

فصل ۱ - آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

درس ۱ گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

درس ۲ استدلال ریاضی

قل هاتو برهانکم إن کشم صادقین

(آلہ ۱۱۱ بقرہ)

«بگو اگر راست می گویید دلیل خود را بیاورید»

گروه ریاضی هفتم دوم سوسنده، استان خوزستان

بخش گفتگو:



«تحن ابناء الذليل، تميل حينت يميل» امام صادق (ع)

ما فرزندان دليل و برهانيم و در قضاوت به سويني که دلائل هدایتمان کنند می رویم.

درس ۱

گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

منطق در لغت به معنای «آنچه به گفته درآمده» و عموماً آن را به معنای بررسی استدلال‌ها تعبیر می‌کنند. کاربرد منطق در تشخیص اعتبار استدلال‌هاست. امروزه منطق صرفاً به عنوان شاخه‌ای از فلسفه شمرده نشده و در ریاضیات و علوم مربوط به رایانه نیز به آن برداخته می‌شود.

تعریف دیگری از منطق، روش درست فکر کردن است. با تکیه بر این تعریف می‌توان ادعا کرد که منطق دانان و افرادی که با منطق مأنس‌ترند، بسیار کمتر از دیگران در استدلال‌ها انتباخته‌اند.

از میان انواع منطق و کاربردهای آن در این فصل قصد داریم شما را با منطق ریاضی^۱ که شاخه‌ای از ریاضیات است و به بیان ریاضی گونه منطق می‌پردازد، آشنائی کنیم. اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، منطق ریاضی، دستور این زبان است.

درین جملاتی که ما از آنها استفاده می‌کنیم، جملات خبری از اهمیت و جایگاه ویژه‌ای برخوردارند و بعویشه صدق و کذب با درستی و نادرستی این خبرها برای ما و مخاطب ما اهمیت دارد. به عنوان مثال وقتی شما به دوست خود می‌گوید: «من امروز ساعت ۸ صبح در محل فرار حضور داشتم». خبری را برای او بیان می‌کنید که صدق یا کذب این خبر برای شما و دوستان مهم است. در منطق ریاضی به هر جمله خبری که توانیم (در حال حاضر یا در آینده) دقیقاً یکی از دو ارزش درست با نادرست (راست با دروغ) را به آن تسبیت بدهیم، یک گزاره گفته می‌شود.

جمله‌های غیر خبری مانند «جهه هوای خوبی» یا «شما اهل کجایید؟» و همچنین جمله‌های خبری که توانیم ارزش آنها را تعیین کنیم، گزاره نیستند؛ مثلاً «درس فلسفه از درس عربی آسان‌تر است».

فعالیت

۱. کدام یک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

الف) شما چند سال دارید؟ ← گزاره نیست.

ب) عدد ۲ عددی اول است. ← گزاره است (درست)

ب) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است. ← گزاره است. (نادرست)

ت) افلاطون شاگرد ارسطو است. ← گزاره است. (نادرست)

ت) $2+3\times 4=20$ ← گزاره است. (نادرست)

ج) عدد $(-1)^{-1}$ عددی همواره مثبت است. ($n \in N$) ← گزاره است. (نادرست)

ج) سبب قرمز از سبب زرد خوشمزه نیست. ← گزاره نیست.

ح) لطفاً نخنے را پاک کن. ← گزاره نیست.

نهیه گشته:

گروه ریاضی مقطع دوم فنوسطه، استان خوزستان

گزاره های درست : مجموع زاویه ها داخل مثلث « $\alpha + \beta + \gamma$ » است / ۹ عدد اول نسبت.

گزاره های نادرست : مجموع مساحتی ایست / $\frac{1}{2}$ عدد گمک است.

دو جمله غیر گزاره دی : عبارتی زیر را حل کن / به کدام رسمه ای وزیری علاوه دارد؟

۲. دو گزاره درست و دو گزاره نادرست بیان کنید و همچنین دو جمله بنویسید که گزاره نباشد.

گاهی اوقات گزاره ای که بیان می کنیم، ترکیبی از دو یا جند گزاره است. در این صورت برای تشخیص درستی یا نادرستی این گزاره ها که به گزاره های ترکیبی معروف اند، باید پیشتر تأمل کنیم و آنها را دقیق تر بررسی کنیم. به عنوان مثال جمله «۲ عددی فرد است و ۲ عددی گنگ است»، از ترکیب دو گزاره ساده «۲ عددی فرد است» و «۲ عددی گنگ است» توسط حرف ربط «و» ساخته شده است. واضح است که ارزش این گزاره ترکیبی به ارزش دو گزاره ساده مذکور بستگی دارد. اگر هر دو گزاره نادرست باشند، ارزش گزاره ترکیبی چیست؟ اگر هر دو درست باشند، چه ارزشی برای آن قائل هستند؟ اگر یکی از گزاره ها درست و دیگری نادرست باشد، چه پاسخی می دهید؟ در حالت کلی برای یک گزاره ترکیبی که از ترکیب دو گزاره به دست آمد، و نسبت به ارزش های این دو گزاره، جند حالت می توان در نظر گرفت؟ آیا حروف ربط دیگری برای ترکیب دو گزاره وجود دارد؟ برای پاسخ به سوال های اخیر نیاز داریم تا از نعاده و قراردادهایی استفاده کنیم. به مجموعه این فواردادها و نعادگذاری ها جبر گزاره ها با حساب گزاره ها گفته می شود.

در منطق ریاضی و در جبر گزاره ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند p یا q یا ... نمایش می دهیم. در سه جدول زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده است. شما جدولی را برای نمایش وضعیت ارزشی چهار گزاره تشکیل دهید.

p
د
ن

$2^1 = 2$

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

$2^2 = 4$ = تعداد حالت های ارزشی دو گزاره

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

$2^3 = 8$ = تعداد حالت های ارزشی سه گزاره

نفيض یک گزاره : نفيض گزاره p را بناud ($\sim p$) نمایش می دهیم و آن را به صورت «نفيض p » یا «جتنی نیست که p » می خوانیم. از آنجا که هر گزاره یک جمله خبری است و حتماً دارای فعل، برای بیان نفيض یک گزاره کافی است فعل جمله را نفي کنیم و واضح است که با این کار ارزش گزاره p اگر درست باشد، ارزش گزاره $(\sim p)$ نادرست و اگر یک گزاره ای نادرست باشد، ارزش گزاره $(\sim p)$ درست خواهد بود.

به عنوان مثال، نفيض گزاره « a مثبت است»، به صورت « a مثبت نیست» بیان می شود. به جدول زیر توجه کنید :

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

نتیجه گفته شد:

۳

گروه ریاضی مقطع دوم متوجه، استان خوزستان

کار در کلاس

در هر یک از حالت‌های زیر تفیض گزاره را بیان کنید: سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.

(الف) عدد ۵ زوج است. **(نادرست)** **لطفمن** **↔ عدد ۵ فرد** است. **(درست)**

(ب) تساوی $2 \times 2 = 4$ «برقرار است. **(درست)** **↔ تساوی ۲۸۲۱ = ۴** «برقرار نیست» **(نادرست)**

(ب) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچکتر است. **(درست)** **↔ عدد ۱۲ از ۱۵ اکوچکتر نیست. **(نادرست)****

(ث) ارسسطو شاگرد افلاطون است. **(درست)** **↔ ارسسطو شاگرد افلاطون** **نیست** **(نادرست)**

(ث) ایران در منطقه غرب آسیا قرار دارد. **(درست)** **↔ ایران در منطقه غرب آسیا قرار ندارد. **(نادرست)****

(ج) $(2 \times 7) > (5 \times 4)$ **(نادرست)** **↔ (2 \times 7) < (5 \times 4)** **(درست)**

در مثال قبل اگر تفیض گزاره **m** مثبت است، را به صورت **m** منفی است» تعبیر کنیم. این دو گزاره تفیض هم نیستند؛ زیرا وقتی **m** مثبت نباشد، یا منفی است با صفر است، در صورتی که **m** منفی است» شامل صفر نمی‌شود.

ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی و در حساب گزاره‌ها، به صورت‌های متقابوی می‌توان گزاره‌های ساده را با هم ترکیب، گزاره‌های مرکب تولید کرد. در این کتاب ترکیب گزاره‌ها توسط ۴ رابط «و»، «یا»، «شرطی» و «دو شرطی» انجام می‌شود. هر گزاره مرکب که از ترکیب دو یا بیشتر از دو گزاره ساده تولید می‌شود، خودش یک گزاره است و باید بتوانیم ارزش آن را تعیین کنیم. به گزاره‌های ترکیبی زیر توجه کنید:

(الف) ۵ عددی فرد است و ۴ عددی اول است.

(ب) ۱۲۱ مضرب ۱۲ است با $\sqrt{3}$ مثبت است.

(ب) «اگر من مسلمان باشم، آنگاه بیوت حضرت رسول اکرم ﷺ را قبول دارم».

