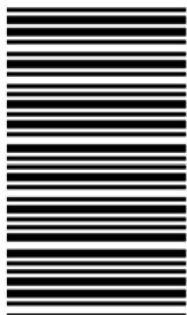


کد کنترل

689A



689A

صبح جمعه

۱۴۰۴/۱۱/۱۰

دفترچه شماره ۲ از ۲



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان بنیاد آموزش کشور

«علم و تحقیق، کلید پیشرفت کشور است.»
مقام معظم رهبری

آزمون ورودی دوره‌های دکتری (نیمه‌متمرکز) – سال ۱۴۰۵
آمار (کد ۲۲۳۲)

مدت زمان پاسخ‌گویی: ۱۳۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵ سؤال

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مبانی آنالیز ریاضی – ریاضی عمومی (۱ و ۲) – احتمال (۱ و ۲)	۳۰	۱	۳۰
۲	استنباط آماری ۱	۱۵	۳۱	۴۵

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات کادر زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ نامه و دفترچه سؤالات، نوع و کدکنترل درج شده بر روی جلد دفترچه سؤالات و پایین پاسخ نامه ام را تأیید می نمایم.

امضا:

مبانی آنالیز ریاضی - ریاضی عمومی (۱ و ۲) - احتمال (۱ و ۲):

۱- فرض کنید به ازای $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x \leq 1$ داشته باشیم: $f_n(x) = \frac{n-1}{n+1} x^n$ و $g_n(x) = \frac{(\cos x)^n}{n}$. اگر

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ و } g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x), \text{ آنگاه کدام مورد درست است؟}$$

(۱) f و g پیوسته هستند.

(۲) f و g ناپیوسته هستند.

(۳) تابع f پیوسته و تابع g ناپیوسته است.

(۴) تابع f ناپیوسته و تابع g پیوسته است.

۲- کدام مورد برای دنباله توابع $\left(\sqrt{x^2 \cos^2 x + \frac{1}{n^3}} \right)_{n=1}^{\infty}$ روی $\mathbb{R}$ درست است؟

(۱) همگرایی نقطه‌ای به یک تابع کران دار است.

(۲) همگرایی نقطه‌ای به یک تابع مشتق پذیر است.

(۳) همگرایی یکنواخت به یک تابع پیوسته است.

(۴) همگرایی یکنواخت نیست.

۳- کدام مورد برای توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ روی بازه $[0, \infty)$ ، درست است؟

(۱) f و g پیوسته یکنواخت نیستند.

(۲) f و g پیوسته یکنواخت هستند.

(۳) f پیوسته یکنواخت است، ولی g پیوسته یکنواخت نیست.

(۴) f پیوسته یکنواخت نیست، ولی g پیوسته یکنواخت است.

۴- اگر (X, d) یک فضای متریک و $A \subseteq X$ ، آنگاه کدام مورد درست است؟

$$(1) \partial(\bar{A}) \subseteq \partial(A)$$

$$(2) \partial(\bar{A}) \subseteq \partial(A')$$

$$(3) \partial(A') \subseteq \partial(A^\circ)$$

$$(4) \partial(A^\circ) \subseteq \partial(A')$$

۵- فرض کنید $Y = [0, 2] \cup (3, 7)$. کدام زیرمجموعه Y در فضای متریک $(Y, |\cdot|)$ هم باز و هم بسته است؟

(۱) $(0, 2)$

(۲) $[0, 2]$

(۳) $[0, 2)$

(۴) $(0, 2]$

۶- اگر $\overline{z} + z = 1$ ، آنگاه کدام مورد برای عدد مختلط z درست است؟

(۱) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$

(۲) $\overline{z} = 0$

(۳) $\operatorname{Im}(z) = 0$

(۴) $\operatorname{Re}(z) = 0$

۷- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2(3^n + 4^n)}$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۳

(۴) ۴

۸- مقدار $\int_0^1 \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{5}{3}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $+\infty$

(۴) مقدار آن وجود ندارد.

۹- اگر $a \geq 0$ و $T(a) = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x} dx$ ، آنگاه $T(a)$ کدام است؟ (راهنمایی: از $T'(a)$ استفاده کنید).

