیز درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۲ هستند) دارند.

	۲		
۲			

	۲		
۲			

### کار در کلاس

۱ چند مربع لاتین  $۱ \times ۱$  وجود دارد؟

۲ آیا دو مربع لاتین  $۲ \times ۲$  متعامد وجود دارد؟

۳ بررسی کنید که آیا دو مربع لاتین  $۳ \times ۳$  روبه‌رو متعامدند؟

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۴ آیا دو مربع لاتین  $4 \times 4$  زیر متعامدند؟

$A =$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr><tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr></table>	۳	۴	۱	۲	۴	۳	۲	۱	۱	۲	۳	۴	۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲														
۴	۳	۲	۱														
۱	۲	۳	۴														
۲	۱	۴	۳														

$B =$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr><tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr><tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr></table>	۳	۴	۱	۲	۱	۲	۳	۴	۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲														
۱	۲	۳	۴														
۲	۱	۴	۳														
۴	۳	۲	۱														

دیدیم که برای  $n = 1$  و  $2$ ، دو مربع لاتین متعامد  $n \times n$  وجود ندارد. ثابت شده است<sup>۱</sup> که اگر  $6$  و  $2$  و  $1 \neq n$ ، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه  $n$  وجود دارد و برای  $6$  و  $2$  و  $1 \neq n$  دو مربع لاتین متعامد از مرتبه  $n$  وجود ندارد.

۵ با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای  $B$ ، مربع لاتین جدیدی به دست آورید و آن را  $B'$  بنامید. بررسی کنید که آیا  $A$  و  $B'$  متعامدند؟

$B' =$


### خواندنی

اوایل<sup>۲</sup> در سال ۱۷۸۲ ادعا کرد که برای تمام اعداد طبیعی  $n$  به صورت  $n = 4k + 2$ ، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه  $n$  وجود ندارد. در واقع اوایلر پس از بررسی‌های زیاد بر روی وجود دو مربع لاتین متعامد از مرتبه  $6$  و به نتیجه نرسیدن در این باره، حدس فوق را مطرح نمود. این مسئله تا سال ۱۹۰۰ حل نشده باقی ماند تا در این سال یک افسر فرانسوی به نام تاری<sup>۳</sup> ثابت کرد که ادعای اوایلر برای  $n = 6$  درست است. تا سال ۱۹۵۹ برای  $n = 10$  و اعداد بزرگ‌تر کسی جواب را نمی‌دانست. در سال ۱۹۶۰ یک ریاضی‌دان آمریکایی به نام پارکر<sup>۴</sup> و دو ریاضی‌دان هندی به نام‌های بوس<sup>۵</sup> و شریخانده<sup>۶</sup> ثابت کردند که حدس اوایلر به جز برای حالت  $n = 6$  برای سایر  $n = 4k + 2$  درست نیست؛ یعنی برای هر عدد  $6$  و  $2$  و  $1 \neq n$  حداقل دو مربع لاتین متعامد از مرتبه  $n$  وجود دارد.

۱- اثبات این مطلب در این کتاب مد نظر نیست.

۲- Euler

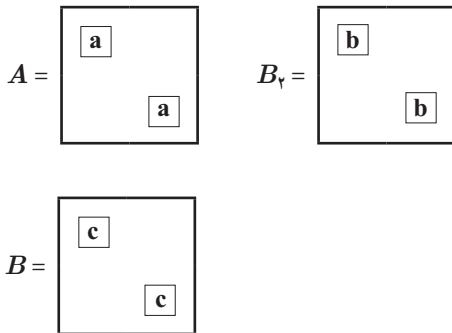
۳- Tarry

۴- Parker

۵- Bose

۶- Shrikhande

مثال: نشان دهید اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها به دست می‌آید نیز با مربع لاتین دیگر متعامد است؛ به عبارتی اگر  $A$  و  $B$  دو مربع لاتین متعامد باشند و  $B_p$  مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت بر اعضای  $B$  باشد، آنگاه  $A$  و  $B_p$  نیز متعامدند.



حل: فرض کنیم  $A$  و  $B_p$  متعامد نباشند. لذا دو جایگاه در مربع  $A$  وجود دارد که اعداد یکسانی (مثلاً  $a$ ) در آنها قرار دارد و در جایگاه‌های نظیر آنها در مربع  $B_p$  نیز دو درایه یکسان (مثلاً  $b$ ) قرار دارند.

حال با توجه به تعریف جایگشت در همین دو جایگاه در مربع  $B$  نیز باید دو درایه یکسان مانند  $c$  باشد که در  $B_p$  با اعمال جایگشت به درایه  $b$  تبدیل شده‌اند و در این صورت دو مربع  $A$  و  $B$  نیز متعامد نخواهند بود و این با فرض مسئله در تناقض است. لذا  $A$  و  $B_p$  هم نمی‌توانند متعامد نباشند.

مثال: قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخ‌ریسی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$W_5$
شنبه	۱	۴	۲	۵	۳
یکشنبه	۴	۲	۵	۳	۱
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۵	۳	۱	۴	۲
چهارشنبه	۳	۱	۴	۲	۵

= A

	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$W_5$
شنبه	۳	۱	۴	۲	۵
یکشنبه	۵	۳	۱	۴	۲
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۴	۲	۵	۳	۱
چهارشنبه	۱	۴	۲	۵	۳

= B

الف) ابتدا فرض کنید بخواهیم برای کار ۵ کارگر با ۵ ماشین ریسندگی در ۵ روز هفته به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر در هر روز با یک ماشین ریسندگی و در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک بار کار کرده باشد. برای حل این مسئله می‌توانیم از یک مربع لاتین  $5 \times 5$  استفاده کنیم. فرض کنید هر **ستون** نشان‌دهنده یک **کارگر** و هر **سطر** نشان‌دهنده یک **روز هفته** و هر کدام از **اعداد ۱ و ۲ و ... و ۵** که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند نمایانگر یکی از **ماشین‌های ریسندگی** باشند. بنابراین مثلاً در روز دوشنبه کارگر  $W_1$  با ماشین ریسندگی شماره ۲ کار می‌کند.