(ت) «اگر ۳ عددی زوج باشد، آنگاه n^2 زوج است و اگر n^2 زوج باشد، آنگاه n زوج است».

هر یک از گزاره‌های ترکیبی فوق از ترکیب دو گزاره به دست آمده‌اند و اگر از شما بخواهیم ارزش هر یک از آنها را تعیین کنید، شاید کمی مشکل به نظر برسد، ولی آنچه که مسلم است این است که ارزش گزاره‌های ترکیبی فوق به ارزش (درستی یا نادرستی) گزاره‌های ساده تشكیل دهنده آنها و نوع رابط به کار رفته بین آنها بستگی دارد.

۱. ترکیب عطفی دو گزاره: گزاره «عدد ۳ فرد است و ۷ عددی اول است» را در نظر بگیرید. چه استنباطی نسبت به درستی یا نادرستی این گزاره دارد؟ تسبیت به صدق و کذب گزاره «افلاطون شاگرد ارسسطو است و عدد ۴ زوج است»، چه استنباطی دارد؟ کاملاً واضح است که صدق یک گزاره مرکب که از ترکیب دو گزاره ساده بالفاظ یا حرف ربط «و» تشكیل شده است، درستی هر دو گزاره را طلب می‌کند. به نظر شما گزاره دومی چه ارزشی دارد؟ توجه دارید که افلاطون شاگرد ارسسطو بوده است!

هر گاه بخواهیم دو گزاره مانند (و) را بالفظ «و» ترکیب کنیم، از نماد \wedge بین دو گزاره استفاده می‌کنیم و آن را ترکیب عطفی دو گزاره می‌نامیم و می‌نویسیم. \wedge : و آن را به صورت $p \wedge q$ و q می‌خوانیم. ارزش ترکیب عطفی دو گزاره با توجه به جدول زیر تعیین می‌شود:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

همان طور که ملاحظه می کنید، ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره ارزش درست داشته باشند و اگر حداقل یکی از دو گزاره نادرست باشند، $p \wedge q$ نادرست است.

فعالیت

در جدول زیر روبه روی گزاره های داده شده آنها را با علامت ✓ مشخص کرده و نیز با توجه به ارزش داده شده با یک گزاره ساده، گزاره مرکب را کامل کنید.

رددیف	گزاره	درست	نادرست
۱	هفته هفت روز دارد و ماه تهی بور ۳۱ روز دارد	✓	
۲	قرآن دارای ۳ جزء است و همه سوره های آن با اسم الله شروع می شود.	✓	
۳	۱۲ فرد و ۸ زوج است.	✓	
۴	کتاب قرآن ۱۱۴ سوره دارد و ۱۱ بسم الله مبارکه.	✓	
۵	۵۷ عددی اول است و ۲ عددی اول نیست.	✓	
۶	۲ > ۵ و ۲ < ۵	✓	

۲. ترکیب فصلی دو گزاره : اگر شخصی به شما بگوید: «آن حیوان، برند است یا مهره دار است»؛ صدق گفته او را در چه صورتی تأیید می کنید؟ اگر بس از بررسی معلوم شود که حیوان مورد نظر نه برند بوده است و نه از تبره مهره داران بوده است، آیا گزاره مذکور دارای ارزش درست بوده است؟ در واقع صدق یک گزاره مرکب که از ترکیب دو گزاره ساده با لفظ «ایا» تشکیل شده است، در صورتی تأیید می شود که حداقل یکی از دو گزاره ساده، ارزش درست داشته باشند.

هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند p و q را با لفظ «ایا» با هم ترکیب کنیم، از نماد \wedge استفاده می کنیم و آن را ترکیب فصلی دو گزاره نامیده و می نویسیم $p \wedge q$ و آن را به صورت $p \wedge q$ می خوانیم. ارزش ترکیب فصلی دو گزاره با توجه به جدول زیر تعیین می شود:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

همان طور که ملاحظه می کنید، ترکیب فصلی دو گزاره تنها وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره نادرست باشد و اگر حداقل یکی از دو گزاره، ارزش درست داشته باشد، در این صورت ارزش ترکیب فصلی آنها درست است.

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	عدد $\frac{1}{2}$ عددی فرد یا عددی اول است		✓
۲	حضرت مهدی \Rightarrow امام دوازدهم شیعیان است \Rightarrow $\neg p \Rightarrow q$	✓	
۳	۹۱ عددی مرکب است با $\neg p \wedge q$ ، نوع آن سه	✓	
۴	الخاطرون تاریخ ایران با افلاطون نویسنده کتاب ارشدون است.		✓
۵	نیکو، لندن \Rightarrow با $\neg p \wedge q$ ، سه	✓	

۳. ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه بخواهیم از گزاره p گزاره q را تتجه بگیریم، از نماد \Rightarrow استفاده می کنیم و می نویسیم: $p \Rightarrow q$ و آن را به صورت های زیر می خوانیم:

(اگر p آنگاه q) ، (p نتیجه می دهد q را) ، (q از p نتیجه می شود)

در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، p را مقدم و q را تالی می نامیم.

ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ با توجه به جدول زیر تعیین می گردد:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

همان طور که ملاحظه می کنید، گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که مقدم: یعنی p درست بوده ولی تالی یعنی q دارای ارزش نادرست باشد (از پک گزاره درست تتجه ای نادرست حاصل شود) و در بقیه موارد ارزش $p \Rightarrow q$ درست است.

به وزیر و فنی که ارزش مقدم گزاره شرطی یعنی p ، نادرست باشد، همواره $p \Rightarrow q$ دارای ارزش درست بوده و درست با نادرست بودن q تأثیری در ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ ندارد؛ بنابر این در هر یک از دو حالت مذکور، گزاره شرطی به انتفای مقدم دارای ارزش درست است.

مثال:

۱. گزاره‌های «اگر $\Rightarrow 6$ آنگاه، ۵ اول است» و «اگر $\Rightarrow 8$ فرد است، آنگاه $\Rightarrow 4$ » هر دو به انتفای مقدم درست هستند.
۲. گزاره «اگر $\Rightarrow 17$ اول است آنگاه $\Rightarrow 18$ اول است» نادرست است.
۳. گزاره «اگر $\Rightarrow 4$ آنگاه $\Rightarrow 2$ درست است.

تذکر: در تعیین ارزش گزاره‌های شرطی، در صورتی که ارزش تالی درست باشد، نمی‌توانیم ابرادی از کل گزاره شرطی بگیریم؛ زیرا نتیجه شرط، درست است و اگر از مقدم ابراد بگیریم، گوینده به راحتی می‌تواند با کلمه «اگر» که روی مقدم بیان می‌شود، ابراد را رفع کند؛ و جنابه ارزش تالی نادرست باشد و مقدم نبزدیاری ارزش نادرست باشد، درست یومن گزاره $\Rightarrow p$ فاقد ابراد است. (از بیان گزاره‌ای نادرست به نتیجه‌ای نادرست رسیدن، عجیب نیست!)

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید:

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر $\Rightarrow 7$ زوج است، آنگاه $\Rightarrow 25$ مرتع کامل است.	<input checked="" type="checkbox"/>	
۲	اگر $\Rightarrow 9$ مرتع کامل است، آنگاه $\Rightarrow 9$ مرتع کامل است.	<input checked="" type="checkbox"/>	
۳	اگر $\Rightarrow 29$ اول است، آنگاه $\Rightarrow 2$ زوج است.	<input checked="" type="checkbox"/>	
۴	اگر $\Rightarrow 3$ آنگاه $\Rightarrow 5$ آنگاه $\Rightarrow 7$ آنگاه $\Rightarrow 5$ آنگاه $\Rightarrow 3$	<input checked="" type="checkbox"/>	
۵	اگر $\Rightarrow 5$ آنگاه $\Rightarrow 1$ آنگاه $\Rightarrow 3$	<input checked="" type="checkbox"/>	
۶	اگر $\Rightarrow 7$ فرد است، آنگاه $\Rightarrow 25$ مرتع کامل است.	<input checked="" type="checkbox"/>	
۷	اگر $\Rightarrow 13$ بر همه بجز $\Rightarrow 13$ آنگاه $\Rightarrow 99$ اول است.	<input checked="" type="checkbox"/>	

کار در کلاس

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان، مشخص کنید:

$$1) (q \Rightarrow p) \wedge r \quad (\text{ارزش گزاره } (q \Rightarrow p) \text{ به انتفای مقدم درست بوده، ولذا ارزش گزاره } (q \Rightarrow p) \text{ به ارزش گزاره } r \text{ بستگی دارد.})$$

$$2) (p \vee q) \vee r$$

$$3) (p \Rightarrow q) \wedge r$$

$$4) (r \Rightarrow p) \vee q$$

$$5) (r \Rightarrow p) \Rightarrow q$$

$$6) (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

$$7) (p \wedge q) \Rightarrow r$$

حل شد.