(۱) $\ln(a+1)$

(۲) $a \ln(a+1)$

(۳) $\frac{a}{1+a}$

(۴) $-\ln(a+1)$

۱۰- شعاع انحنای منحنی $x^2y = 1$ در نقطه $(1, 1)$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

(۲) $\frac{5\sqrt{5}}{6}$

(۳) $\frac{6}{5\sqrt{5}}$

(۴) $\frac{3}{5\sqrt{5}}$

۱۱- مقدار مشتق جهتی تابع $f(x, y) = \begin{cases} \sin(xy) & y < x^2 \\ 0 & y \geq x^2 \end{cases}$ در راستای بردار $\hat{i} + \hat{j}$ ، در مبدأ مختصات کدام است؟

(۱) -۱

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) صفر

(۴) وجود ندارد.

۱۲- اگر $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ، آنگاه مقدار $\iint_D \frac{1}{1+|x-y|} dx dy$ کدام است؟

(۱) $2 \ln 2 - 2$

(۲) $2 \ln 2 + 2$

(۳) $4 \ln 2 + 2$

(۴) $4 \ln 2 - 2$

۱۳- میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{\rho^2}(y - z, z - x, x - y)$ و $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ مفروض اند. فرض کنید S سطح

یک رویه هموار بسته است که از مبدأ مختصات عبور نمی‌کند و ناحیه D در فضای $\mathbb{R}^3$ را محصور

می‌کند. مقدار $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $\frac{2\pi}{3}$

(۳) $\frac{4\pi}{3}$

(۴) $\frac{8\pi}{3}$

۱۴- فرض کنید $U \sim u(0,1)$ و قرار دهید $X = \ln \frac{U}{1-U}$. در این صورت امید ریاضی X کدام مورد است؟

(۱) -۱

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) صفر

۱۵- متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر است که در آن $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ است. بیشترین مقدار واریانس به ازای چه

مقداری از θ حاصل می‌گردد؟

x	-۱	۰	۱
$P(X=x)$	$\frac{\theta}{2}$	$1-\theta$	$\frac{\theta}{2}$

(۱) ۱

(۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۶- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با مقادیر $\{1, 2, 3, \dots\}$ و تابع مولد احتمال $G(t) = \frac{2t}{3-t}$ ، $0 < t < 1$ باشد.

مقدار $P(X=2)$ کدام است؟(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{9}$

۱۷- فرض کنید X دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ است. از جعبه‌ای که در آن ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه وجود دارد، مهره‌ای

به طور تصادفی انتخاب و تعریف می‌کنیم: $Y = \begin{cases} X & \text{اگر مهره سفید باشد} \\ -X & \text{اگر مهره سیاه باشد} \end{cases}$ ، مقدار $E\left(e^{\frac{Y}{2}}\right)$ کدام است؟

(۱) $\frac{9}{15}$ (۲) $\frac{11}{15}$ (۳) $\frac{17}{15}$ (۴) $\frac{22}{15}$

- ۱۸- یک زوج سه فرزند دارند. دو فرزند به طور تصادفی در هر روز هفته برای دریافت مکمل غذایی (با انتخاب‌های مستقل در هر روز هفته) انتخاب می‌شوند. احتمال اینکه حداقل یکی از فرزندان در هر روز هفته انتخاب شود، کدام است؟

$$\frac{2^6}{3^7} \quad (1)$$

$$\frac{2^6 - 1}{3^7} \quad (2)$$

$$\frac{2^7 - 1}{3^6} \quad (3)$$

$$\frac{2^7 - 1}{3^7} \quad (4)$$

- ۱۹- اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسون با میانگین λ باشد، شرط متناهی بودن $E(X!)$ چیست؟

$$1 \leq \lambda \quad (1)$$

$$0 < \lambda < 1 \quad (2)$$

$$1 < \lambda < 2 \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} < \lambda < 2 \quad (4)$$

- ۲۰- فرض کنید $X \sim u(0, 1)$ ، واریانس $Y = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{1}{1-X}}\right)$ چقدر است؟

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\frac{1}{9} \quad (3)$$

$$\frac{1}{27} \quad (4)$$

- ۲۱- مصرف روزانه آب (برحسب میلیون لیتر) در یک شهر، متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x-5) & 5 \leq x < 6 \\ \frac{1}{3}(8-x) & 6 \leq x < 8 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