ب) حال فرض کنید که در مسئله مطرح شده در قسمت الف) ۵ نوع الیاف مختلف هم وجود داشته باشد و بخواهیم به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر از هر نوع الیاف هم دقیقاً یک بار استفاده کند.

برای این کار مانند قسمت الف) یک مربع لاتین می‌کشیم و هر **ستون** را نشان‌دهنده یک **کارگر** و هر **سطر** را نشان‌دهنده یک **روز هفته** و هر کدام از **اعداد ۱ و ۲ و ... و ۵** را که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند



نمایانگر یکی از انواع **الیاف** در نظر می‌گیریم. با توجه به مربع لاتین، مثلاً در روز سه‌شنبه کارگر شماره ۴ با الیاف شماره ۳ کار می‌کند.

پ) حال اگر درایه‌های نظیر از دو مربع  $A$  و  $B$  را در کنار هم در یک مربع جدید قرار دهیم یک مربع  $5 \times 5$  به شکل زیر خواهیم داشت و می‌توانیم تمام اطلاعات فوق را از همین مربع استخراج کنیم. به‌طور مثال کارگر شماره ۴ در روز یکشنبه با ماشین شماره ۳ و الیاف شماره ۴ کار می‌کند. تا اینجا برنامه‌ریزی ما با استفاده از دو مربع لاتین انجام شده است، اما دو مربع لاتین  $A$  و  $B$  متعامد هم هستند و این ویژگی آنها تا اینجا به کار نیامده است. می‌دانیم که متعامد بودن دو مربع  $A$  و  $B$  به این معناست که مربع دو رنگ حاصل، در هیچ خانه‌ای عدد دو رقمی تکراری ندارد. از آنجا که اعداد سمت چپ شماره ماشین ریسندگی و اعداد سمت راست شماره الیاف مورد استفاده هستند لذا در صورتی که دو مربع استفاده شده متعامد باشند هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته است.

	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$W_5$
شنبه	۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
یکشنبه	۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
دوشنبه	۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
سه‌شنبه	۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
چهارشنبه	۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

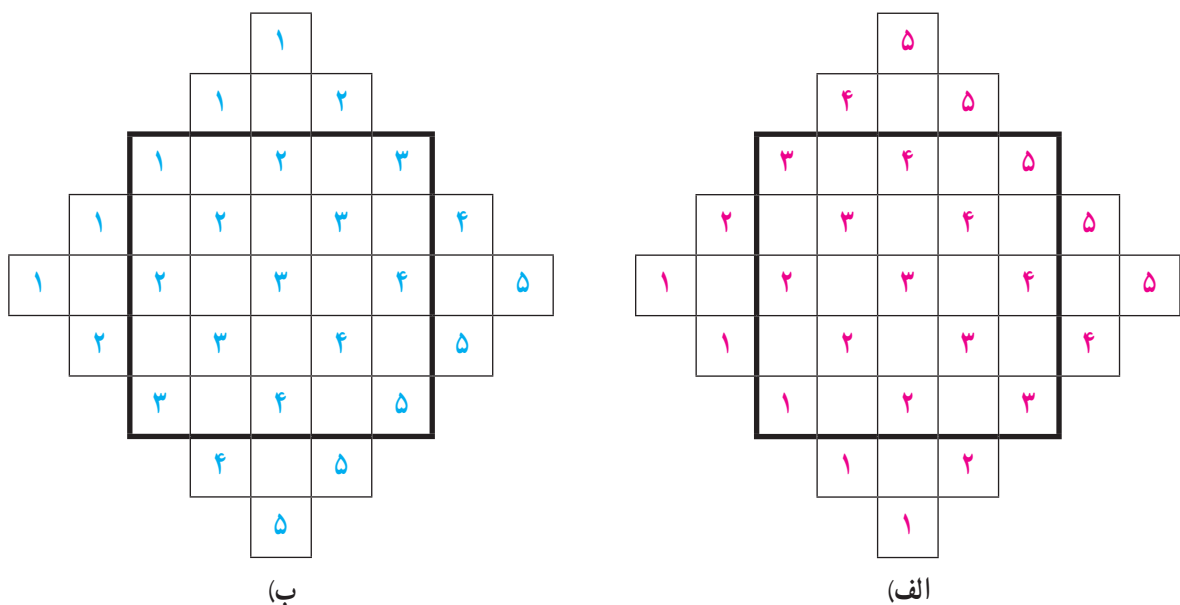
## کار در کلاس

- در قسمت (الف) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک بار کار کرده است؟
- در قسمت (ب) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر با هر یک از الیافها دقیقاً یک بار کار می‌کند.
- در قسمت (پ) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر یک از الیافها در هر یک از ماشین‌های ریسندگی دقیقاً یک بار به کار گرفته شده است؟
- اگر سه برادر تقریباً هم‌سن و سال در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به‌گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

## یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه یک عدد فرد<sup>۱</sup>

با انجام مراحل زیر می‌توانید دو مربع لاتین  $5 \times 5$  متعامد به دست آورید.

۱ اعداد ۱، ۲، ... و ۵ با نظمی خاص (به نحوه چینش اعداد دقت کنید) در دو شکل (الف) و (ب) چیده شده‌اند.



۲ حال مربع‌های پرننگ  $5 \times 5$  وسط را در نظر بگیرید و با انتقال اعداد خارج از این مربع‌ها به داخل آنها با روش زیر، مربع‌ها را پر کرده، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۵ به دست آورید.

الف) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در سمت چپ آن واقع است را ۵ خانه به سمت راست انتقال دهید.

ب) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در سمت راست آن واقع است را ۵ خانه به سمت چپ انتقال دهید.

پ) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در بالای مربع واقع است را ۵ خانه به پایین انتقال دهید.

ت) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در پایین مربع واقع است را ۵ خانه به بالا انتقال دهید.

۳ با روشی کاملاً مشابه آنچه دیدید برای هر  $n$  فرد می‌توانید دو مربع لاتین متعامد از مرتبه  $n$  به دست آورید.

۱- از آنجا که روش ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه غیرفرد چندان ساده نیست، لذا در این کتاب به آن پرداخته نمی‌شود.

