



# مشاوره تحصیلی هیوا

تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

مشاوره تخصصی ثبت نام مدارس ، برنامه ریزی درسی و آمادگی  
برای امتحانات مدارس

برای ورود به صفحه مشاوره مدارس کلیک کنید

برای ورود به صفحه نمونه سوالات امتحانی کلیک کنید

تماس با مشاور تحصیلی مدارس

۹۰۹۹۰۷۱۷۸۹



تماس از تلفن ثابت

## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

به نام او

راه حل سؤالات مرحله اول سی و یکمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۹۱

۱- پاسخ : ۵ ؛ توجه کنید که در یک خانواده ی  $n$  نفری،  $n$  نفر زندگی می کنند! پس پاسخ سؤال این گونه محاسبه می شود:

$$\frac{2 \times 10}{2 \times 10 + 3 \times 30 + 4 \times 30 + 5 \times 10 + 6 \times 20} = \frac{20}{400} = 5\%$$

۲- پاسخ : ۴ ؛  $(a + 1)(b + 1) = ab \Rightarrow ab + a + b + 1 = ab \Rightarrow a = -(b + 1)$  پس اکنون داریم که

$$\frac{a^2}{b} = \frac{(b+1)^2}{b} = 2 + b + \frac{1}{b}$$

و با استفاده از نامساوی حسابی هندسی داریم:  $2 + b + \frac{1}{b} \geq 2 + 2\sqrt{b \times \frac{1}{b}} = 4$  و این مقدار با قرار دادن  $a = -2$  و  $b = 1$  به دست می آید.

۳- پاسخ : ۲ ؛ توجه کنید که عدد ۳ تنها می تواند کنار عدد ۱ قرار گیرد. عدد ۱ تنها می تواند کنار اعداد ۳ و ۲ قرار گیرد. عدد ۲ تنها می تواند کنار عددهای ۴ و ۱ قرار گیرد و عدد ۴ تنها می تواند کنار عدد ۲ قرار گیرد. با این توضیحات اعداد ۳ و ۴ نمی توانند به عنوان رقم دوم یا سوم قرار گیرند، پس یکی از آنها در جای گاه اول و دیگری در جای گاه چهارم است. اکنون با اندکی بررسی می فهمیم که در کل دو عدد خوب داریم: ۳۱۲۴ و ۴۲۱۳.

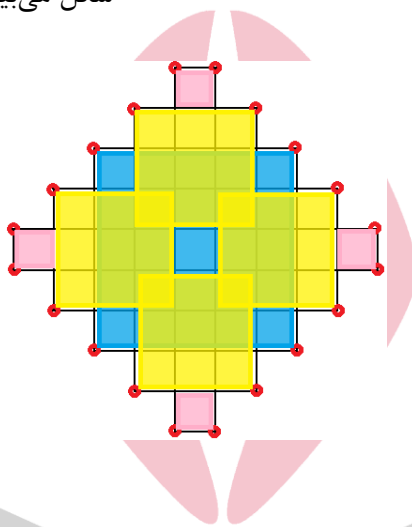
۴- پاسخ : ۵ ؛ عمود وارد از نقاط  $A$  و  $B$  بر خط  $CD$  را به ترتیب  $X$  و  $Y$  می نامیم. از آن جایی که در مثلث قائم الزاویه، ضلع مقابل به زاویه ی  $30^\circ$  درجه نصف وتر است، پس  $DX$  و  $GY$  برابر ۱ هستند. پس  $CD$  برابر  $1 + 4 + 1 = 6$  است. طبق قضیه ی

تالس می دانیم  $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$  پس مقدار خواسته شده برابر  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  است.



## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

۵- پاسخ : ۹ ؛ گوشه‌های تیز شکل (نقاط قرمز) را در نظر بگیرید. تعداد این گوشه‌ها ۲۰ تا است و پس از پوشانده شدن شکل، این گوشه‌ها، توسط رئوس مهرها پوشانده می‌شوند. توجه کنید که به جز مهر مربعی ۵×۵ که می‌تواند ۴ تا گوشه را بپوشاند، دیگر مهرها حداکثر می‌توانند ۲ گوشه را بپوشانند. همچنین استفاده‌ی بیش از یک بار مهر ۵×۵ موجب رنگی شدن خانه‌ی بار از مهرها استفاده کنیم  $n$  جدیدی نمی‌گردد (چون تنها یک راه برای قرار دادن یک مهر ۵×۵ در جدول داریم). پس اگر حداقل ۹ است. در  $n$  بیشتر نیست. این مقدار باید حداقل ۲۰ باشد، پس  $2(n-1) + 4$  تعداد گوشه‌های پوشانده شده از شکل می‌بینیم که ۹ مهر برای این کار کافی نیز هست.



۶- پاسخ : ۴ ؛ توجه کنید که  $y \neq -1$  زیرا در غیر این صورت با توجه به عبارت دوم نتیجه می‌گیریم که  $11 = -1$ . اکنون با استفاده از عبارت دوم، داریم که:  $x = \frac{11-y}{y+1} - 1 = \frac{11-y}{y+1}$  با جای گذاری  $x$  در عبارت اول داریم :

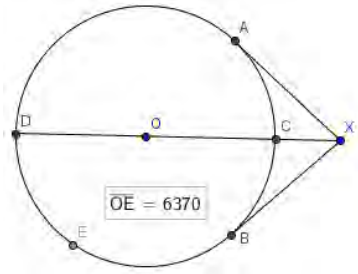
$$\left(\frac{11-y}{y+1}\right)^2 y + \frac{11-y}{y+1} y^2 = 3 \Rightarrow \frac{11-y}{y+1} y \left(\frac{11-y}{y+1} + y\right) = 3 \Rightarrow \left(\frac{11-y}{y+1}\right) y \left(\frac{11+y^2}{y+1}\right) = 3.$$

$$\Rightarrow (11-y)(11+y^2)y = 3(y+1)^2 \Rightarrow 121y - 11y^2 + 11y^3 - y^4 = 3y^2 + 6y + 3.$$

$$\Rightarrow y^4 - 11y^3 + 41y^2 - 61y + 3 = 0.$$

ریشه‌های چندجمله‌ای به دست آمده برابر ۱، ۲، ۳ و ۵ است. پس ۴ جواب داریم.

## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور



۷- پاسخ : 1824 ؛ می توان صورت سؤال را مانند شکل زیر تفسیر کرد. پس از صورت سؤال داریم که :  $XC = 256$ ,  $OC = OD = 6370$  و سؤال از ما طول  $XA$  را می خواهد. طبق رابطه ی قوت نقطه ی  $X$  داریم:

$$XA^2 = XC \cdot XD = 256 \times (2 \times 6370 + 256)$$

۸- پاسخ : ۲ ؛ اگر یکی از  $a$  یا  $b$  یا  $c$  یا  $d$  برابر یک باشد، تمام اعداد یک هستند و این خود یک جواب برای مسئله است. اکنون به دنبال دیگر جواب ها هستیم پس فرض می کنیم این اعداد همگی بزرگ تر مساوی ۲ اند. از ضرب سه رابطه داریم:

$$a^b b^c c^d d^a = a^2 b^2 c^2 d^2$$

ولی چون فرض کردیم همه ی چهار عدد مسئله بزرگ تر مساوی ۲ هستند خواهیم داشت:

$$a^b b^c c^d d^a \geq a^2 b^2 c^2 d^2$$

پس اکنون حالت تساوی رخ داده است و در نتیجه تمام اعداد ۲ هستند. این نیز یک جواب درست است. پس در کل ۲ جواب داریم.

۹- پاسخ : ۹۶۰ ؛ از خانه های سطر بالایی شروع می کنیم و روی هر خانه تعداد راه های رسیدن به خانه ی  $E$  را با شروع حرکت از آن خانه می نویسیم. همین کار را برای سطرها ی پایینی هم انجام می دهیم. اگر برای خانه ی  $X$ ، خانه هایی از سطر بالایی را در نظر بگیریم که می توان از  $X$  به آن ها رفت، طبق اصل جمع تعداد راه های رسیدن از  $X$  به  $E$  (با شروع حرکت از خود خانه ی  $X$ ) برابر مجموع تعداد راه های رسیدن از خانه های بالایی آن خانه به  $E$  است. پس شکل زیر به دست می آید و جواب ۹۶۰ است.