نهیه گنده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوجهه، استان خوزستان

حل کاردر کلاس صفحه‌ی ۷ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

$$p \equiv T, \quad q \equiv F$$

۱) $(q \Rightarrow p) \wedge r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (q \Rightarrow p) \equiv T \rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge r \equiv ?$
۲) $(p \vee q) \vee r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \vee q) \equiv T \rightarrow (p \vee q) \vee r \equiv T$
۳) $(p \Rightarrow q) \wedge r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv F \rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge r \equiv F$
۴) $(r \Rightarrow p) \vee q$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv T \rightarrow (r \Rightarrow p) \vee q \equiv T$
۵) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv T \rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow q \equiv F$
۶) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv F \rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv T$
۷) $(p \wedge q) \Rightarrow r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \wedge q) \equiv F \rightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r \equiv T$

نهایه گشته:

گروه ریاضی مقطع دوم منوشه، استان خوزستان

۴. ترکیب دو شرطی : هرگاه بخواهیم از گزاره p ، گزاره q را نتیجه بگیریم و نیز از گزاره q ، گزاره p را نتیجه بگیریم، از نادست $\Leftrightarrow p \Leftrightarrow q$ و آن را به صورت های $p \Leftrightarrow q$ نتیجه می دهد (را و q نتیجه می دهد p را) و اگر p آنگاه و اگر q آنگاه p و q و بر عکس p سرط لازم و کافی است برای q و p اگر و تنها اگر q می خواهیم. در واقع گزاره دو شرطی $(p \Leftrightarrow q)$ همان گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ است.

تذکر : هم ارزش بودن دو گزاره p و q را با نادست $p \Leftrightarrow q$ نشان می دهم؛ در این صورت :

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

بنابراین با توجه به ارزش گزاره های سرطی و عطفی ارزش گزاره های دو شرطی طبق جدول زیر به دست می آید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

همان طور که در سی و چهار مشاهده می کنید، اگر دو گزاره p و q هم ارزش باشند؛ یعنی $q \equiv p$ (هر دو درست با هر دو نادرست) در این صورت ارزش گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ درست است.

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

نادرست	درست	گزاره	ردیف
	✓	اگر ۲ فرد است، آنگاه ۸ عددی اول است و بر عکس.	۱
✓		اگر دو عدد فرد باشد آنگاه مجموع آنها زوج است و بر عکس.	۲
	✓	۷. عدد ۱۹... اگر و تنها اگر ۱۱۹ عددی مرکب است. <u>باشد</u>	۳
✓		اگر <u>دو اولین</u> ... <u>بر آنگاه</u> ... <u>حاویند</u> و بر عکس	۴
✓		یک چهار ضلعی مرتع است. اگر و تنها اگر آن چهار ضلعی لوژی باشد.	۵
	✓	اگر و اریانس داده ها برای صفر باشند؛ آنگاه داده ها با یکدیگر برآورند و بر عکس	۶

تپه گشته :

گروه ریاضی مقطع دوم منوشه، استان خوزستان

حل کار در کلاس صفحه‌ی ۹ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

$$p \equiv T \rightarrow \neg p \equiv F, \quad q \equiv F \rightarrow \neg q \equiv T$$

$\forall (p \Leftrightarrow q) \wedge r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv F \rightarrow (p \Leftrightarrow q) \wedge r \equiv F$
$\forall (\neg p \Leftrightarrow q) \vee r$	$\begin{cases} \neg p \equiv F \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg p \Leftrightarrow q) \equiv T \rightarrow (\neg p \Leftrightarrow q) \vee r \equiv T$
$\forall (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv F, (p \Rightarrow q) \equiv F \\ \rightarrow (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv T$
$\forall (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg p \vee q) \equiv F, (p \Rightarrow q) \equiv F \\ \rightarrow (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv T$
$\forall (\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \equiv T, (p \vee q) \equiv F \\ \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \equiv F$
$\forall (r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (r \Leftrightarrow p) \equiv ?, (p \wedge q) \equiv F \\ \rightarrow (r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv ?$
$\forall (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \wedge q) \equiv F, (p \vee q) \equiv T \\ \rightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q) \equiv F$

تپه گندله :

گروه ریاضی هفطع دوم هنوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ماتنده نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

$$1) (p \Leftrightarrow q) \wedge r$$

$$2) (\neg p \Leftrightarrow q) \vee r \quad \text{جون } q \equiv \neg p \equiv T \text{ و لذا از کیف فصلی یک گزاره درست با هر گزاره‌ای، دارای ارزش درست است.}$$

$$3) (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$4) (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$5) (\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$$

$$6) (r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$$

$$7) (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$$

حل شد.

مثال: با استفاده از جدول ارزش‌های درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

$$\text{الف) } (p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$$

$$\text{ب) } (p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

$$\text{ب) } \neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\text{ت) } p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$\text{ت) } (p \vee \neg p) \equiv T \text{ و } (p \wedge \neg p) \equiv F$$

تبهه گنده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

الف)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	F	T

ب)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	F

۱۳) اندیای کلمه True به معنی راست (درست) و False به معنی دروغ (نادرست) است.

تذکر : گزاره $(\neg q \Rightarrow p)$ را عکس نقض گزاره $(p \Rightarrow q)$ می نامیم.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰

(ب)

تذکر : این قانون با هم ارزی : یعنی $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ و متسابه آن : یعنی $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ به قوانین دمورگان معروف‌اند.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
۰	۱	۱	۰
۱	۰	۱	

(ت)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee(p \wedge q)$
۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱

(ت)

تذکر : گزاره‌هایی نظری $(p \vee \neg p)$ را گزاره‌هایی همبسته درست و $(p \wedge \neg p)$ را همبسته نادرست می‌نامیم.
۷ طبقه جدول ثابت $p \vee q$ و $p \wedge q$ مورث می‌شوند.

تمرین

۱. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	برگزین معجزه بایمبر اسلام $\neg p$ قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.	✓	
۲	اگر $\neg p$ آنگاه مردی هر عدد فرد عددی زوج است.	✓	
۳	اگر نهران پاینخت ایران است، آنگاه $\neg p$ در جنوب شرق ایران است.	✓	
۴	$4 \times 2 = 2^2 \Rightarrow 8 = 4^2$	✓	
۵	اگر عدد n اول و عدد m زوج باشد، آنگاه $n \times m$ کامل است.	✓	
۶	اگر n عددی زوج با منعی باید، آنگاه عدد n اول است.	✓	
۷	اگر فارابی معلم نانی است، آنگاه افلاطون معلم اول است.	✓	
۸	امام حسین $\neg p$ در سال ۱۲۴۲ تبعید و در سال ۱۲۵۷ به ایران بازگشت.	✓	
۹	حضرت علی $\neg p$ اولین مردی است که پس از بایمبر، اسلام آوردند و $\neg p$.	✓	
۱۰	اگر $\neg p$ آنگاه $\neg p$ و بر عکس	✓	

ایام اول
دینمان

حل تمرین صفحه‌ی ۱۱ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

: ۲

$$p \equiv T \rightarrow \neg p \equiv F, \quad q \equiv F \rightarrow \neg q \equiv T$$

الف) $(p \vee r) \Rightarrow p$	$\begin{cases} p \equiv T \\ r \equiv ? \end{cases} \rightarrow (p \vee r) \equiv T \rightarrow (p \vee r) \Rightarrow p \equiv T$
ب) $(q \wedge r) \Rightarrow r$	$\begin{cases} q \equiv F \\ r \equiv ? \end{cases} \rightarrow (q \wedge r) \equiv F \rightarrow (q \wedge r) \Rightarrow r \equiv T$
پ) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge r)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \wedge q) \equiv F, (\neg p \wedge r) \equiv F \\ \rightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge r) \equiv T$
پ) $(\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg q \Rightarrow p) \equiv T, (p \Rightarrow q) \equiv F \\ \rightarrow (\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv F$
پ) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv F, (\neg q \Rightarrow \neg p) \equiv F \\ \rightarrow (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \equiv T$
ز) $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (q \vee r) \equiv ?, (r \Rightarrow p) \equiv T \\ \rightarrow (q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv T$
ز) $(\neg p \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg p \Rightarrow r) \equiv T \\ \rightarrow (\neg p \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q \equiv T$
ز) $(\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \equiv F \\ \rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge r \equiv F$
ز) $(r \Rightarrow p) \wedge p$	$\begin{cases} p \equiv T \\ r \equiv ? \end{cases} \rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv T \rightarrow (r \Rightarrow p) \wedge p \equiv T$

نهایه گشته:

۱۱/۱ کروزه ریاضی منطق دوم متوسطه، استان خوزستان

: ۳

الف) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \vee \neg q)$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

ب) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

ج) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	q	$(p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

نتیجه کنندہ:

۱۱، ۲

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$\text{c)} (p \Rightarrow p) \equiv T$$

p	$p \Rightarrow p$
ذ	ذ
ن	ذ

$$\text{c)} (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \equiv p$$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee q)$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$
ذ	ذ	ن	ذ	ذ	ذ
ذ	ن	ذ	ذ	ذ	ذ
ن	ذ	ن	ذ	ذ	ن
ن	ن	ذ	ذ	ن	ن

$$\text{ج)} (p \wedge \neg q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$$

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \Rightarrow q)$	$(p \wedge \neg q) \vee (p \Rightarrow q)$
ذ	ذ	ن	ن	ذ	ذ
ذ	ن	ذ	ذ	ن	ذ
ن	ذ	ن	ن	ذ	ذ
ن	ن	ذ	ن	ذ	ذ

نهیه گشته:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۲. اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هریک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

- الف) $(p \vee r) \Rightarrow p$
- ب) $(q \wedge r) \Rightarrow r$
- پ) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge r)$
- ت) $(\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$
- ث) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
- ج) $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$
- ح) $(\neg p \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q$
- چ) $(\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge r$
- خ) $(r \Rightarrow p) \wedge p$

حل ۲.