- میانگین مصرف روزانه آب چقدر است؟

$$8 - \sqrt{2} \quad (1)$$

$$6 + \sqrt{3} \quad (2)$$

$$6 + \sqrt{2} \quad (3)$$

$$8 - \sqrt{3} \quad (4)$$

۲۲- فرض کنید (X, Y) دارای تابع چگالی توأم $0 < y < 1$ و $0 < x < 1$ و $f(x, y) = x + y$ باشد. مقدار ضریب همبستگی X و Y کدام است؟

$$(1) -\frac{1}{11}$$

$$(2) \frac{1}{2}$$

$$(3) \frac{1}{11}$$

$$(4) -\frac{1}{2}$$

۲۳- به ازای چه مقداری از θ تابع زیر یک تابع احتمال دو متغیره با اعداد صحیح نامنفی در ناحیه $0 \leq x < y < \infty$ است؟

$$P(x, y) = P(X = x, Y = y) = \theta^{x+y+2}$$

$$(1) \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$(2) \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$(3) \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$(4) \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

۲۴- فرض کنید X دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = 2$ و $y = 0, 1, \dots, X$ در $P(Y = y | X = x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & y = 0, 1, \dots, x \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

این صورت $\text{Var}(Y)$ کدام است؟

$$(1) \frac{3}{2}$$

$$(2) \frac{4}{3}$$

$$(3) \frac{1}{3}$$

$$(4) \frac{1}{2}$$

۲۵- فرض کنید $Z \sim N(0, 1)$ و S یک علامت تصادفی مستقل از Z باشد، یعنی S با احتمال $\frac{1}{4}$ برابر ۱ و با احتمال $\frac{1}{4}$

برابر -۱ است. توزیع SZ کدام است؟

$$(1) N(0, 1)$$

$$(2) \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$(3) X_{(1)}^2$$

$$(4) \text{تباهیده در صفر}$$

۲۶- اگر $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی دارای توزیع $N(1, \frac{1}{n})$ باشد، توزیع حدی X_n کدام است؟

$$X_n \xrightarrow{D} 0 \quad (1)$$

$$X_n \xrightarrow{D} N(1, 1) \quad (2)$$

$$X_n \xrightarrow{D} 1 \quad (3)$$

(۴) توزیع حدی ندارد.

۲۷- فرض کنید $Y \sim t(1)$ و $X \sim N(0, 1)$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند. مقدار $P\left[E(X^2 + Y | X) < \frac{1}{4}\right]$ کدام است؟

$$\Phi\left(\frac{1}{4}\right) \quad (1)$$

$$2\Phi\left(\frac{1}{4}\right) - 1 \quad (2)$$

$$\Phi\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} \quad (3)$$

$$1 - \Phi\left(\frac{1}{4}\right) \quad (4)$$

۲۸- فرض کنید $X \sim \text{bin}(n, \frac{1}{4})$ باشد. دقیق‌ترین نابرابری کدام است؟

$$E\left(\frac{X}{n-X}\right) \leq 1 \quad (1)$$

$$E\left(\frac{X}{n-X}\right) \leq 2 \quad (2)$$

$$E\left(\frac{X}{n-X}\right) \geq 2 \quad (3)$$

$$E\left(\frac{X}{n-X}\right) \geq 1 \quad (4)$$

۲۹- اگر X_1, X_2 دو متغیر تصادفی مستقل نرمال با میانگین صفر و واریانس ۴ باشند، مقدار $E(\min(X_1, X_2))$ کدام است؟

$$-\frac{4}{\sqrt{\pi}} \quad (1)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \quad (4)$$

۳۰- دو متغیر تصادفی مستقل X و Y هریک دارای توزیع $\text{bin}(1, \frac{1}{4})$ هستند. $\text{Var}(\sqrt{XY})$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{16} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۴)$$

استنباط آماری ۱:

۳۱- فرض کنید X دارای توزیع $\text{Bin}(n, \theta)$ است که $\theta \in \{0, 1\}$. تحت تابع زیان توان دوم خطا، کدام برآوردگر برای θ مجاز است؟

$$\delta(X) = \frac{X}{n} \quad (۱)$$

$$\delta(X) = \frac{X(n-X)}{n} \quad (۲)$$

$$\delta(X) = \frac{(n-X)^2}{n} \quad (۳)$$

$$\delta(X) = 1 \quad (۴)$$

۳۲- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left[-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right]; x > 0, \lambda > 0, \mu > 0$$

$$(\bar{X}, S^2) \quad (۱)$$

$$(\sum X_i, \sum X_i^2) \quad (۲)$$

$$(\frac{1}{\bar{X}}, \sum \frac{1}{X_i^2}) \quad (۳)$$

$$\left(\bar{X}, \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{X_i} - \frac{1}{\bar{X}}\right)\right) \quad (۴)$$