	$E:1$	۱	۱	
	۳	۳	۳	۳
۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۴۸	۴۸	۴۸	۴۸	
۹۶	۹۶		۴۸	۴۸
۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	
$S:960$	۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰

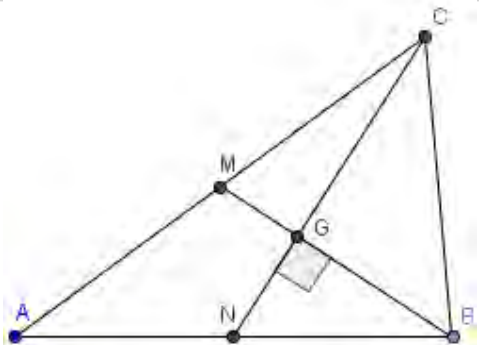
## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

۱۰- پاسخ : ۳۷ ؛ فرض کنید که  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots < a_n$  اعدادی باشند که ویژگی سوال را دارا هستند و فرض کنید  $a_1 = Xb_1^2$  که  $X$  عددی خالی از مربع (یعنی بر هیچ مربع کاملی بخش پذیر نیست) است. اکنون توجه کنید که طبق ادعای سؤال می توان نتیجه گرفت که برای هر  $i \geq 2$  :  $a_i = X \times b_i^2$  و چون  $b_i$  ها اعداد متمایز بزرگتر از ۱ و کوچکتر مساوی  $\sqrt{1391}$  هستند پس تعداد کل اعداد حداکثر  $\lfloor \sqrt{1391} \rfloor = 37$  است. حال توجه کنید که عدد  $1^2$  و  $2^2$  و ... و  $37^2$  در شرایط سوال صدق می کنند. پس جواب سوال ۳۷ است.

۱۱- پاسخ : ۴ ؛ کافی است توجه کنید که  $(x^y)^z = x^{y \times z}$  پس به سادگی و با استقرا می توان نشان داد که مقدار مورد نظر برابر  $a^{a^{b-1}}$  است.

۱۲- پاسخ : ۱۳ ؛ با توجه به این که میانه ها یکدیگر را به نسبت یک به دو قطع می کنند، دو مثلث  $MGN$  و  $BGC$  با نسبت یک به دو متشابه اند پس  $MN = \frac{BC}{3}$ . حال با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

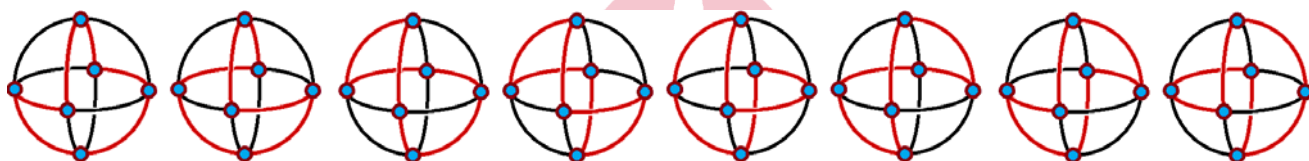
حال با جایگذاری مقادیر  $MC$  و  $NB$  داریم:  $MC^2 + NB^2 = 11^2 + \left(\frac{19}{2}\right)^2 = \frac{484+361}{4} = \frac{845}{4}$  پس مقدار  $BC^2$  برابر  $\frac{4}{5} \times \frac{845}{4} = 169$  خواهد بود و بنابراین  $BC$  برابر ۱۳ است.



## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

۱۳- پاسخ : ۳۲ ؛ به علت تقارن «نمکستان»ها، تعداد راه‌های رسیدن از «شکرستان» به «نمکستان شمالی» را حساب می‌کنیم و چهار برابر این عدد جواب مسأله خواهد بود. با حالت‌بندی کاملاً ساده به این نتیجه می‌رسیم که تمام راه‌های موجود دقیقاً ۸ راه (جهت‌دار) نمایش داده شده در شکل زیر هستند. پس ۳۲ حالت داریم.