۱ می‌خواهیم ۸ نفر را که دوه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرفِ طولِ یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۲ اگر داشته باشیم  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از  $A$  و سه رقم از  $B$  باشد؟

۳ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان‌پذیر است؟ اگر:

الف) هیچ محدودیتی نباشد؛

ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

۴ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایه‌دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه‌یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن  $7! \times 4!$  باشد.

۵ با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می‌توان نوشت؟

۶ می‌خواهیم روی تعدادی جعبه‌های حاوی اجناس تولید شده‌ی خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرف  $a, a, b, a, c, c, d, d, d$ ، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

۷ ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه‌نفره قرار بگیرند؟

۸ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:  
الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

۹ مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده شده:

الف)  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 1$  ،  $x_i > 0$  ،  $2 \leq i \leq 5$

ب)  $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$  ،  $x_1 > 2$  ،  $x_5 \geq 4$

پ)  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$  ،  $x_i \geq 1$  ،  $1 \leq i \leq 5$

ت)  $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7$  ،  $x_i \geq 0$  ،  $1 \leq i \leq 4$

ث)  $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3$  ،  $x_i \geq 0$  ،  $1 \leq i \leq 4$

۱۰ به چند طریق می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

۱۱ به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

۱۲ آیا مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می‌تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

۱۳ مربع لاتین  $3 \times 3$  مقابل را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

الف) سطر دوم و سوم مربع  $A$  را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را  $A_1$  بنامید. آیا  $A_1$  و  $A$  متعامدند؟

ب) ابتدا سطر اول و سطر سوم مربع  $A$  را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را  $A_2$  بنامید. آیا  $A_2$  و  $A$  متعامدند؟

پ) با توجه به قسمت‌های الف) و ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

۱- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۲- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۱۴ قرار است شش مدرس  $T_1, T_2, \dots$  و  $T_6$  در شش جلسه متوالی در شش کلاس  $C_1, C_2, \dots$  و  $C_6$  به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

۱۵ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۷ بنویسید.

۱۶ در یک مسابقه اتومبیل‌رانی قرار است ۷ راننده در هفت روز هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛

ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛

پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛

ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.

— برای این منظور یک برنامه‌ریزی انجام دهید.

## اصل شمول و عدم شمول

واضح است که برای محاسبه تعداد اعضای  $(A \cup B)$  یعنی  $|A \cup B|$  چون اعضای  $(A \cap B)$  هم در  $A$  و هم در  $B$  هستند، اگر اعضای  $A$  و  $B$  را روی هم حساب کنیم اعضای  $(A \cap B)$  دو بار محاسبه شده‌اند و می‌بایست یک‌بار از این مجموع کم شود و لذا خواهیم داشت:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

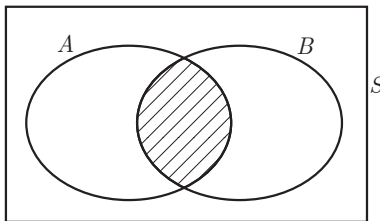
این تساوی به اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه معروف است. (برای اختصار آن را اصل شمول می‌نامیم).

با توجه به تعریف متمم اگر  $S$  مجموعه مرجع  $A$  و  $B$  باشد، داریم:

$$|(A \cup B)'| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

این تساوی نتیجه اصل شمول است.

نتیجه مهم: اگر  $S$  مجموعه‌ای متناهی و  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌های  $S$  باشند، در این صورت تعداد اعضای  $S$  که در هیچ یک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  قرار ندارند برابر است با:



شکل ۱

$$|S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

مثال: در یک کلاس ۲۵ نفری ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

حل: ابتدا با استفاده از اصل شمول تعداد افرادی را که حداقل در یکی از دو رشته ورزشی بازی می‌کنند مشخص می‌کنیم و سپس با استفاده از نتیجه اصل شمول تعداد افرادی را که در هیچ رشته ورزشی شرکت ندارند به دست می‌آوریم.

اگر مجموعه افرادی را که فوتبال و والیبال بازی می کنند به ترتیب  $F$  و  $V$  بنامیم در این صورت خواهیم داشت :

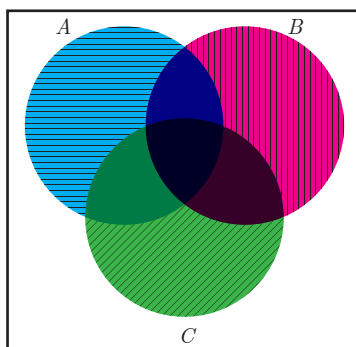
$$|F \cup V| = |F| + |V| - |F \cap V| \Rightarrow |F \cup V| = \dots$$

$$\Rightarrow \text{تعداد افرادی که نه در } F \text{ و نه در } V \text{ هستند} = |\overline{F \cup V}| = |S| - |F \cup V| = 25 - \dots = \dots$$

اصل شمول را می توان برای بیش از دو مجموعه هم تعمیم داده و بیان کرد که ما در این کتاب برای حداکثر سه مجموعه آن را بیان و مسائلی را با استفاده از این اصل طرح و حل خواهیم کرد.

اصل شمول برای سه مجموعه : اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  زیرمجموعه هایی از مجموعه مرجع  $S$  باشند، در این صورت همواره تساوی زیر (اصل شمول) برقرار است :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



(توضیح دهید چرا اشتراک های دوتایی کم و اشتراک سه تایی اضافه شده است؟)

با استفاده از تعریف متمم، نتیجه اصل شمول نیز به صورت زیر بیان می شود :

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| \quad \text{از } |A \cup B \cup C| \text{ که در هیچ یک از مجموعه های } A \text{ و } B \text{ و } C \text{ قرار ندارند}$$

شکل ۲

## فعالیت

چند عدد طبیعی مانند  $n$ ، به طوری که  $1 \leq n \leq 400$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش پذیر نباشند، بر ۴ بخش پذیر نبوده و بر ۵ نیز بخش پذیر نباشند).