۳۳- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی $f(x; \lambda) = \frac{2\lambda}{x^3} e^{-\frac{\lambda}{x^2}}$; $x > 0, \lambda > 0$ باشد،

برآوردگر UMVU برای λ کدام است؟

$$\frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \quad (1)$$

$$\frac{n-1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i^2}} \quad (2)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i^2}}{n-1} \quad (3)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n-1} \quad (4)$$

۳۴- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی $f_\theta(x) = \theta e^{-\theta(x-1)}$, $x > 1, \theta > 0$ باشد. اگر $\bar{X}$ میانگین نمونه باشد، $E\left(\frac{X_{(1)} - 1}{\bar{X} - 1}\right)$ کدام است؟

$$\frac{1}{n} \quad (1)$$

$$\frac{1}{n+1} \quad (2)$$

$$\frac{n-1}{n} \quad (3)$$

$$\frac{n}{n+1} \quad (4)$$

۳۵- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی $f_\theta(x) = \frac{3x^2}{\theta^3}$, $0 < x < \theta$ باشد. برآوردگر

UMVU برای θ^3 کدام است؟

$$\frac{n}{n+1} X_{(n)}^3 \quad (1)$$

$$\frac{3n+1}{3n} X_{(n)}^3 \quad (2)$$

$$\frac{n+1}{n} X_{(n)}^3 \quad (3)$$

$$\frac{3n}{3n+1} X_{(n)}^3 \quad (4)$$

۳۶- اگر $X_1, \dots, X_m$ و $Y_1, \dots, Y_n$ به ترتیب دو نمونه تصادفی مستقل از توزیع‌های نمایی با میانگین θ و 2θ باشند، برآوردگر UMVU برای θ کدام است؟

$$(1) \frac{m\bar{X} + 2n\bar{Y}}{m+n}$$

$$(2) \frac{2m\bar{X} + n\bar{Y}}{2(m+n)}$$

$$(3) \frac{2m\bar{X} + n\bar{Y}}{m+n}$$

$$(4) \frac{m\bar{X} + 2n\bar{Y}}{2(m+n)}$$

۳۷- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر $\theta \in (0, 1)$ است. تحت توزیع پیشین $\text{beta}(\alpha, \beta)$ برای θ و تابع زیان توان دوم خطا، برآوردگر بیزی به صورت $\lambda \hat{\theta}_{ML} + (1-\lambda)\mu_\theta$ است که در آن $\hat{\theta}_{ML}$ برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی θ و μ_θ میانگین توزیع پیشین است. مقدار λ کدام است؟

$$(1) \frac{n}{\alpha + \beta}$$

$$(2) \frac{\alpha + \beta}{n + \alpha + \beta}$$

$$(3) \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$(4) \frac{n}{n + \alpha + \beta}$$

۳۸- فرض کنید X دارای توزیع نمایی با تابع چگالی $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, $\lambda > 0$ باشد. تحت توزیع پیشین ناسره

$\pi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$ برای پارامتر λ ، برآوردگر بیزی پارامتر λ تحت تابع زیان قدر مطلق خطا کدام است؟

$$(1) \frac{\text{Ln} 2}{X}$$

$$(2) \frac{1}{X}$$

$$(3) X$$

$$(4) \frac{X}{\text{Ln} 2}$$

۳۹- اگر $X \sim N(\theta, 1)$ به طوری که $\theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ، تحت تابع زیان توان دوم خطا و تابع پیشین $\pi(\theta) = \frac{1}{2} I\left(\theta\right)_{\left\{-\frac{1}{2}\right\}} + \frac{1}{2} I\left(\theta\right)_{\left\{\frac{1}{2}\right\}}$