(می‌توان برحسب این که نمکستان پشتی شهر چندم سفر است، حالت‌بندی را انجام داد.)



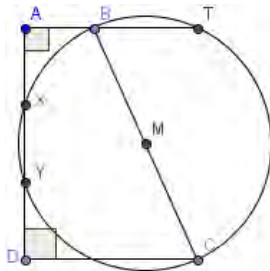
۱۴- پاسخ : ۱ ؛ فرض کنید برد  $f$  اعداد  $a_1, a_2, \dots, a_n$  و برد  $g$  اعداد  $b_1, b_2, \dots, b_n$  باشند. برد حاصل جمع حداکثر می‌تواند اعداد  $a_i + b_j (i \leq n, j \leq m)$  باشد و مثال برای این حداکثر می‌تواند این‌گونه باشد:  $f$  تابعی است که به اعداد طبیعی، باقی‌مانده‌ی آن‌ها به  $n$  را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد صفر می‌دهد.  $g$  تابعی است که به عدد طبیعی  $x$ ،  $n$  برابر باقی‌مانده‌ی  $\lfloor \frac{x}{n} \rfloor$  در تقسیم بر  $m$  را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد صفر می‌دهد. به سادگی می‌توان دید که  $mn$  عدد متمایز خواهیم داشت.

برد حاصل ضرب حداکثر می‌تواند اعداد  $a_i \times b_j (i \leq n, j \leq m)$  باشد و مثال برای این حداکثر می‌تواند این‌گونه باشد:  $f$  تابعی است که به اعداد طبیعی دو به توان باقی‌مانده‌ی آن‌ها به  $n$  را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد یک می‌دهد.  $g$  تابعی است که به عدد طبیعی  $x$ ، دو به توان  $n$  برابر باقی‌مانده‌ی  $\lfloor \frac{x}{n} \rfloor$  در تقسیم بر  $m$  را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد یک می‌دهد. به همان سادگی می‌توان دید که این  $mn$  عدد نیز متمایز اند.

در مورد ترکیب توابع چون برد تابع  $f$ ،  $m$  عضوی است پس خروجی  $f \circ g$  نیز حداکثر  $m$  عضو دارد. از طرفی چون تابع  $g$  حداکثر  $n$  خروجی دارد پس  $f \circ g$  نیز نمی‌تواند بیش از  $n$  خروجی داشته باشد. پس حداکثر اعضای برد  $\min\{m, n\}$  است. برای این حالت یک مثال می‌تواند این باشد که:  $f$  به اعداد  $1$  تا  $n$  خودشان و به بقیه‌ی اعداد  $1$  را نسبت می‌دهد. هم‌چنین  $g$  به اعداد  $1$  تا  $m$  خودشان و به بقیه‌ی اعداد  $1$  را نسبت می‌دهد. به سادگی می‌توان دید که این مثال حداکثر ادعا شده را می‌دهد. پس جواب گزینه‌ی ۱ است.

## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

۱۵- پاسخ : ۲ ؛ از رابطه‌ی قوت داریم:  $AX \times AY = AB \times AT = ۱ \times DC = q$  از طرفی  $AX = YD$  پس:  
 $AX + AY = AY + YD = AD = r$  و چون  $(x - AX)(x - AY) = x^2 - (AX + AY)x + AX \times AY$  پس  
 پاسخ سوال  $x^2 - rx + q$  است.



۱۶- پاسخ : ۳ ؛ دقت کنید که اگر تعداد عوامل ۳ در صورت و مخرج کسر متفاوت باشد، بعد از ساده کردن دقیقاً یکی از صورت و مخرج بر ۳ بخش پذیر است و دیگری نیست و در نتیجه حاصل جمع آن‌ها نمی‌تواند بر ۳ بخش پذیر باشد. پس تنها باید کسرهایی را بررسی کنیم که صورت آن‌ها دو عامل ۳ دارد. این کسرها بعد از ساده کردن به شکل  $\frac{n}{۱۰}$  در می‌آید که  $n$  بر ۳ بخش پذیر نیست. دقت کنید که ضرب صورت و مخرج کسر در عددی که بر ۳ بخش پذیر نیست ویژگی مورد نظر را تغییر نمی‌دهد پس کافی است این کسرها بررسی شوند. با بررسی این کسرها می‌بینیم که تنها سه کسر  $\frac{۲}{۱۰}$ ،  $\frac{۵}{۱۰}$  و  $\frac{۴}{۱۰}$  این خاصیت را دارا هستند. پس پاسخ مسئله برابر ۳ است.