۳. درستی هریک از هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها تثبات دهید:

- الف) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$
- ب) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- پ) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
- ت) $(p \Rightarrow p) \equiv T$
- ث) $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \equiv p$
- ج) $(p \wedge \neg q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

حل ۳.

نهیه گشته:

گروه رفاضی مقطع دوم منوسطه، استان خوزستان

درس ۲

استدلال ریاضی

در درس گذشته با انواع گزاره‌ها و جدول ارزشی گزاره‌ها آشنا شدید. از طرفی در سال گذشته انواع استدلال‌های منطقی و قیاس‌ها را در کتاب منطق خود فراگرفتید. در این درس ابتدا به نحوه تبدیل گزاره‌های توصیفی به نمادهای ریاضی و سپس با استفاده از قواعد و قضایای منطقی به استدلال ریاضی می‌پردازیم. در اینجا منظور از استدلال ریاضی استفاده از ریاضی و نیز قواعد منطق گزاره‌ها در حل مسائل و همچنین اثبات یاری بک گزاره به کمک ریاضی است.

اولین گام برای استدلال ریاضی این است که بک عبارت توصیفی را به زبان ریاضی بازنویسی کنیم. در ادامه با مثال‌های از تبدیل عبارت‌های توصیفی به زبان نمادهای ریاضی آشنا می‌شویم.

مثال ۱: سال گذشته با عبارت زیر آشنا شدید.

«ما و ما و نصف ما و نیم‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می‌شونی».

اکنون عبارت فوق را به صورت نماد ریاضی بازنویسی می‌کنیم. کافی است به جای «ما» در ابتدای عبارت از x استفاده کنیم.

در این صورت خواهیم داشت:

$$x+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}(\frac{1}{2}x)+1=1 \rightarrow 2x+\frac{3}{4}x+1=1 \rightarrow \frac{11}{4}x+1=1$$
$$\frac{1}{4}x=0$$

بنابراین عبارت توصیفی فوق به صورت $\frac{11}{4}x+1=1$ بازنویسی شد که بهوضوح بک معادله ریاضی است.

مثال ۲: به عبارت زیر که عیناً از کتاب خلاصه الحساب انتخاب شده است، توجه کنید:

عدد ضرب فی نصفه و زید علی الحاصل اثنا عشر حفل خسته أمثال الغدد.

«عددی را در نصف خودش ضرب کردیم، آنگاه بر حاصل ضرب عدد ۱۲ را افزودیم. حاصل ۵ برابر عدد منظور شد».

برای تبدیل عبارت کلامی بالا به صورت نماد ریاضی، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

عدد منظور را x در نظر بگیرید. در نتیجه عبارت بالا به صورت زیر در خواهد آمد:

$$x \times \left(\frac{1}{2}x \right) + 12 = 5x \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + 12 = 5x \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 5x + 12 = 0$$

عبارت فوق بک معادله درجه دوم است.

مثال ۳: عبارت «ده درصد قیمت فروش کالایی، برابر سود آن است.» را به صورت نماد ریاضی بیان می‌کنیم.
کافی است قیمت فروش این کالا را x و قیمت خرید آن را y در نظر بگیریم:

$$\frac{1}{100}x = x - y$$

کار در کلاس

عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) عددی به علاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است.

ب) حاصل ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است.

ج) حاصل ضرب عددی در خودش به علاوه ۲ بزرگتر از خودش است.

خواندنی ۱

کورت گودل (Kurt Gödel) یک ریاضی‌دان برجسته اتریشی است که در زمینه منطق، به ویژه تبدیل عبارات به نماد ریاضی ناسی‌های بسیاری انجام داد. نتیجه تحقیقات او در منطق ریاضی سبب پیدایش تحولات شگرفی در علم منطق به ویژه منطق ریاضی شد. قضایای معروف او موسوم به «قضایای ناتمامیت گودل» که در سال ۱۹۳۱ منتشر شدند فهم بشر را از نارسایی‌های موجود در دستگاه‌های منطقی سازگار دیگر گون کرد. قضایای او به عنوان یکی از بزرگ‌ترین بحران‌های تاریخ ریاضیات شناخته می‌شوند. وی با تبدیل برخی گزاره‌ها به عبارات بی‌جایده ریاضی به کمک اعداد اول نشان داد که در هر دستگاه منطقی سازگار همواره گزاره‌های وجود دارند که با درست هستند یا نادرست؛ ولی ما هرگز نمی‌توانیم درستی یا نادرستی آنها را ثابت کنیم و لذا همه دستگاه‌های منطقی سازگار، ناقص هستند. وی جنبین گزاره‌هایی را «گزاره‌های اثبات نایذربر» می‌نامد. کارهای او از جمله «کدگذاری گودلی» بعدها در زمینه‌های مختلفی به ویژه در علوم رایانه و رمزگذاری استفاده شد. امروزه از تکنیک‌های متابه‌ی برای تولید بارکد محصولات استفاده می‌شود. در این بارکدها ابتدا یک عبارت توصیفی به عبارات ریاضی (معمولًاً یک عدد) و سپس به یک شکل هندسی تبدیل می‌شود. نمونه‌ای از این بارکدها را در زیر می‌بینید. با استفاده از نرم‌افزارهای بارکدخوان عبارت متناظر با این بارکدها را باید در کتاب منطق با انواع قیاس‌ها آشنایی شدید. قیاس‌ها ابزارهای مهمی در استدلال و به ویژه استدلال ریاضی هستند.



۱- دستگاه منطقی مجموعه‌ای از اصول و قواعد منطقی است که درست بدروفره می‌شوند. یک دستگاه منطقی را وقتی سازگار گوییم که با ترکیب اصول و قواعد آن توان هیچ یک از پارادوکس‌های شناخته شده، را اثبات نکرد.

یکی از انواع قیاس‌ها که در استدلالات ریاضیاتی کاربرد فراوان دارد، «قیاس استثنایی» است. در زیر با ذکر مثالی از این نوع قیاس آن را بادآوری می‌کنیم.

مقدمه ۱: اگر منصب شب چهاردهم ماه باشد، آنگاه ماه کامل است.

مقدمه ۲: امشب، شب چهاردهم ماه است.

نتیجه: ماه کامل است.

استدلال بالا را می‌توان به طور کلی به شکل زیر صورت بندی کرد.

اگر الف آنگاه ب

الف

بنهایت

و با با استفاده از نمادگذاری‌های درس قبل داریم:

$$p \rightarrow q$$

$$p$$

$$\therefore q$$

که در اینجا سه نقطه (., ., .) نماد نتیجه است.

گاهی از این قیاس به شکل نادرست استفاده می‌شود و منجر به نتیجه‌گیری نادرست می‌شود. به این گونه استدلالات مغالطه می‌گویند. در زیر به مثالی از این نوع برداخته شده است.

مثال ۱: آرش معتقد است که «هر کس از من متفرق است، پشت سر من حرف می‌زند. از طرفی سعید پشت سر من حرف زده است. پس سعید از من متفرق است».

برای بررسی درستی با نادرستی استدلال آرش ایندا مقدمات استدلال او را در زیر مرتب گردایم:
اگر کسی از من متفرق باشد، آنگاه پشت سر من حرف می‌زند.

$$q$$

$$p$$

سعید پشت سر من حرف زده است.

سعید از من متفرق است:

$$p \rightarrow q$$

$$q$$

$$\therefore p$$

در واقع استدلال آرش به صورت رو به رو است:

در حالی که در قیاس استثنایی مقدمه دوم باید p باشد و نه q . پس استدلال آرش نادرست است.
با استفاده از نمادهای ریاضی و قواعد منطقی می‌توان مسائل زیادی را حل کرد. استفاده از نمادهای ریاضی اغلب باعث شفاف تر شدن مسئله و سهولت در به کار گیری قواعد منطقی می‌شود. در زیر به نمودهایی از استدلال ریاضی در حل مسائل برداخته شده است.

نهیه گنده:

گروه ریاضی مقطع دوم هنوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس

۱. با استفاده از جدول ارزشی، درستی قاعدة قیاس استنای $q \Rightarrow p \wedge q$ را نشان دهد.