۱ در بین اعداد ۱۲، ۲۵، ۱۰ و ۱۳ کدام یک مورد نظر می باشند؟

۲ آیا عدد ۶۰ جزء اعداد مورد نظر است؟

۳ اگر مجموعه اعدادی را که بر ۳ بخش پذیرند  $A$  و اعداد بخش پذیر بر ۴ را  $B$  و اعداد بخش پذیر بر ۵ را  $C$  بنامیم،  $\overline{A}$ ،  $\overline{B}$  و  $\overline{C}$  را تعریف کنید. آیا مجموعه  $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$  همه اعداد مورد نظر را شامل می شود؟

۴ آیا تساوی  $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = (\overline{A \cup B \cup C})$  برقرار است؟

۵ با توجه به تساوی اخیر و اصل شمول و نتیجه اصل شمول جاهای خالی را پر کرده و تعداد اعداد خواسته شده را محاسبه کنید. (منظور از [ ] جزء صحیح است).

$$A = \{1 \leq n \leq 400 \mid 3 \mid n\} \rightarrow |A| = \left[ \frac{400}{3} \right] = \dots$$

(از هر سه عدد متوالی یکی بر ۳ بخش پذیر است، پس تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا  $k$  که بر سه بخش پذیرند برابر است با  $\left[ \frac{k}{3} \right]$ ).

$$B = \{1 \leq n \leq 400 \mid \dots \mid n\} \rightarrow |B| = \left[ \frac{\dots}{\dots} \right] = \dots$$

$$C = \{1 \leq n \leq 400 \mid \dots \mid n\} \rightarrow |C| = \left[ \frac{\dots}{\dots} \right] = \dots$$

$(A \cap B)$  یعنی مجموعه اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۴ بخش پذیرند و با توجه به قضیه ای در نظریه اعداد، «مجموعه اعدادی که بر  $a$  و بر  $b$  بخش پذیر باشد با مجموعه اعدادی که بر «کم م» آن دو عدد یعنی بر  $[a, b]$  بخش پذیرند، برابر می باشد». (این قضیه برای سه عدد یا بیشتر نیز برقرار است)

$$|A \cap B| = \left[ \frac{400}{[3, 4]} \right] = \left[ \frac{400}{12} \right] = \dots$$

$$|A \cap C| = \left[ \frac{400}{\dots} \right] = \left[ \frac{400}{15} \right] = \dots$$

$$|B \cap C| = \left[ \frac{\dots}{\dots} \right] = \left[ \frac{\dots}{20} \right] = \dots$$

$$|A \cap B \cap C| = \left[ \frac{400}{60} \right] = \dots \quad ([3, 4, 5] = [[3, 4], 5] = [12, 5] = 60)$$

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = \overline{A \cup B \cup C} = |S| - |A \cup B \cup C|$$

$$= 400 - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|)$$

$$= 400 - (133 + \dots + \dots - 33 - \dots - 20 + 6) = \dots$$

## کار در کلاس

چند عدد طبیعی مانند  $n$ ، به طوری که  $1 \leq n \leq 350$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر نباشند؟  
(توجه داشته باشید که  $[5, 6] = 30$ ،  $[4, 6] = 12$ ،  $[5, 4, 6] = 60$ )

مثال: اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد) (این مسئله معادل است با شمارش تعداد ۴ رقمی هایی که در هر یک از آنها هر یک از ارقام ۷ و ۸ وجود داشته باشد.)

حل: یک رمز ۴ رقمی را به صورت  $\overline{abcd}$  نمایش می دهیم که در آن  $a, b, c, d$  ارقام صفر تا ۹ می باشند. محاسبه تعداد چنین ارقامی به صورت مستقیم کاری وقت گیر است و امکان دارد رمزهایی را چندبار محاسبه کنیم یا رمزهایی را از قلم بیندازیم، لذا از اصل شمول استفاده می کنیم.

ابتدا مجموعه های  $A$  و  $B$  را به صورت زیر و مخالف با آنچه مورد نظر مسئله است تعریف می کنیم!

$$A = \{\overline{abcd} \mid a, b, c, d \neq 7\} \rightarrow |A| = 9 \times 9 \times 9 \times 9$$

$$B = \{\overline{abcd} \mid a, b, c, d \neq \dots\} \rightarrow |B| = 9 \times 9 \times 9 \times 9$$

$$(A \cap B) = \{\overline{abcd} \mid a, b, c, d \neq 7, 8\} \rightarrow |A \cap B| = 8 \times 8 \times 8 \times 8$$

واضح است که منظور از  $\overline{A}$  مجموعه اعداد ۴ رقمی است که در هر یک از آنها رقم ۷ به کار رفته است و منظور از  $\overline{B}$

اعداد ۴ رقمی است که در آنها عدد ۸ به کار رفته است. البته  $(\overline{A} \cap \overline{B})$  یعنی مجموعه اعداد ۴ رقمی که در آنها هم رقم ۷ و هم رقم ۸ به کار رفته است و تعداد اعضای این مجموعه پاسخ سؤال مطرح شده است.

$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$  → تعداد کل ۴ رقمی ها

رقم اول رقم دوم رقم سوم رقم چهارم

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

$$= 10000 - (9^4 + 9^4 - 8^4) = \dots$$

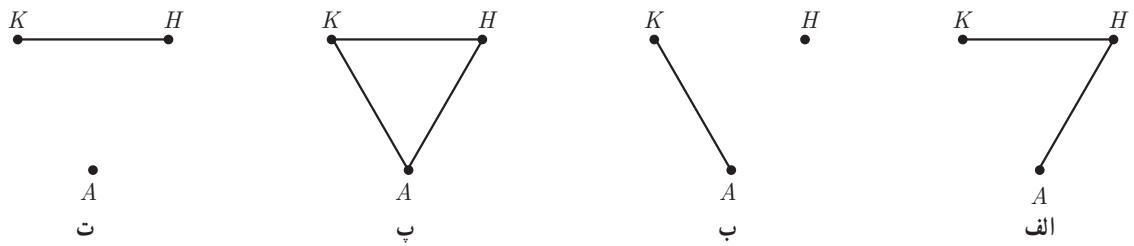
زمان لازم برحسب ثانیه  $= \dots \times 5 = \dots$

### کار در کلاس

در استان مرکزی، در نزدیکی شهر محلات، سه روستای خورده، آبگرم و حاجی آباد وجود دارد. اگر بخواهیم جاده‌هایی بین این سه روستا طراحی کنیم، به طوری که پس از تکمیل راه‌ها، هیچ روستایی تنها نماند (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد) به چند طریق می‌توان چنین راه‌هایی را طراحی کرد؟

اگر روستاها را  $K, A, H$  و بنامیم، در این صورت یافتن تعداد چنین راه‌هایی معادل است با پیدا کردن تعدادی گراف‌های ساده که با سه رأس  $K, A, H$  می‌توان تعریف کرد به طوری که در آنها هیچ رأسی تنها نباشد.

