



دفترچه سوال رسمی آزمون
واحد سنجش و ارزیابی باشگاه دانش پژوهان جوان

بسمه تعالی
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش پژوهان جوان



مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جستوجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچه سؤالات مرحله اول سال ۱۴۰۴

چهل و چهارمین دوره المپیاد ریاضی

مدت آزمون	تعداد سؤالات	
	پنج گزینه‌ای	پاسخ کوتاه
۲۱۰ دقیقه	۹	۱۶

نام:	نام خانوادگی:	شماره صندلی:
------	---------------	--------------

استفاده از هر نوع ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

- ۱- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و همه برگه‌های دفترچه سؤالات را بررسی نمایید، در صورت هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۲- یک برگ پاسخ‌برگ در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است، در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در پایین پاسخ‌برگ را با مداد مشکی بنویسید.
- ۳- برگه پاسخ‌برگ را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۴- دفترچه سوال باید همراه پاسخ‌برگ تحویل داده شود.
- ۵- سؤالات به دو شکل پاسخ کوتاه و پنج گزینه‌ای هستند، پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال پنج گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. پاسخ نادرست به سوال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
- ۶- شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند، به علاوه تعدادی از دانش آموزان پایه دهم، به صورت آزمایشی و کسب تجربه، در آزمون مرحله دوم پذیرفته خواهند شد.
- ۷- وبگاه کمیته علمی المپیاد ریاضی ایران www.mathysc.ir است.

کلیه حقوق این سؤالات برای باشگاه دانش پژوهان جوان محفوظ است.

آدرس سایت اینترنتی: ysc.medu.gov.ir

۴. فرض کنید برای عددهای حقیقی مثبت x, y, z تعریف کنیم:

$$f(x, y, z) = x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}$$

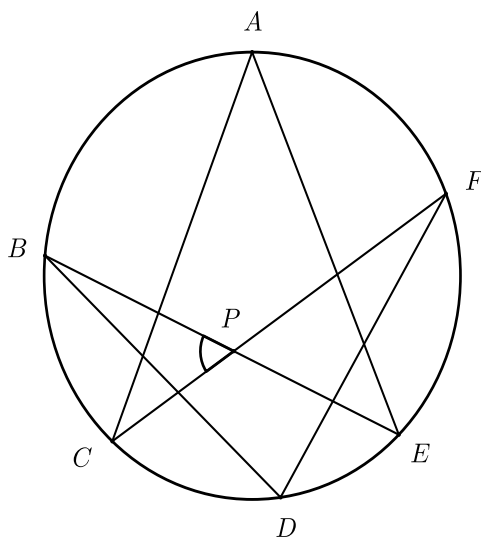
کدام گزینه درست است؟

- (۱) مقدار $f(x, y, z)$ با زیاد شدن هر یک از سه متغیر x, y, z افزایش می‌یابد.
- (۲) مقدار $f(x, y, z)$ با زیاد شدن x افزایش می‌یابد ولی با زیاد شدن y, z کاهش می‌یابد.
- (۳) مقدار $f(x, y, z)$ با زیاد شدن x, y افزایش می‌یابد ولی با زیاد شدن z کاهش می‌یابد.
- (۴) مقدار $f(x, y, z)$ با زیاد شدن x, z افزایش می‌یابد ولی با زیاد شدن y کاهش می‌یابد.
- (۵) مقدار $f(x, y, z)$ با زیاد شدن x همواره افزایش می‌یابد ولی با زیاد شدن y, z بسته به مقدار آن‌ها ممکن است افزایش یا کاهش پیدا کند.

۵. به چند حالت می‌توان زیرمجموعه‌های A, B, C, D و E را از مجموعه تک‌عضوی $\{1\}$ انتخاب کرد به گونه‌ای که مجموعه $((A \cup B) \cap C) \cup ((A \cap D) \cup E)$ تهی نباشد؟

🔔 حاصل عددی زوج است.

۶. در شکل زیر شعاع دایره ۱ است و $AC = AE = \sqrt{3}$ و $DB = DF = \sqrt{2}$. زاویه $\angle BPC$ چند درجه است؟



۷. چند عدد طبیعی $n \leq 100$ وجود دارد که عبارت

$$\log_r\left(\frac{\pi}{n} + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$$

مثبت باشد؟

۸. چند عدد طبیعی ۳ رقمی داریم که اگر با هر کدام از ارقامش جمع شود حاصل مربع کامل شود؟

۹. در منطقه‌ای ۶ شهر داریم که می‌خواهیم بین هر دو شهر جاده‌ای احداث کنیم. جاده‌ها لزوماً به شکل خط راست نیستند و هیچ سه جاده‌ای در یک نقطه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. هر دو جاده‌ای که یکدیگر را قطع کنند یک چهارراه به وجود می‌آورند. برای احداث این جاده‌ها حداقل به چند چهارراه نیاز پیدا می‌کنیم؟