۲. در هر یک از استدلالات زیر جای خالی را با عبارت مناسب بر کنید تا قیاس کامل شود.

$$\begin{array}{c} p: x > 0 \\ q: x^2 > 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} p: x > 0 \\ q: x^2 > 0 \end{array}$$

دو خط هیچ گاه بکدبگر را قطع نمی کند: $q \Rightarrow p$

دو خط موازی باشند: $p: x > 0$

دو خط موازی نباشند: $q: x^2 > 0$

$\therefore L_1, L_2$

خطوط L_1 و L_2 هیچ گاه بکدبگر را قطع نمی کند.

مثال ۲: سه لیوان همانند شکل زیر داریم که هر کدامیک از آنها وارونه است. می خواهیم همه آنها در حالت درست (رو به بالا) قرار گیرند. ولی معجاز هستیم نا هر بار دقیقاً دو لیوان را تغییر وضعیت دهیم (اگر وارونه است، آن را درست کنیم و برعکس) سؤال این است که آیا این کار امکان بذیر است؟ اگر بله با چند حرکت معجاز؟ امتحان کنید!

پاسخ: به کمک یک استدلال ساده راضی که در ادامه می آید، نشان می دهیم که این کار امکان بذیر نیست. برای این کار داریم:

تعداد لیوان های وارونه =

وضعیت فعلی (یک لیوان وارونه است): $s=1$

وضعیت مطلوب (هیچ لیوانی وارونه نباشد): $s=0$

حرکت معجاز: در هر بار دقیقاً دو لیوان تغییر وضعیت دهد.



۱- $s \rightarrow$ تعداد لیوان های وارونه دو تا کم می شود \rightarrow دو لیوان درست می شود
 حالات ممکن در هر حرکت
 \swarrow ۲- $s \rightarrow$ تعداد لیوان های وارونه دو تا اضافه می شود \rightarrow دو لیوان وارونه می شود
 معجاز در حالت کلی
 \searrow ۳- $s \rightarrow$ یک لیوان درست و یک لیوان وارونه می شود

بنابراین ۴ همیشه به اندازه عددی زوج (یا ۲+ با...) تغییر می باید و هرگز از ۱ به ۰ کاهش نمی باید.

کار در کلاس

۱. مثال سه لیوان را در حالت زیر بررسی کنید. آیا فقط یک راه حل دارد؟

حل نشده

A B C



۲. مثال سه لیوان را برای حالتی که بین از ۳ لیوان داریم و تعداد فردی از لیوان ها را که وارونه هستند، بررسی کنید. آیا استدلال گفته شده در آنجا قابل تعمیم به حالت اخیر است؟

حل کاردر کلاس اول صفحه‌ی ۱۵ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

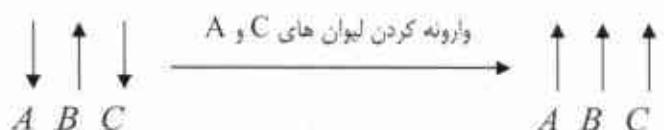
: ۱

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

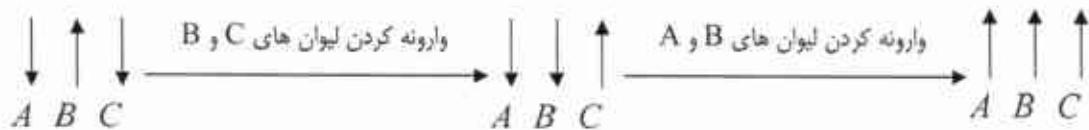
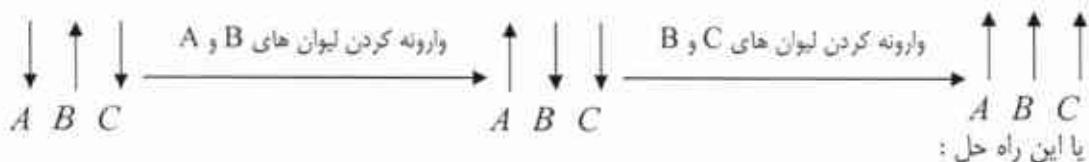
لذا قیاس استثنایی $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ همیشه درست است.

حل کاردر کلاس دوم صفحه‌ی ۱۵ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

۱: یک راه حل :

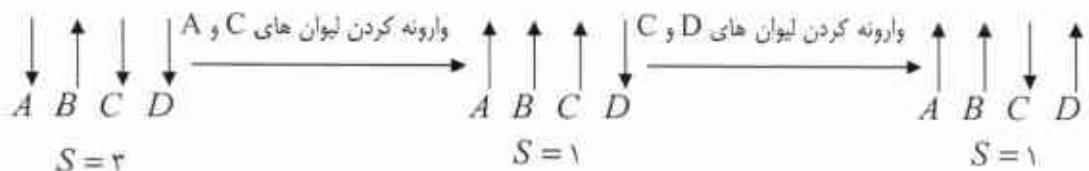


مسئله راه حل های دیگری هم دارد. مثلاً :



۲: مسئله را برای چهار لیوان که سه لیوان از بین آنها وارونه هستند را بررسی می کنیم. (تعداد لیوان های

وارونه را برابر S قرار می دهیم.)



در هر حالت با وارونه کردن دو لیوان مقدار S برابر ۱ یا قی می ماند. مطلوب آن است که $S = ۰$ شود. با این

استدلال معلوم می شود که حالت $S = ۰$ به دست نمی آید. لذا مسئله جواب ندارد.

نهیه گشته:

تذکر : در درس قبل دیدیم که دو گزاره شرطی $q \Rightarrow p$ و $\sim p \Rightarrow \sim q$ هم ارزند. به عبارت دیگر اگر بخواهیم ثابت کیم گزاره شرطی $q \Rightarrow p$ درست است و این کار دشوار باشد، به جای آن می توان ثابت کرد $\sim q \Rightarrow \sim p$ درست است. در این حالت می گوییم عکس تفیض گزاره اصلی را ثابت می کیم.

مثال ۳ : ثابت کنید «اگر n^2 زوج باشد آنگاه n زوج است ($n \in \mathbb{Z}$)».

اگر فرض کنیم

p زوج است : n^2

q زوج است : n

و بخواهیم از درستی گزاره p به گزاره q برسیم، مسیر اثبات دشوار است. برای این کار از عکس تفیض گزاره $q \Rightarrow p$ یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p$ استفاده می کیم. یعنی نشان می دهیم اگر « n زوج نباشد» (یعنی فرد باشد، چون حالت دیگری وجود ندارد)، آنگاه n^2 زوج نیست (یعنی n^2 فرد است).

$$\begin{aligned} & \text{برای اثبات: } \\ & \text{درجه دارد، } k \in \mathbb{Z} \\ & n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(\underbrace{4k^2 + 4k}_{m}) + 1 \\ & \Rightarrow n^2 = 2m + 1 \end{aligned}$$

تساوی اخیر نشان می دهد که n^2 فرد است ولذا حکم به دست می آید.

گاهی در یک استدلال با اثبات ریاضی دچار خطا می شویم. یافتن خطا در یک استدلال برای رفع ایجاد آن بسیار مهم است. گاهی یک استدلال غلط برای سال ها درست پنداشته می شود تا اینکه داشتمدنی به غلط بودن آن بی می برد. کشف محل اشکال در یک استدلال همواره ساده نیست و نیاز به مهارت و دقت دارد. به مثال های زیر دقت کنید.

مثال ۱ : داشن آموزی ادعا می کند که معادله $x - x = 0$ تنها یک ریشه دارد و آن $x = 1$ است. استدلال او در زیر آمده است.

$$1) x - x = 0$$

$$2) x(x-1) = 0 \quad \text{تجزیه معادله}$$

$$3) \frac{x(x-1)}{x} = 0 \quad \text{نقیص طرفین بر } x \text{ و ساده سازی}$$

$$4) x-1 = 0 \quad \text{حاصل ساده سازی و تبدیل به معادله ساده تر}$$

$$5) x = 1 \quad \text{جواب معادله}$$

ایراد این استدلال در این است که در گام سوم اجازه تقسیم بر x وجود ندارد، چون x ممکن است صفر باشد و عبارت بی معنا می شود.

مثال ۲ : داشن آموزی گزاره $a < b \Rightarrow ac < bc$ را که a, b, c اعداد حقیقی اند، به صورت زیر ثابت کرده است. ایراد این استدلال را بپدا کنید.

$$1) a < b$$

$$2) a + c < b + c \quad \text{طرفین را با } + جمع می کیم.$$

$$3) c(a + c) < c(b + c) \quad \text{طرفین نامساوی قبل را در } c \text{ ضرب می کیم.}$$

$$4) ac + c^2 < bc + c^2 \quad \text{را در برانزه ها ضرب می کیم.}$$

$$5) ac < bc \quad \text{چون } c^2 \text{ عددی همواره مثبت است، می توان آن را از طرفین کم کرد.}$$

$$6) ac < bc$$

نتیجه گشته :

ایراد این استدلال در گام سوم است. چون علامت c معلوم نیست (ممکن است مثبت یا منفی باشد)؛ پس نمی‌توان آن را در طرفین نامساوی ضرب کرد. به عنوان مثال اگر $a = 1$ و $b = -2$ و $c = -1$ باشد، آنگاه گزاره فوق معادل است با $-1 < 2 \Rightarrow -1 < 2$ که آشکارا نادرست است.