۱ از چهار گراف ساده زیر کدام‌ها مورد نظرند و کدام‌ها را نباید شمرد؟



شکل ۳

۲ کل جاده‌های بین سه روستا یعنی کل گراف‌های ممکن که با سه رأس می‌توان تعریف کرد برابر است با:

$$|S| = 2^{\binom{3}{2}} = \dots$$

(بین هر دو روستا از این سه روستا می‌توان یک جاده در نظر گرفت که هر جاده می‌تواند در طراحی ما، باشد یا نباشد).

۳ اگر  $A_k$  را مجموعه راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای  $K$  تنها بماند تعریف کنیم، به همین صورت  $A_h$  و  $A_a$  را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول جواب را بیابید و گراف‌های متناظر با آنها را رسم کنید.

۴ توضیح دهید که چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

- الف)  $|A_k| = |A_a| = |A_h| = 2$
- ب)  $|A_k \cap A_a| = |A_k \cap A_h| = |A_a \cap A_h| = 1$
- پ)  $|A_k \cap A_a \cap A_h| = 1$



اگر  $f$  تابعی از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$  باشد و  $|A|=m$  و  $|B|=n$ ، در این صورت برای هر  $a_i \in A$  که  $1 \leq i \leq m$  می توان به  $n$  طریق  $f(a_i)$  را تعریف کرد  $f(a_i)=b_1$  یا  $f(a_i)=b_2$  یا  $\dots$  یا  $f(a_i)=b_n$  و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل توابع از  $A$  به  $B$  برابر است با:  $|B|^{|A|}=n^m$ . حال اگر  $|A|=5$  و  $|B|=3$ ، در این صورت می خواهیم تعداد توابعی چون  $f$  از  $A$  به  $B$  را تعیین کنیم به طوری که  $R_f=B$ . (روی تمام اعضای  $B$ ، پیکانی رسم شده باشد، به چنین تابع هایی، تابع پوشا گفته می شود.)

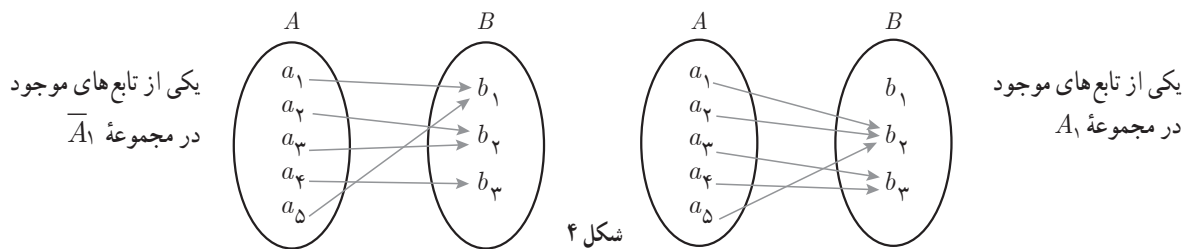
۱ اگر فرض کنیم  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$  و  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  و تعریف کنیم،

$$A_1 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_1; 1 \leq i \leq 5\}$$

$$A_2 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq \dots; 1 \leq i \leq 5\}$$

$$A_3 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq \dots; 1 \leq i \leq 5\}$$

در این صورت  $\bar{A}_1$  مجموعه ای شامل همه تابع هایی از  $A$  به  $B$  است که حداقل یک پیکان از اعضای  $A$  روی  $b_1$  می آورند.



شکل ۴

۲ مجموعه  $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = \overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)}$  را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول، پاسخ را بیابید.

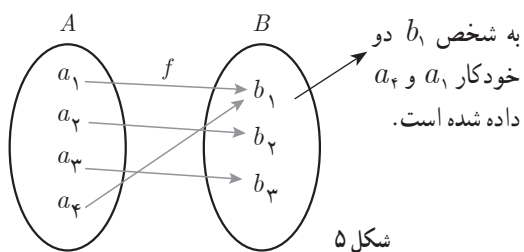
$$|S| = 3^5 = \dots, |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 = \dots$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = \dots, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= 243 - (\dots + \dots + \dots - \dots - \dots + \dots) = \dots$$

مثال: به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟



شکل ۵

حل: تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل معادل است

با پیدا کردن تعداد تابع های از یک مجموعه ۴ عضوی مانند  $A$  به

یک مجموعه ۳ عضوی مانند  $B$ ، به طوری که بُرد این توابع همه

اعضای  $B$  باشد. (به هر عضو  $B$  حداقل ۱ عضو از  $A$  نسبت

داده شود.)

$$A_j = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 3\}$$

$$|S| = |B|^{|A|} = 3^4 = 81$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4 = 16$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1^4 = 1, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36$$

تذکر: تعداد تابع‌هایی چون  $f: A \rightarrow B$  با فرض  $|A|=m \geq 3$  و  $|B|=3$  به طوری که  $R_f = B$ ، از رابطه  $3^m - (3 \times 2^m - 3)$  به دست می‌آید.

مثال: ۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود).

حل: حل این مثال معادل است با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی که برابر است با  $8^4 = 4096$ .