۱۰. تعداد توابع یک به یک و پوشای $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ که در دو ویژگی زیر صدق کند، چند تا است؟

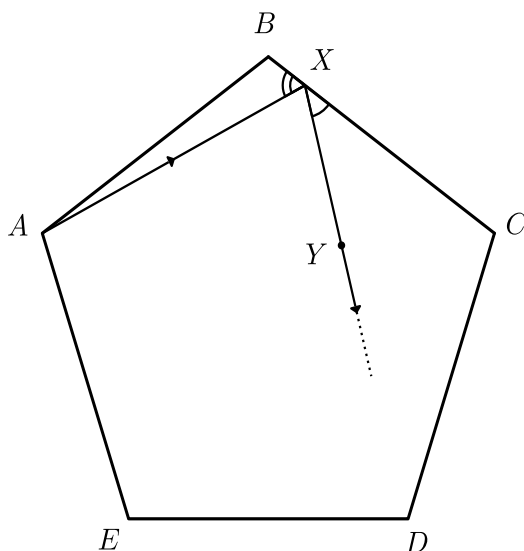
$$f(f(x)) + x = 2f(x)$$

$$f(1404) = 2026$$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۱۴۰۴ (۴) ۲۰۲۵ (۵) بی نهایت

۱۱. یک پنج ضلعی منتظم با دیواره‌های آینه‌ای مطابق شکل زیر داریم. آینه‌ها طوری هستند که هر پرتوی نوری که به آن‌ها برخورد کند با زاویه نصف شده بازتاب می‌شود. به عنوان مثال در شکل زیر زاویه $\angle BXA$ دوبرابر زاویه $\angle YXC$ می‌باشد. اگر از رأس A پرتویی به نقطه‌ای دلخواه درون پاره خط BC بتابانیم که مطابق شکل برای اولین بار در نقطه X با آینه‌ها برخورد کند، برای ۱۴۰۴ امین بار با آینه کدام ضلع برخورد خواهد کرد؟

(۱) BC (۲) CD (۳) DE (۴) AE (۵) بستگی به X دارد.



۱۲. چند زوج مرتب (p, q) از اعداد اول مثبت وجود دارد به طوری که چندجمله‌ای $x^2 + px + q$ ریشه صحیح داشته باشد؟

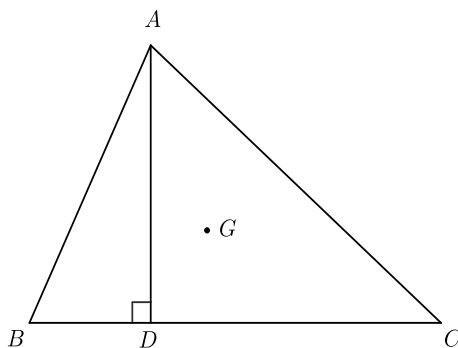
۱۳. تعداد توابع $f: \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 6\}$ را بیابید که برای هر x داشته باشیم:

$$f(f(f(x))) = x.$$

🔔 حاصل عددی فرد است.

۱۴. مثلث ABC داده شده است. اگر نقطه D پای ارتفاع رأس A و نقطه G مرکز ثقل این مثلث باشند و طول BD و DC و AC به ترتیب ۲ و ۴ و ۵ باشند. طول DG کدام گزینه است؟

- (۱) $\frac{11\sqrt{5}}{21}$ (۲) $\frac{19}{15}$ (۳) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ (۴) $\frac{2}{5}$ (۵) $\frac{\sqrt{7}}{3}$



۱۵. تابع $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ را فاصله‌افزا می‌گوییم اگر برای هر دو عدد صحیح متمایز a, b ، داشته باشیم:

$$|f(a) - f(b)| > |a - b|.$$

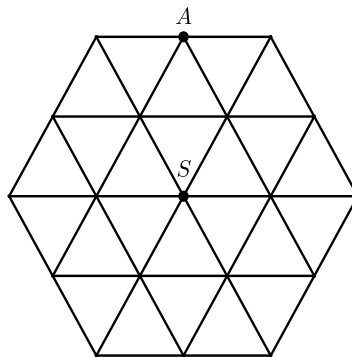
چندتا از عبارت‌های زیر در مورد این توابع همواره درست هستند؟

- تابع پوشای فاصله‌افزا وجود ندارد.
- تابع یک‌به‌یک فاصله‌افزا وجود ندارد.
- مجموع هر دو تابع فاصله‌افزا تابعی از همین نوع است.
- ترکیب هر دو تابع فاصله‌افزا تابعی از همین نوع است.
- ضرب هر دو تابع فاصله‌افزا تابعی از همین نوع است.