برآوردگر بیز پارامتر θ کدام است؟

$$\frac{\frac{\frac{X}{2}}{e^{\frac{X}{2}} - e^{-\frac{X}{2}}} }{\frac{\frac{X}{2}}{e^{\frac{X}{2}} + e^{-\frac{X}{2}}}} \quad (1)$$

$$\frac{\frac{\frac{X}{2}}{e^{\frac{X}{2}} - e^{-\frac{X}{2}}} }{\frac{\frac{X}{2}}{e^{\frac{X}{2}} + e^{-\frac{X}{2}}}} \quad (2)$$

$$\frac{\frac{\frac{X}{2}}{e^{\frac{X}{2}} + e^{-\frac{X}{2}}} }{\frac{\frac{X}{2}}{e^{\frac{X}{2}} - e^{-\frac{X}{2}}}} \quad (3)$$

$$\frac{\frac{\frac{X}{2}}{e^{\frac{X}{2}} + e^{-\frac{X}{2}}} }{\frac{\frac{X}{2}}{e^{\frac{X}{2}} - e^{-\frac{X}{2}}}} \quad (4)$$

۴۰- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $\alpha > 0, \beta > 0, x > 0$ و

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

C میانگین توان دوم خطای T مینیمم می‌شود؟

(۱)

$$\frac{1+n}{1+10n} \quad (2)$$

$$\frac{n}{1+10n} \quad (3)$$

$$\frac{10+n}{10n} \quad (4)$$

۴۱- فرض کنید $(X_{11}, X_{21}), \dots, (X_{1n}, X_{2n})$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع دومتغیره $N_2\left(\begin{pmatrix} \theta \\ \theta^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ باشد. کدام

مورد زیر بسنده مینیمال برای θ است؟

$$\sum_{i=1}^n X_{1i} \quad (۱)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_{1i}, \sum_{i=1}^n X_{2i}^2 \right) \quad (۲)$$

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n X_{ji} \quad (۳)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_{1i}, \sum_{i=1}^n X_{2i} \right) \quad (۴)$$

۴۲- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه تصادفی از جامعه‌ای با چگالی احتمال $0 < p < 1$ ، $f(x, p) = \begin{cases} pe^{-x} & x > 0 \\ (1-p)e^x & x \leq 0 \end{cases}$ باشد. کدام p پارامتر مجهول است. آماره بسنده کامل برای p کدام است؟

$$\sum_{i=1}^n I(X_i > 0) \quad (۱)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i I(X_i > 0) \quad (۲)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i I(X_i > 0), \sum_{i=1}^n I(X_i \leq 0) \right) \quad (۳)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n I(X_i > 0) \right) \quad (۴)$$

۴۳- براساس یافته‌های نمونه تصادفی ۵ تایی $0, 1, 2, -1, -1$ از توزیعی با تابع احتمال

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta & x = -1 \\ (1-\theta)^2 \theta^x & x = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad 0 < \theta < 1$$

برآورد ماکسیمم درست‌نمایی θ کدام است؟

$$\frac{5}{7} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{11} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{5} \quad (۴)$$

۴۴- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ مقادیر مشاهده شده یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی $f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1, \theta \in \{1, 2\}$ باشد. برآورد ماکسیمم درستنمایی (MLE) پارامتر θ کدام است؟

$$\hat{\theta}_{ML} = \begin{cases} 2 & \prod_{i=1}^n x_i \leq (\frac{1}{2})^n \\ 1 & \prod_{i=1}^n x_i > (\frac{1}{2})^n \end{cases} \quad (1)$$

$$\hat{\theta}_{ML} = \begin{cases} 2 & \prod_{i=1}^n x_i \geq (\frac{1}{2})^n \\ 1 & \prod_{i=1}^n x_i < (\frac{1}{2})^n \end{cases} \quad (2)$$

$$\hat{\theta}_{ML} = \begin{cases} 2 & \prod x_i \geq \frac{1}{2} \\ 1 & \prod x_i < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3)$$

$$\hat{\theta}_{ML} = \begin{cases} 2 & \prod x_i \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \prod x_i > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4)$$

۴۵- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_{\mu}(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\phi(x-\mu), \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

که در آن $\phi(\cdot)$ تابع چگالی توزیع نرمال استاندارد است. برآوردگر μ به روش گشتاوری کدام است؟

$$\bar{X} - \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\bar{X}}{2} \quad (2)$$

$$2\bar{X} \quad (3)$$

$$\bar{X} + \frac{1}{2} \quad (4)$$