## فعالیت

می‌خواهیم تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی را شمارش کنیم،  
**۱** اگر فرض کنیم  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  و  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$  برای تعریف  $f$  روی هر عضو  $A$  مثلاً  $f(a_1)$ ، چند راه انتخاب داریم؟

**۲** با توجه به اینکه  $f$  باید یک‌به‌یک باشد و تعریف یک‌به‌یکی در توابع، پس از تعریف  $f(a_1)$ ، برای تعریف  $f$  روی  $a_2$  چند راه انتخاب داریم؟

**۳** با توجه به اصل ضرب، در کل، چند تابع یک‌به‌یک از  $A$  به  $B$  می‌توان تعریف کرد؟ پاسخ خود را توسط تبدیل  $r$  شیء از  $n$  شیء بنویسید.

به ۶ طریق می‌توان  $f(a_1)$  را تعریف کرد  $\rightarrow b_1$  یا  $b_2$  یا  $\dots$  یا  $b_6$  یا  $f(a_1) = b_1$

به ۵ طریق می‌توان  $f(a_2)$  را تعریف کرد  $\rightarrow f(a_2) \neq f(a_1) \Rightarrow f$  یک‌به‌یک است

$\dots \Rightarrow f(a_3) \neq f(a_1), f(a_2) \neq f(a_2) \Rightarrow f$  یک‌به‌یک است

$$6 \times 5 \times \dots \times \dots = \frac{6!}{\dots} = (6)_6$$

در حالت کلی اگر  $|A|=m$  و  $|B|=k$  در این صورت با شرط  $m \leq k$  تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$  برابر

$$(k)_m = \frac{k!}{(k-m)!}$$

است با تعداد انتخاب‌های  $m$  شیء از بین  $k$  شیء یا

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ‌کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم)

حل: تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن



شکل ۶

تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه‌ای ۴ عضوی به مجموعه‌ای ... عضوی یعنی،  $\dots = \dots = \dots$  (۸).

## اصل لانه کبوتری<sup>۱</sup>

اگر از شما سؤال شود که حداقل چند نفر باید در یک کلاس حضور داشته باشند تا مطمئن شوید لااقل دو نفر از آنها ماه تولدشان یکسان است، چه پاسخی می‌دهید؟ بدترین حالت ممکن این است که افراد داخل کلاس از نفر اول هر کدام در یک ماه متفاوت با نفر قبلی به دنیا آمده باشند، تا کجا می‌توان مقاومت کرد؟ واضح است که حداکثر تا ۱۲ نفر با فرض اینکه هر نفر در یک ماه متفاوت از بقیه متولد شده باشد، می‌توان به این روند ادامه داد و هنوز اطمینانی برای اینکه حداقل دو نفر ماه تولدشان مثل هم باشد وجود ندارد، ولی اگر ۱۳ نفر در کلاس حضور داشته باشند این اطمینان حاصل می‌شود! (نفر سیزدهم در هر ماهی متولد شده باشد، ۱ نفر از آن ۱۲ نفر در آن ماه متولد شده است.)

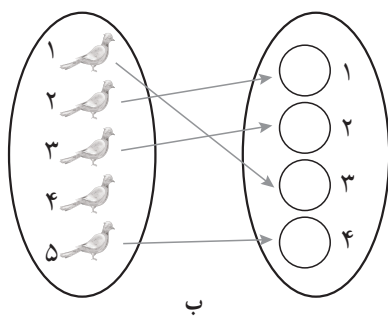


شکل ۷

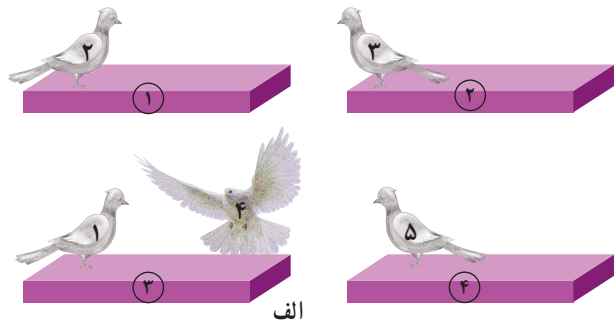
حال با توجه به مطالب فوق به نظر شما حداقل چند دانش‌آموز در یک مدرسه باید حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم، حداقل ۲ نفر از آنها روز تولدشان یکی است؟

در این قسمت به بیان اصل لانه کبوتری پرداخته و سپس مسائلی را مطرح می‌کنیم و با استفاده از این اصل و تعمیم آن، مسائل را حل خواهیم کرد.

**اصل لانه کبوتری:** اگر  $m$  کبوتر و  $n$  لانه داشته باشیم و  $m > n$  و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.



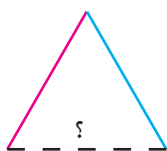
ب



الف

شکل ۸

۱- اصل لانه کبوتری اصطلاحاً «اصل» نامیده می‌شود و در واقع قضیه‌ای است که با برهان خلف اثبات می‌شود، این اصل را اصل حجره‌ها نیز نامیده‌اند.



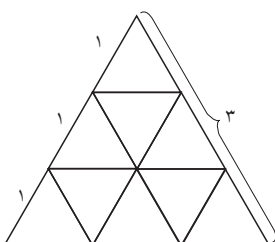
مثال: نشان دهید اگر بخواهیم ضلع‌های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث هم‌رنگ خواهند شد.

حل: اگر ضلع‌های مثلث را کبوترها و دو رنگ آبی و قرمز را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل کبوتری در یکی از لانه‌ها حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد گرفت (دو کبوتر در یک لانه معادل است با دو ضلع با یک رنگ).

مثال: ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می‌شود به طوری که به پیمانه ۴ هم‌نهیست می‌باشند. حل: می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۴ یکی از اعضای مجموعه  $R = \{0, 1, 2, 3\}$  است، حال اگر ۵ عدد طبیعی را کبوترها و باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این ۵ عدد باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۴ با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را  $a$  و  $b$  فرض کنیم،  $a$  و  $b$  بر ۴ هم باقی‌مانده بوده و بنابر تعریف هم‌نهیستی باید  $a \equiv b$  و حکم به دست می‌آید.