۱۷- پاسخ : ۳۰۰ ؛ توجه کنید که در مرحله  $n$ ، روی هر خانه، تعداد گشت‌های به طول  $n$  از مبدأ به آن خانه نوشته می‌شود. پس برای حل سوال باید تعداد گشت‌های از مبدأ به خانه‌ی  $(۱, ۱)$  را حساب کنیم. این معادل شمارش تعداد دنباله‌های به طول ۶ از حروف  $U, R, D$  و  $L$  است که  $R = L + ۱$  و  $U = D + ۱$  و به علاوه حاصل جمع آن‌ها برابر شش است. توجه کنید که حروف  $U, R, D$  و  $L$  نمایش‌گر بالا و راست و پایین و چپ هستند. پس سه حالت داریم.

حالت ۱.  $U = ۳, D = ۲, R = ۱, L = ۰$  در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر  $۶۰ = \frac{۶!}{۰!۱!۲!۳!}$  است.

حالت ۲.  $U = ۲, D = ۱, R = ۲, L = ۱$  در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر  $۱۸۰ = \frac{۶!}{۱!۲!۱!۲!}$  است.

حالت ۳.  $U = ۰, D = ۱, R = ۳, L = ۲$  در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر  $۶۰ = \frac{۶!}{۲!۳!۰!۱!}$  است.

پس در کل  $۶۰ + ۱۸۰ + ۶۰ = ۳۰۰$  حالت داریم.

## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

۱۸- پاسخ: ۲؛ فرض کنید اعداد ما  $p < q < r < s$  باشند. داریم:  $pq < pr < ps, qr < qs < rs$  پس دو حالت داریم:

حالت ۱:  $pq = ۲, pr = ۸, ps = ۹, qr = ۳۲, qs = ۳۶, rs = ۱۴۴$  در این حالت با تقسیم روابط داریم که:

$$\text{و با توجه به این که } pq = ۲ \text{ پس } p = \frac{1}{۲}\sqrt{۲} \text{ و در نتیجه } q = ۲\sqrt{۲}, r = ۸\sqrt{۲} \text{ و } s = ۹\sqrt{۲}.$$

حالت ۲:  $pq = ۲, pr = ۸, qr = ۹, ps = ۳۲, qs = ۳۶, rs = ۱۴۴$  در این حالت با تقسیم روابط داریم که:

$$\text{و با توجه به این که } pq = ۲ \text{ پس } p = \frac{۲}{۳} \text{ و در نتیجه } q = \frac{۳}{۲}, r = ۶ \text{ و } s = ۲۴.$$

و توجه کنید که هر دوی این جوابها درست هستند.

۱۹- پاسخ: ۳؛

مثال نقض برای گزینه ۱: از آنجایی که همیشه  $p_i \geq ۲$ ،  $f$  هیچ عددی نمی تواند ۲ باشد.

مثال نقض برای گزینه ۲:  $f(۳) = ۱ = f(۲)$  پس  $f$  یک به یک نیست.

مثال نقض برای گزینه ۴:  $m = ۴, n = ۸ \Rightarrow f(۴)f(۸) = ۴ \times ۹ = ۳۶ > ۲۵ = f(۳۲)$

مثال نقض برای گزینه ۵:  $m = ۲, n = ۲ \Rightarrow f(۲)f(۲) = ۱ \times ۱ = ۱ < ۴ = f(۴)$