۱۶. مسعود اعداد ۱ تا ۲۰۰ را نوشته است و سعی دارد روش غربالی را روی آن‌ها اجرا کند. در این روش بعضی عددها حذف می‌شوند و دور بعضی دایره کشیده می‌شود. او ابتدا عدد ۱ را حذف می‌کند و سپس در هر مرحله دور کوچک‌ترین عددی که نه حذف شده و نه دورش دایره کشیده شده، به همراه کوچک‌ترین مضرب حذف نشده‌اش را دایره می‌کشد و بقیه مضارب آن را حذف می‌کند. پس از پایان این کار دور چند عدد دایره کشیده شده است؟
 📌 حاصل عددی زوج است.

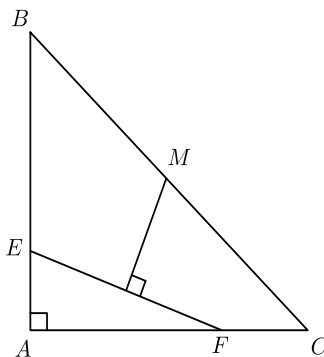
۱۷. در شکل زیر یک شش ضلعی منتظم داریم که طول اضلاع آن ۲ است. شبکه‌ای درون آن رسم شده است که همه مثلث‌ها در آن متساوی‌الاضلاع هستند. علی در نقطه A و سینا در نقطه S ایستاده‌اند. سینا موقعیت علی را نمی‌داند و به صورت تصادفی دو بار و هر بار ۱ واحد روی شبکه حرکت می‌کند. بعد از هر حرکت سینا روی رأس یکی از مثلث‌های شبکه قرار دارد. پس از این دو حرکت، احتمال اینکه فاصله مستقیم سینا از علی بیش‌تر نشود چند است؟ (منظور از فاصله مستقیم دو نقطه طول پاره‌خط واصل بین آن‌ها است. به عنوان مثال فاصله مستقیم علی و سینا در ابتدا برابر $\sqrt{3}$ است.)

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۵) $\frac{1}{4}$



۱۸. مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC با رأس قائمه A و طول ساق ۱ داده شده است. نقاط E و F به ترتیب روی AB و AC طوری انتخاب شده‌اند که $AE = FC = \frac{1}{3}$ و عمود منصف EF در M وتر را قطع کرده است. ME برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{10}}{6}$ (۲) $\frac{13}{25}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{9}{17}$ (۵) $\frac{\sqrt{13}}{5}$



۱۹. مجموع تمام اعداد حقیقی α که به ازای آن‌ها، چندجمله‌ای‌های غیر ثابت $P(x)$ و $Q(x)$ با ضرایب حقیقی وجود داشته باشند که تساوی زیر برای هر عدد حقیقی x برقرار باشد، کدام گزینه است؟

$$P(x)^2 + Q(x)^2 = P(x)^2 + \alpha P(x)Q(x) + Q(x)^2$$

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲ (۵) ۰

۲۰. سالنی به تعدادی لامپ که می‌دانیم حداکثر ۴۰ تا هستند مجهز شده است. برای تنظیم روشنایی این سالن یک دستگاه خودکار و دارای حسگر نور قرار داده شده است. این دستگاه صبح‌ها که به تدریج نور بیش‌تر می‌شود شروع به خاموش کردن برخی از لامپ‌های روشن می‌کند. روش آن بدین صورت است که در هر مرحله اگر n لامپ روشن باشد و d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه n باشد که $d < n$ دستگاه d لامپ را خاموش می‌کند. در این صورت حداکثر چند مرحله تا رسیدن به یک لامپ روشن طول می‌کشد؟

۲۱. کوچک‌ترین عدد حقیقی K که به ازای هر سه عدد حقیقی a, b, c که $a, b, c \in [1, 2]$ داشته باشیم:

$$a^3 + b^2 + c \leq Kabc$$

کدام گزینه است؟

- (۱) ۶ (۲) $2\sqrt{7}$ (۳) ۵ (۴) $2\sqrt{6}$ (۵) ۴

۲۲. ۸ نفر دور یک میز نشسته‌اند. جلوی هرکس یک لیوان چای و یک حبه قند قرار دارد. هر کس می‌تواند حبه قند خود را در لیوان خودش یا یکی از دو فرد مجاورش بیاندازد. بعد از انداختن همه حبه قندها، همه چای‌ها شیرین شده‌اند. این اتفاق به چند حالت مختلف می‌تواند رخ دهد؟

۲۳. نقاط متمایز X, Y, Z روی دایره محیطی مثلث ABC و متمایز از رئوس مثلث، به گونه‌ای قرار دارند که