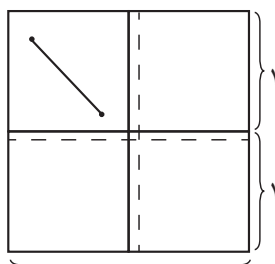
تمرین: در حالت کلی ثابت کنید در بین هر  $(n+1)$  عدد طبیعی دلخواه و بیشتر، همواره حداقل ۲ عدد مانند  $a$  و  $b$  یافت می‌شوند به قسمی که تفاضل آنها بر  $n$  بخش‌پذیر است. (به پیمانه  $n$  هم‌نهیست‌اند).

### کار در کلاس



شکل ۹

۱ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر  $10^\circ$  نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.



شکل ۱۰

۲ با توجه به ۱ برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل کبوتری به آن پاسخ دهید.

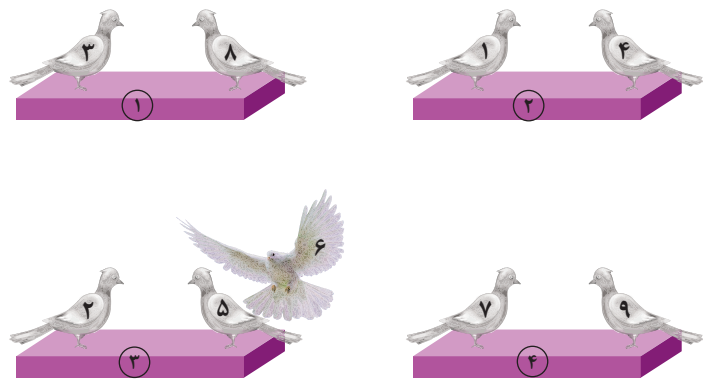
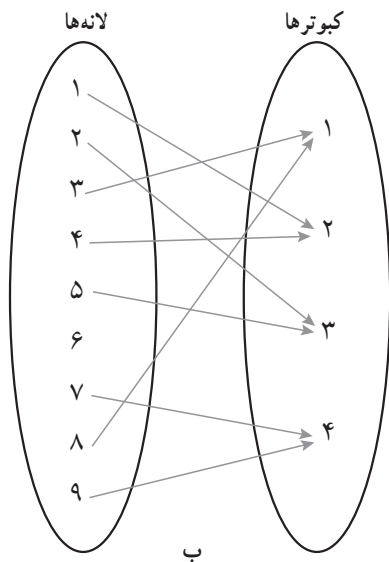
۳ نشان دهید در یک خانواده حداقل ۵ نفری، دست‌کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

۴ نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه  $P \geq 2$  حداقل دو رأس هم‌درجه وجود دارد. (راهنمایی: مسئله را در دو حالت بررسی کنید. (۱) حالتی که رأس ایزوله یا تنها نداشته باشیم که در این صورت درجات رؤس از ۱ تا  $n-1$  تغییر می‌کند. (۲) حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم که در این صورت درجات بقیه رؤس از ۱ تا  $n-2$  تغییر می‌کند) آیا نیازی هست حالتی را در نظر بگیریم که دو رأس یا بیشتر تنها باشند؟

جدول زیر را (با توجه به قرارداد  $n$  کیبوتر در  $n$  لانه در هر مرحله) کامل کنید و نتیجه گیری خود را با نتیجه داخل کادر (تعمیم اصل لانه کیبوتری) مقایسه کنید.

تعداد لانه‌ها ( $n$ )	تعداد کیبوترها ( $kn+1$ )	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ( $k+1$ ) کیبوتر
$n$	$1 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۲ کیبوتر
$n$	$2 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ... کیبوتر
$n$	$\dots + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۴ کیبوتر
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$\dots + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ..... کیبوتر

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در سطر دوم به ازای  $n=4$  و  $k=2$  تعداد کیبوترها  $2 \times 4 + 1 = 9$  می‌باشد که طبق جدول می‌بایست لانه‌ای با حداقل ۳ کیبوتر یافت شود و شکل زیر گویای این روش است که اگر در هر لانه یک کیبوتر قرار بگیرد و از هر ۵ کیبوتر باقی مانده مجدد در هر لانه ۱ کیبوتر قرار بگیرد در نهایت نهمین کیبوتر در هر لانه‌ای قرار بگیرد همان لانه دارای ۳ کیبوتر است. توجه دارید که در حالت‌های زیادی از نشستن کیبوترها در لانه‌ها حداقل ۱ لانه با حداقل ۳ کیبوتر می‌تواند وجود داشته باشد (همه کیبوترها در ۱ لانه قرار بگیرند یا ۵ کیبوتر در ۱ لانه و ۴ کیبوتر در لانه‌های دیگر یا ...).



شکل ۱۱

تعمیم اصل لانه کیبوتری: هرگاه  $(kn+1)$  کیبوتر یا بیشتر در  $n$  لانه قرار بگیرند در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل  $(k+1)$  کیبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال: در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

حل: در این مسئله  $k+1=7$  یعنی  $k=6$  است و  $n$  یا تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی  $n=12$  است، پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست  $kn+1=6 \times 12 + 1 = 73$  باشد.

## کار در کلاس

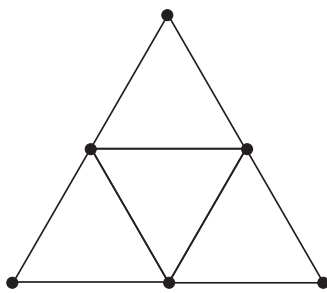
۱ در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟

۲ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$$k+1=0 \dots \Rightarrow k=0 \dots$$

$$kn+1=54 \Rightarrow 4n = \dots \Rightarrow n = \left[ \frac{\dots}{4} \right] = \dots$$

۳ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلشان غیر تکراری و مثل هم است؟  
(فامیلی‌هایی مثل اشتری و اشراقی مورد نظر است).



شکل ۱۲

مثال: حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌شان کمتر از ۱ است.

حل: کافی است مطابق شکل، مثلث مفروض را به ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم بندی کنید که در این صورت اگر ۵ نقطه از داخل این مثلث انتخاب کنید طبق اصل لانه کبوتری اطمینان دارید حداقل یکی از مثلث‌ها شامل دست کم ۲ نقطه از این ۵ نقطه خواهد بود و فاصله این دو نقطه از طول ضلع مثلث‌های کوچک‌تر کمتر می‌باشد.