دلیل درستی گزینه ۳: خروجی تابع نمی تواند از یک عامل اول تنها یکی داشته باشد زیرا توان هر  $r_i$ ،  $p_i$  است و اعداد اول ( $p_i$  ها)، بزرگتر مساوی دو هستند. حال ادعا می کنیم که این شرط کافی نیز هست یعنی اعداد به شکل  $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$  ( $r_i \geq ۲$ ) دقیقاً در برد هستند. اثبات ادعا: فرض کنید بخواهیم خروجی تابع عدد  $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$  ( $r_i \geq ۲$ ) باشد. توجه کنید که هر عدد بزرگتر مساوی ۲ را می توان به صورت جمع مضارب نامنفی از ۲ و ۳ نوشت پس فرض کنید  $r_i = ۲a_i + ۳b_i$ . اکنون توجه کنید که خروجی تابع برای  $۲^{a_1} ۲^{a_2} \dots ۲^{a_k} ۳^{b_1} ۳^{b_2} \dots ۳^{b_k}$  برابر



## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

ضرب بسته‌اند، گزینه‌ی ۳ درست است.  $p_k = \frac{2a_1+2b_1}{p_2} \dots \frac{2a_k+2b_k}{p_k}$  است که این همان مقدار مورد نظر است. همچنین چون اعداد معرفی شده نسبت به

۲۰- پاسخ : ۴ ؛ اگر چرخ را ۶ بار ۶۰ درجه بچرخانیم، میله هر بار مقدار ثابتی را جارو می‌کند و در نهایت یک دور کامل می‌زند. پس از ۳۶۰ درجه چرخش، دایره‌ی بزرگی به شعاع  $\sqrt{2}$  ایجاد خواهد شد. درون این دایره، دایره‌ای به شعاع ۱۰۰ است که خود چرخ بوده و در نتیجه جارو نمی‌شود. پس مساحت جارو شده برابر

است. حال توجه کنید که این مساحت برای ۶ بار چرخش است. پس مساحت جارو شده پس از طی ۶۰ درجه  $\frac{314}{6}$  است و نزدیکترین عدد صحیح به این مساحت ۵۰ است.

۲۱- پاسخ : ۵۲ ؛ می‌دانیم  $a_{n+2} = \max\{a_{n+1} - 1, a_n + 1\}$  پس  $a_n \leq a_{n+2} - 1$  با چند بار استفاده از این رابطه داریم:  $52 \leq 48 \leq a_{100} - 1 \leq a_8 - 2 \leq \dots \leq a_4 - 1 \leq a_3 \leq 53$  و چون  $a_n \leq a_{n+2} - 1$  پس  $a_1 \leq a_3 - 1 \leq 52$ . پس ثابت کردیم که اولین عضو دنباله کم‌تر مساوی ۵۲ است. حال برای این کران بالا مثال می‌آوریم:  $a_{2n} = 51 + n$  و  $a_{2n+1} = 52 + n$ .

۲۲- پاسخ : ۵ ؛ ادعا می‌کنیم که احسان هر گونه بازی کند حسام می‌تواند بازی را ببرد. برای اثبات ادعا این الگوریتم را برای حسام ارایه می‌دهیم. (این الگوریتم را می‌توان نوعی تقلید دانست.)

الگوریتم: اگر احسان مهره‌ای قرار داد، مهره‌ای کنار آن مهره قرار بده و اگر احسان مهره‌ای را بالا برد، مهره‌ای که کنار مهره‌ی حرکت داده شده بود را بالا ببر. با این الگوریتم پس از هر حرکت حسام، سطرها یا کاملاً پر و یا کاملاً خالی می‌شوند. پس احسان در هنگام حرکتش یا باید یک سطر را نیمه‌پر کند که حسام می‌تواند الگوریتم را اجرا کند و یا باید یک خانه از یک سطر پر را یک واحد بالا(به سطر تمام خالی بالایی) ببرد و در این حالت نیز حسام می‌تواند طبق الگوریتم حرکت خود را انجام دهد. پس برای هر حرکت احسان، حسام یک حرکت تضمین شده دارد که وضعیت بازی را مناسب برای حرکات بعدی

## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

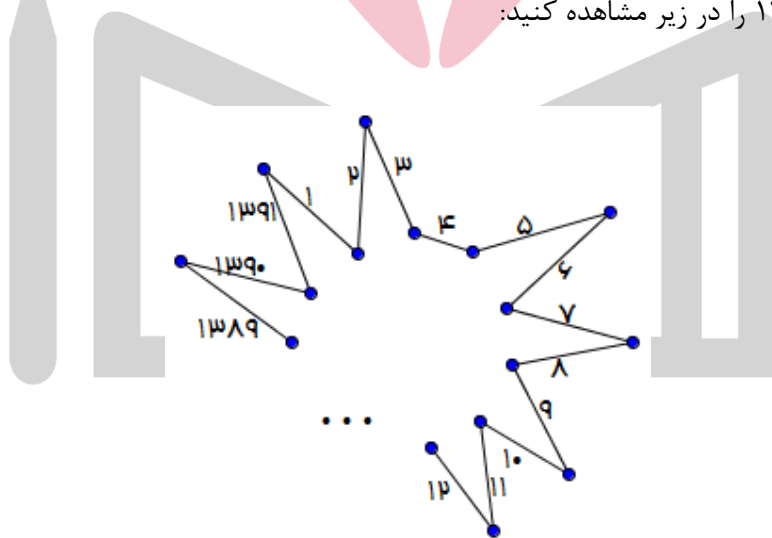
می‌کند. چون بازی بالاخره تمام می‌شود پس در نهایت کسی بدون حرکت می‌ماند. این فرد حسام نیست پس احسان است! پس حسام بازی را می‌برد.

۲۳- پاسخ : ۱۰ ؛ ب.م.م  $x$  و  $y$  را برابر  $d$  می‌گیریم.  $x'$  و  $y'$  را حاصل تقسیم  $x$  و  $y$  بر  $d$  می‌گیریم. پس داریم:

$$x' + y'$$

و چون  $y \geq x \Rightarrow y' \geq x'$  پس  $y' = dx'$   $\Rightarrow (dx' - y') = 0$  و چون  $x'$  و  $y'$  نسبت به هم اول هستند، نتیجه می‌گیریم  $y' = d, x' = 1$ . پس جواب‌ها دقیقاً  $d$  و  $d^2$  ها هستند که ۱۰ تا از این جواب‌ها در بازه‌ی ۱ تا ۱۰۰ هستند.

۲۴- پاسخ : ۱۳۹۰ ؛ یک ضلع را در نظر بگیرید. دو سر این ضلع در چند ضلعی دو زاویه‌ی داخلی داریم. این ضلع «ناجور» است اگر و تنها اگر یکی از این دو زاویه بیش‌تر از  $180^\circ$  درجه و یکی از این دو زاویه کم‌تر از  $180^\circ$  درجه باشد. در غیر این صورت هر دو ضلع کناری در یک طرف پاره‌خط قرار می‌گیرند. اکنون ادعا می‌کنیم که نمی‌توان ۱۳۹۱ ضلعی ناجور داشت. زیرا اگر تمام ضلع‌ها ناجور باشند، زوایای یکی در میان کم‌تر و بیش‌تر از  $180^\circ$  درجه هستند و چون ۱۳۹۱ فرد است این موضوع امکان ندارد. مثال برای ۱۳۹۰ را در زیر مشاهده کنید:



۲۵- پاسخ : ۱۴ ؛ هنگامی که دایره‌ی  $n$ م را اضافه می‌کنیم حداکثر در  $2(n-1)$  نقطه با دیگر دایره‌ها برخورد دارد. از طرفی هر دایره که اضافه می‌کنیم به تعداد کمان‌هایش ناحیه‌ها را زیاد می‌کند. پس دایره‌ی اول دو ناحیه ایجاد می‌کند. دایره‌ی دوم دو ناحیه‌ی جدید اضافه می‌کند. دایره‌ی سوم حداکثر  $4 = 2 \times 2$  ناحیه‌ی اضافه ایجاد می‌کند و دایره‌ی چهارم

## هیاوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

حداکثر  $6 = 3 \times 2$  ناحیه‌ی جدید ایجاد می‌کند. پس در کل حداکثر  $14 = 6 + 4 + 2 + 2$  ناحیه خواهیم داشت. توجه کنید هر گونه که 4 دایره روی کره بگذاریم که هر دو تایی متقاطع باشند و هیچ سه تایی در یک نقطه به هم نرسند 14 ناحیه خواهیم داشت.