کار در کلاس

سوال زیر در یک امتحان ریاضی داده شده است.

$$\text{اگر } a = \frac{a-d}{c-d} \text{ آنگاه مطلوب است. } (a \neq 1)$$

استدلال‌های زیر را برای بدست آوردن d از برگه‌های امتحانی دانش‌آموزان آوردیدم.

کدام یک از استدلال‌ها درست و کدام نادرست است؟ دلیل نادرستی هر استدلال غلط را بیان کنید.

(الف)

$$\begin{aligned} 1) \quad & a = \frac{a-d}{c-d} \quad \times \\ 2) \quad & \cdot = \frac{-d}{c-d} \\ 3) \quad & d = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{حذف } a \text{ در مرحله اول ایجاد دارد. "استدلال نادرست"} \\ a = a, \quad c = 9, \quad d = 1 \\ \cancel{a} = \frac{a-1}{\cancel{a}} \rightarrow 0 = \frac{0-1}{9-1} \rightarrow 0 = -\frac{1}{8} \quad \text{نادرست} \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} 1) \quad & a = \frac{a-d}{c-d} \\ 2) \quad & ac - ad = a - d \\ 3) \quad & ac - a = ad - d \\ 4) \quad & a(c-1) = (a-1)d \\ 5) \quad & \frac{a(c-1)}{a-1} = d \quad \times \\ 6) \quad & - (c-1) = d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{حذف } a \text{ در مرحله بیخیم ایجاد دارد. "استدلال نادرست"} \\ a = 3, \quad c = \frac{9}{4}, \quad d = 1 \\ \cancel{a} \left(\frac{3}{4} - 1 \right) = 1 \quad \text{حذف} \rightarrow - \left(\frac{3}{4} - 1 \right) = 1 \rightarrow -\frac{3}{4} = 1 \quad \text{نادرست} \end{aligned}$$

(پ)

$$\begin{aligned} 1) \quad & a = \frac{a-d}{c-d} \\ 2) \quad & a(c-d) = a-d \\ 3) \quad & ac - a = ad - d \\ 4) \quad & ac - a = (a-1)d \\ 5) \quad & \frac{ac-a}{a-1} = d \end{aligned}$$

$\text{"ایجاد حداره، استدلال درست"}$

تبریه گشته:

گروه ریاضی مقطع دوم منوشه، استان خوزستان

تمرین

۱. گزاره‌های زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

حل شده

(الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

(ب) مکعب یک عدد، بزرگ‌تر از هفت برابر آن عدد، به علاوه پنج است.

(پ) مجموع معکوس‌های دو عدد بزرگ‌تر با مساوی مجموع آن دو عدد است.

(ت) مجموع مکعبات دو عدد بزرگ‌تر با مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است.

(ث) هر عدد ناصلفری از معکوس خود بزرگ‌تر با مساوی با آن است.

۲. در هر مورد گزاره‌ای همراه با یک استدلال نادرست برای آن داده شده است. دلیل نادرستی استدلال را بیان کنید.

(الف) اگر طول و عرض یک مستطیل را دو برابر کنیم، آنگاه مساحت آن نیز دو برابر می‌شود.

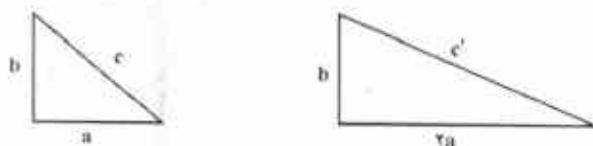
x : طول

y : عرض

مساحت $S = xy$

مساحت دو برابر شده است. \rightarrow

(ب) در یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع قاتمه a و b و وتر c همانند شکل زیر اگر ضلع a را دو برابر کنیم، آنگاه وتر آن نیز دو برابر می‌شود.



استدلال: می‌دانیم در مثلث قائم الزاویه روبه رو قضیه فیثاغورث به صورت زیر برقرار است:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

اکنون این رابطه را برای مثلث قائم الزاویه جدید نیز می‌نویسیم:

$$\text{جذر } c'^2 = (\text{جذر } a)^2 + b^2 = \text{جذر } a^2 + b^2 = \text{جذر } (\underbrace{a^2 + b^2}_{c^2}) = \text{جذر } c^2 \Rightarrow c' = \text{جذر } c \Rightarrow c' = 2c$$

بس وتر دو برابر شده است.

$$\text{ب) تساوی } 2\sqrt{11} = \sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} \text{ برقرار است.}$$

$$\sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = \sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{2 \times 3}} = \sqrt{\frac{12 + \cancel{3} \times 16}{\cancel{2}}} = \sqrt{12 + 32} = \sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = 2\sqrt{11}$$

نهیه گشته:

حل تمرین صفحه ۱۸ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

:۱

$$x \geq \frac{1}{x} ; x \neq 0 \quad (\text{ث}) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq a + b \quad (\text{پ}) \quad 2\sqrt{x} = x \quad (\text{الف})$$

$$\alpha^r + \beta^r \geq (\alpha + \beta)^r \quad (\text{ت}) \quad k^r > rk + r \quad (\text{ب})$$

:۲

(الف) استدلال تادرست است. مسئله اشاره به دو برابر کردن اضلاع داشته است. در اینجا مساحت را دو برابر

کرده است. می توان با مثال نیز تادرستی استدلال را نشان داد.

$$a = 3 \rightarrow x = 3 \times 2 = 6$$

$$b = 5 \rightarrow y = 5 \times 2 = 10$$

$$\text{مساحت مستطیل اولیه} \quad a \times b = 3 \times 5 = 15$$

$$\text{مساحت مستطیل ثانویه} \quad x \times y = 6 \times 10 = 60$$

مشاهده می کنیم که مساحت چهار برابر شده است تا دو برابر

(ب) استدلال در مرحله‌ی $4a^r + b^r = 4(a^r + b^r)$ باطل می شود. به این مثال توجه کنید.

$$a = 3 \quad b = 5$$

$$4a^r + b^r = 4(3^r) + (5^r) = 36 + 25 = 61$$

$$4(a^r + b^r) = 4(3^r + 5^r) = 4(9 + 25) = 4 \times 34 = 136$$

(پ) استدلال در اولین قدم، (ساده کردن ۴ از صورت و مخرج) باطل می شود. ابتدا باید حاصل صورت را به

دست اوریم و سپس در صورت امکان ساده کنیم.

$$\sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = \sqrt{\frac{36 + 64}{6}} = \sqrt{\frac{100}{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6}$$

نهیه گشته:

فصل ۲- توابع

درس ۱

توابع ثابت، چند خصایقی و همانی

درس ۲

توابع پلکانی و قدرمطلقی

درس ۳

اعمال بر روی توابع

نوبه گشته:

گروه رانش دوره‌ی دوم منوشه و انجمن معلمان رانش، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

احمای طرح کanal اتصال زرینه رود به سیمهه رود / اجیای دریاچه ارومیه

دکتر: سید مجتبی علیراد

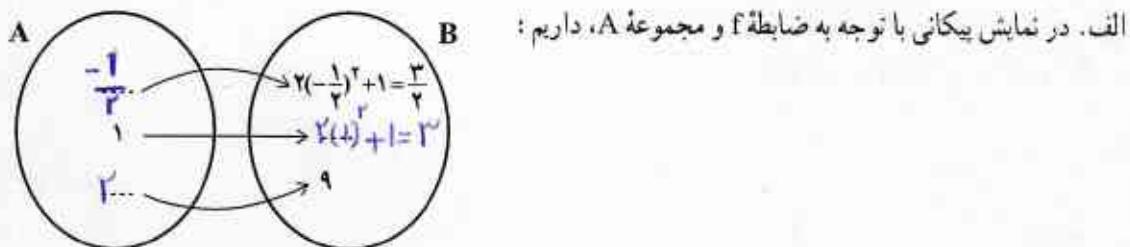
درس ۱

توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی

در سال گذشته با مفاهیم تابع، دامنه و برد آشنا شدیم.