مثال: نشان دهید در هر کلاس با  $n$  دانش‌آموز ( $n \geq 2$ ) حداقل ۲ دانش‌آموز یافت می‌شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است.

حل: قبلاً ثابت کردیم که در هر گراف ساده حداقل ۲ رأس هم‌درجه وجود دارد، لذا کافی است گرافی تعریف کنید که رأس‌های آن دانش‌آموزان و رابطه دوستی بین هر دو دانش‌آموز را با یالی بین رأس‌های متناظرشان تعریف کنید.

- ۱ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ( $1 \leq n \leq 90$ ) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟
- ۲ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ( $1 \leq n \leq 200$ ) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟
- ۳ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند مشخص کنید:
- الف) چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می کنند؟  
 ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند؟  
 پ) چند نفر والیبال بازی می کنند ولی بسکتبال بازی نمی کنند؟  
 ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟
- ۴ اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هر یک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟
- ۵ چه تعداد تابع چون  $f: A \rightarrow B$  می توان تعریف کرد اگر بدانیم  $|A|=5$  و  $|B|=4$  است؟ چه تعداد از این توابع یک به یک هستند؟
- ۶ به چند طریق می توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟
- ۷ به چند طریق می توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟
- ۸ ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده اند.
- ۹ ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.
- ۱۰ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟
- ۱۱ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.
- ۱۲ مجموعه اعداد  $A = \{1, 2, \dots, 84\}$  را در نظر می گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از  $A$  دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

**۱۳** مجموعه اعداد  $A = \{1, 5, 9, 13, \dots, 77, 81, 85\}$  را که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با  $90$  باشد.

**۱۴** ۱۳ نقطه درون یک مستطیل  $6 \times 8$  قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آنها از هم، کمتر از  $\sqrt{8}$  باشد.

**۱۵** ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.



۱ امیری، حمیدرضا. (۱۳۸۶). ورودی به نظریه اعداد. انتشارات مدرسه.  
۲ بهزاد، مهدی؛ رجالی، علی؛ عمیدی، علی و محمودیان، عبادالله. (۱۳۹۶). کتاب درسی ریاضیات گسسته. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی وزارت آموزش و پرورش.

- ۳ D.B. West (2001). Introduction to graph theory.  
۴ H.M. Edgar. (2004). A first course in number theory.  
۵ J. A. Bondy, U.S.R. Murty. (2008). Graph theory.  
۶ J. H. Van Lint, R.M. Wilson. (2003). A course in Combinatorics.  
۷ K.H. Rosen. (2016). Handbook of Discrete and combinatorial Mathematics. CRC Press.  
۸ S.S. Epp (2011). Discrete Mathematics an Introduction to Mathematics Reasoning, Cengage Learning.  
۹ S.S. Epp (2011). Discrete Mathematics with Applications.  
۱۰ T. Koshy. (2007). Elementary Number Theory with Applications. ELSEVIER.  
۱۱ T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater. (1998). Fundamentals of domination in graph.  
۱۲ T. Sundstrom (2016). Mathematical Reasoning: Writing and proof, Grand valley state university.



سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان درباره کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانه راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائه نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

### اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت کننده در اعتبارسنجی کتاب ریاضیات گسسته با کد ۱۱۲۲۱۵

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	امین مجیدی	گیلان	۲۸	فرود نجفی	فارس
۲	خلیل تیموری	ایلام	۲۹	نرجس زنگارکی	مرکزی
۳	نرگس اصلانی گرمی	آذربایجان شرقی	۳۰	عباسعلی ایزدی قصبه	گیلان
۴	آسیه رضائی گرجی	البرز	۳۱	علی اصغر بسطامی	ایلام
۵	آزاده قنادیان	همدان	۳۲	رسول حاجی زاده	شهرتهران
۶	طاهره جعفری	شهرتهران	۳۳	زهره محمدی	چهارمحال و بختیاری
۷	پرویز رضایی	فارس	۳۴	علیرضا محمدی	بوشهر
۸	عادل محمدی	خوزستان	۳۵	فرزانه کد خدایی	لرستان
۹	فرزانه منصوری	خراسان شمالی	۳۶	شفیع ملایی	کردستان
۱۰	سهیلا چناری	کرمانشاه	۳۷	مریم فرهادپور	خراسان جنوبی
۱۱	محمد درویش زاده	اصفهان	۳۸	زهرا درویش توانگر	شهرستانهای تهران
۱۲	کامران کبیری	چهارمحال و بختیاری	۳۹	مرتضی جعفری	سیستان و بلوچستان
۱۳	مهران قاسمی	آذربایجان غربی	۴۰	نجمه یزدان بخش	هرمزگان
۱۴	جواد بهرامی	البرز	۴۱	هوشنگ افشین	خوزستان
۱۵	مهناز رحیمی	اصفهان	۴۲	رضا صیادی	کرمانشاه
۱۶	سید عیسی حسینی	قزوین	۴۳	فیروزه شاهین شالکوهی	گیلان
۱۷	لقمان حسینی	کردستان	۴۴	سکینه حبیبی	لرستان
۱۸	حمیده عبدالهی	مازندران	۴۵	مهدی قسوره	خراسان جنوبی
۱۹	رضا زید آبادی	خراسان رضوی	۴۶	علی عبدالمحمد	قم
۲۰	ام البنین ربیعی	سمنان	۴۷	سیدحسین باقرنژاد	خراسان شمالی
۲۱	علی جعفری	همدان	۴۸	آذر کریمیان	قم
۲۲	سمیه پورجواران	کرمان	۴۹	مریم امیدیان	سمنان
۲۳	فاطمه سقائیان	خوزستان	۵۰	وحید سجادپور	کهگیلویه و بویراحمد
۲۴	جمال نوین	یزد	۵۱	مسعودرضا عرب یارمحمدی	گلستان
۲۵	محبوبه رضانی	شهرستانهای تهران	۵۲	جلال سرحدی	مازندران
۲۶	سید رضا پرپینچی	قزوین	۵۳	فرزاد جوادی	آذربایجان غربی
۲۷	محمد کارآمد	کرمان	۵۴	سیما حقیقی اذر	گلستان