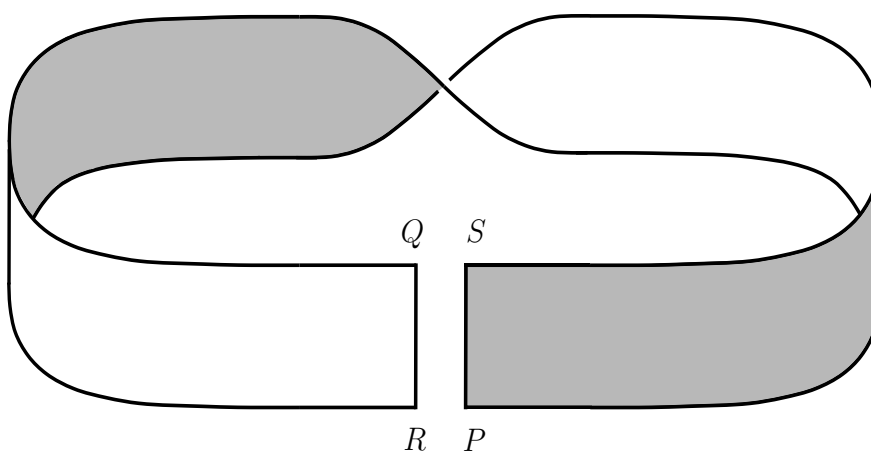
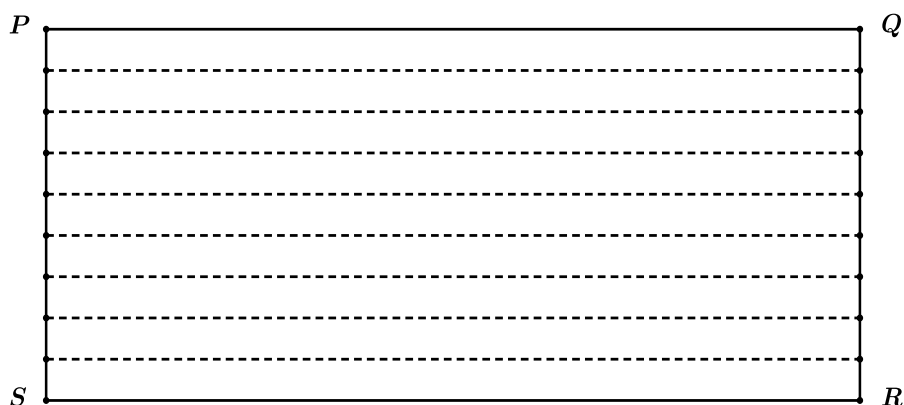
$$AX = AB, BY = BC, CZ = CA$$

می‌دانیم مثلثی با طول اضلاع برابر با طول پاره‌خط‌های CX, AY, BZ یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌های 30° و 60° است. اختلاف کوچک‌ترین زاویه مثلث ABC با 15° درجه چند است؟

۲۴. تعداد اعداد طبیعی n را بیابید که اگر $d_1 < d_2 < \dots < d_k$ تمام شمارنده‌های مثبت n باشند، آن‌گاه i وجود داشته‌باشد که $d_i + 25 = d_{k-1}$ برقرار باشد.

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۲ (۵) بی‌نهایت

۲۵. ایمان یک نوار مستطیلی به شکل زیر دارد. این مستطیل با ۸ خط موازی با خط PQ به ۹ مستطیل هم‌نهشت تقسیم شده‌است. این خطوط با خط‌چین در شکل بالاتر مشخص شده‌اند. او می‌خواهد اضلاع PS و QR را طوری به هم بچسباند که نقطه P به R و نقطه Q به S بچسبند. او این کار را مطابق شکل پایین‌تر، با پشت و رو کردن یک نیمه از نوار و سپس چسباندن اضلاع یاد شده انجام می‌دهد. ایمان پس از چسباندن اضلاع، شکل حاصل را از ۸ خط‌چین مشخص شده برش می‌زند. با این کار در نهایت شکل حاصل چند تکه خواهد بود؟





این صفحه جهت استفاده به عنوان چرک نویس در نظر گرفته شده است



این صفحه جهت استفاده به عنوان چرک نویس در نظر گرفته شده است



این صفحه جهت استفاده به عنوان چرک نویس در نظر گرفته شده است



این صفحه جهت استفاده به عنوان چرک نویس در نظر گرفته شده است



این صفحه جهت استفاده به عنوان چرک نویس در نظر گرفته شده است



این صفحه جهت استفاده به عنوان چرک نویس در نظر گرفته شده است



این صفحه جهت استفاده به عنوان چرک نویس در نظر گرفته شده است



این صفحه جهت استفاده به عنوان چرک نویس در نظر گرفته شده است