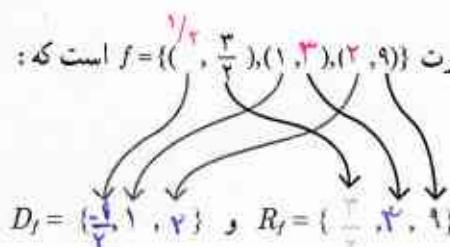
فعالیت

اگر $f: A \rightarrow B$ باشد، با توجه به نمایش‌های خوانده شده در سال قبل برای بیان یک رابطه:

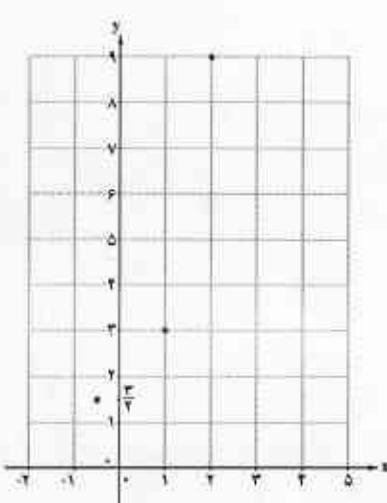


بنابراین برد f مجموعه $\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 9 \} = B$ است. نمایش پیکانی رابطه فوق بیانگر یک تابع است؛ زیرا از هر عضو مجموعه A ، دقیقاً یک پیکان خارج نشده است.

ب. نمایش زوج مرتبی مثل بالا به صورت $\{(1, 9), (2, \frac{3}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ است که:



مجموعه‌های دامنه و برد تابع f را تشکیل می‌دهند.



ج. نمایش مختصاتی آن نیز چنین است: تصویر این نقاط بر روی محور x ‌ها؛ یعنی $\{1, 2, \frac{1}{2}\}$ دامنه تابع و تصویر همین نقاط بر روی محور y ‌ها $\{9, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$ برد تابع نامیده می‌شود.

نویسنده:

گروه ریاضی دوره‌ی فومن متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

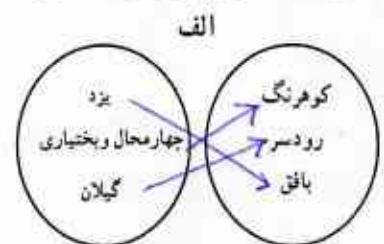
۲۲

khuzmath1394@chmail.ir

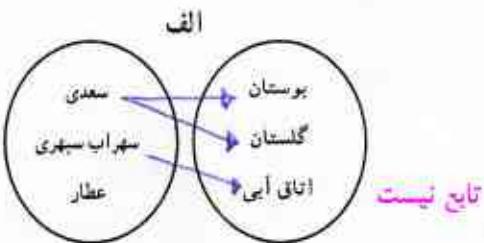
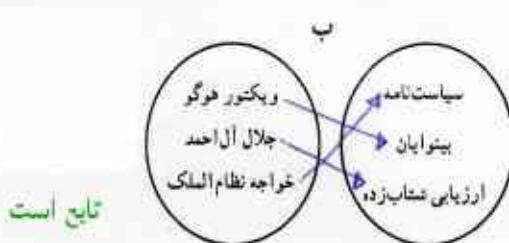
کار در کلاس

ابتدا با بیکانهای مناسب رابطه خواسته شده را کامل کنید.

۱. رابطه‌ای که به هر استان، شهری از خود استان را نسبت می‌دهد.



۲. رابطه‌ای که به خالق کتاب، کتابش را نسبت می‌دهد.



حال جدول زیر را با توجه به رابطه‌هایی که در قسمت ۱ و ۲ «تابع» هستند، کامل کنید.

نمایش مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	نمایش بیکانی
	((مشهد, آذربایجان), (تبریز, آذربایجان), (گرگان, آذربایجان), (رشت, آذربایجان), (پرندگان, آذربایجان))	
	((سعید, بوستان), (سعید, گلستان), (سعید, سمنان), (سعید, بوستان), (سهراب سیاهی, بوستان), (سهراب سیاهی, گلستان), (سهراب سیاهی, سمنان), (عطار, بوستان), (عطار, گلستان), (عطار, سمنان), (اتاق آیی, بوستان), (اتاق آیی, گلستان), (اتاق آیی, سمنان))	

با توجه به جدول بالا :

- الف. نمایش بیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که **از هر عبارتی یک برابری باشد**. خارج شود.
- ب. نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که **همیشه دو توجهی، همیشه همها همیشی در آنها، همیشی در آنها**. اول بیکان نداریم لذا **نیز**.
- ج. نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که **هر جمله، عوازیم، چون زدن، چون زدن، چون داریم را، چند مرد را** تعلیم ملئویم.

۲۳

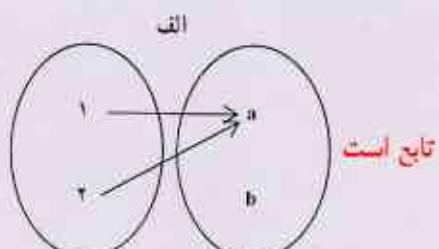
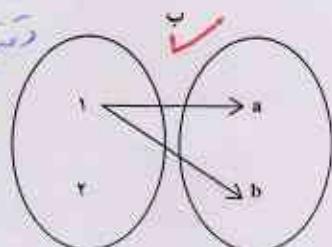
به عبارتی اگر مولفه‌ها اول درجه مرتباً کنیم باشند، در این صورت

مولفه‌ها دوم آنها نیز را برابر باشند.

تمرین

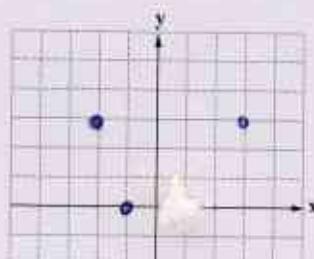
۱. کدام یک از رابطه های زیر که با نمودار بیکانی تابیش داده شده اند، تابع نیست؟ جرا؟

نیست
نیست
نیست
نیست



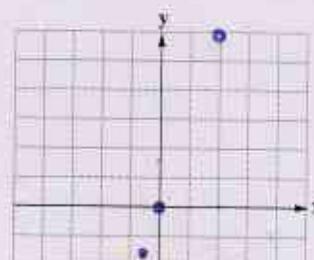
۲. کامل کنید:

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x^2 - 1 \end{cases} \quad D_f = A = \{-1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\} \quad R_f = \{3, 0, 1\} \\ = \{3, 0, 1\}$$

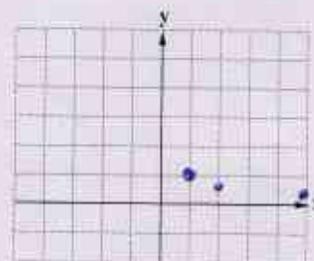


با توجه به ترتیب عضوهای در دامنه و برد می توان این تابع را نوشت

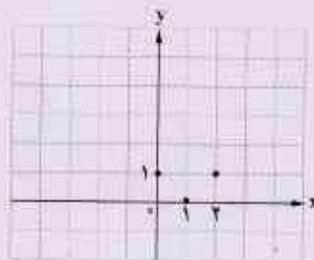
$$B \in A \quad f \text{ تابعی خطی از } A \quad D_f = \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\} \quad R_f = \{-\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\} \\ f(x) = \frac{1}{4}x$$



$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \quad D_f = \{1, 2, 3\} \quad R_f = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$$



$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = (x - 1)^2 \end{cases} \quad D_f = \{1, 2, 3\} \quad R_f = \{0, 1\}$$



نیمه گذشته:

۲۲

گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه و ابتدای معلمان ریاضی، استان خوزستان

أنواع توابع (نابت، چندضابطه‌ای و همانی)

بکی از کاربردهای نابع، «مدل‌سازی مسائل واقعی» است. به مثال زیر توجه کنید:

مدیران یک فروشگاه به دلایلی^{*} تصمیم گرفته‌اند هرینه استفاده از توفنگاه فروشگاه را برای مشتریان خود به صورت هوشمند تعیین کنند. پیش از این، هرینه استفاده از توفنگاه ثابت بوده است (مستقل از ساعت و روز هفته).

برای اجرای این تصمیم ابتدا به کمک دوربین‌های مدارسی، در ورودی توفنگاه و به کمک «روش مشاهده» تعداد خودروهای ورودی در هر ساعت از روزهای کاری فروشگاه از شاخص آماری میانگین استفاده شده است. این اطلاعات در جدول ۱ تعیین شده است:

جدول ۱. میانگین ورود خودرو به توفنگاه در هر ساعت کاری فروشگاه

روز هفته	نخستین ساعت (۸-۹)	دومنی ساعت (۹-۱۰)	سومین ساعت (۱۰-۱۱)	چهارمین ساعت (۱۱-۱۲)	پنجمین ساعت (۱۲-۱۳)	ششمین ساعت (۱۳-۱۴)	هفتمین ساعت (۱۴-۱۵)	هشتمین ساعت (۱۵-۱۶)	نهمین ساعت (۱۶-۱۷)	دهمین ساعت (۱۷-۱۸)	یازدهمین ساعت (۱۸-۱۹)	دوازدهمین ساعت (۱۹-۲۰)
نیم	۵۰	۵۱	۵۰	۴۰	۴۰	۴۰	۴۰	۴۰	۴۰	۴۰	۴۰	۴۰
یکشنبه	۱۷۰	۱۷۰	۱۶۰	۱۴۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۵۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۳۰	۱۱۰	۱۰۰
دوشنبه	۲۲۰	۲۲۰	۲۲۰	۲۱۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۳۰	۲۱۰	۲۲۰	۲۱۰	۲۱۰	۲۱۰
سه شنبه	۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	۱۴۰	۱۵۰	۱۶۰	۱۷۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۸۰
چهارشنبه	۵۷۰	۴۹۰	۴۵۰	۴۷۰	۱۸۰	۱۸۰	۵۰	۶۰	۹۰	۹۰	۴۰	۳۰
پنجشنبه	۱۱۴۰	۱۰۷۰	۹۴۰	۸۹۰	۷۴۰	۶۱۰	۵۱۰	۴۱۰	۳۲۰	۲۲۰	۱۲۰	۴۰
جمعه	۴۱۰	۵۲۰	۱۰۹۰	۹۴۰	۸۴۰	۷۱۰	۶۲۰	۵۱۰	۴۲۰	۳۴۰	۲۱۰	۱۲۰

با در نظر گرفتن جدول ۱، هرینه توفنگاه از روز شنبه تا چهارشنبه مطابق جدول ۲ تعیین شده است:

جدول ۲. هرینه توفنگاه با توجه به میانگین خودروهای ورودی

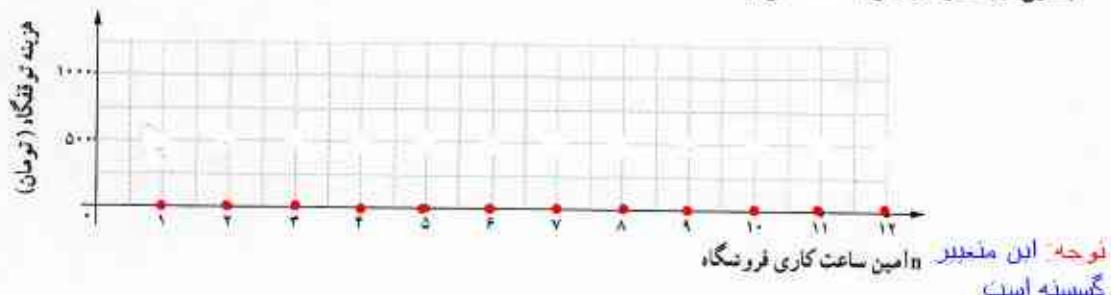
میانگین خودروهای ورودی در هر ساعت	هرینه دریافتی از هر خودرو (تومان)
(رایگان)	۰-۱۰۰
۵۰۰ تومان	۱۰۰-۲۰۰
۱۰۰۰ تومان	۲۰۰-۳۰۰
۱۵۰۰ تومان	۳۰۰-۴۰۰
۲۰۰۰ تومان	۴۰۰-۵۰۰
۲۵۰۰ تومان	۵۰۰-۶۰۰
۳۰۰۰ تومان	۶۰۰-۷۰۰

- *۱. در زمان‌هایی که تعداد مشتریان فروشگاه فراوان نیست، هرینه اندک توفنگاه می‌تواند شویقی برای خرید از فروشگاه ترد مشتریان باشد.
- ۲. در زمان‌هایی که تعداد مشتریان فروشگاه فراوان است، هرینه بالاتر استفاده از توفنگاه در آمد مشتری را برای فروشگاه فراهم می‌کند.
- ۳. در زمان‌هایی که تعداد مشتریان از طرفیت پذیری فروشگاه پیشتر است و این سهله باعث محیل مشتریان در خرید از فروشگاه می‌شود، سوق دادن بخشی از این مشتریان به ساعت‌های خلوت فروشگاه به دلیل هرینه رایگان با اندک توفنگاه می‌تواند در افزایش درآمد فروشگاه بسیار تأثیرگذار باشد. به این دلیل نه تنها هرینه منفرد توفنگاه، بدنهای می‌تواند درآمد فروشگاه را ارتقا بخشد، بلکه این سهله بر میزان خرید مشتریان از فروشگاه تأثیرگذار است که نتیجه آن سود پیشتر فروشگاه خواهد بود.

تابع ثابت (Constant Function)

بر اساس اطلاعات آماری جدول ۱ و ۲، نمودار «۷امین ساعت کاری فروشگاه-هزینه دریافتی» را برای روزهای شنبه تا چهارشنبه در نخستین هفته هوشمندسازی رسم می‌کنیم.^۱

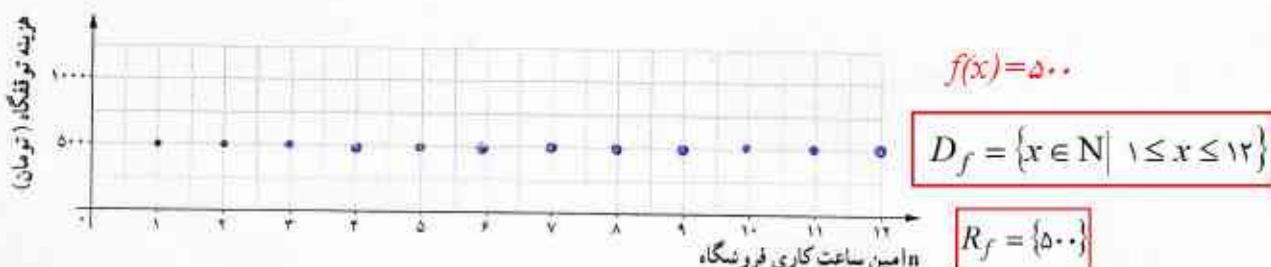
شنبه: در نخستین روز هفته تعداد خودروهای ورودی به پارکینگ همواره در دسته ۱۰۰- قرار می‌گیرد. بنابراین مطابق جدول دو، نمودار زیر به دست می‌آید:



این نوع تابع که به ازای $n=1$ تا $n=12$ ؛ یعنی در تمام ۱۲ ساعت کاری فروشگاه، مقدار ثابت صفر را اختیار کرده است، تابع ثابت نامیده می‌شود. پس ضابطه تابع «هزینه توفنگاه» در این روز به صورت $D = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 12\}$ است که در آن $C(n) = 0$ است. برد تابع $C = R$ را تشکیل می‌دهند.

کار در کلاس

یک شنبه: با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینه دریافتی مطابق جدول ۲، نمودار زیر را کامل کنید.



تابع $f: A \rightarrow B$ را که در آن مجموعه $\{c\} = R$ برد تابع است، تابع ثابت می‌نامند. در تابع ثابت، برد تابع تنها شامل یک عضو است.

۱. با توجه به آنکه مدت زمانی طول می‌کشد تا مستریان فروشگاه از لوح جدید هزینه توفنگاه، آگاهی پایند در نخستین هفته هوشمندسازی توفنگاه، میانگین ورودی خودرو تغییر محسوس نکرده است و اطلاعات جدول ۱ در این هفته معین است.

که : (۱) ممتئن نمی‌گیرد است

لازم به نظر است دانش آموزان در سال گذشته نسبت به تبدیل مختصر کمی بعلی گفته و بتوسنه را تحویله اند ***

فعالیت

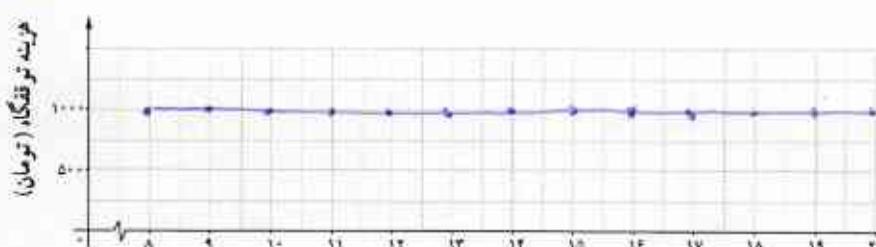
دو شنبه: با استفاده از جدول ۱ و ۲ همانند روزهای شنبه و یکشنبه، نمودار زیر را برای روز دوشنبه کامل کنید و دامنه و برد و ضابطه تابع را مشخص کنید.

توجه داشته باشید که در این نمودار محور x برخلاف روزهای شنبه و یکشنبه یا نگر زمان ورود خودرو به توقفگاه است.

$$\begin{cases} C: A \rightarrow B \\ C(x) = 1000 \end{cases}$$

$$D = \{x \in R \mid 8 \leq x \leq 2\}$$

$$R = \{1000\}$$



نمایه: غیر از رد (او سه بزم حدست)

نمایه: سه شد (زمان تغییر پیوسته است.)

* راهنمایی هم زمان را برخورد
ریشه متعلق به خطها از
مجموعه اعداد حقیقی است

- دامنه نمودار در روز دوشنبه چه تفاوتی با دامنه نمودار در روزهای شنبه و یکشنبه دارد؟

تفاوت این دامنه‌ها چه تأثیری بر نمودار تابع دارد؟ چرا؟ غیر از رد (او سه بزم حدست)

نمایه: سه شد (زمان تغییر پیوسته است) دلیل: $D = \{x \in R \mid 8 \leq x \leq 2\}$

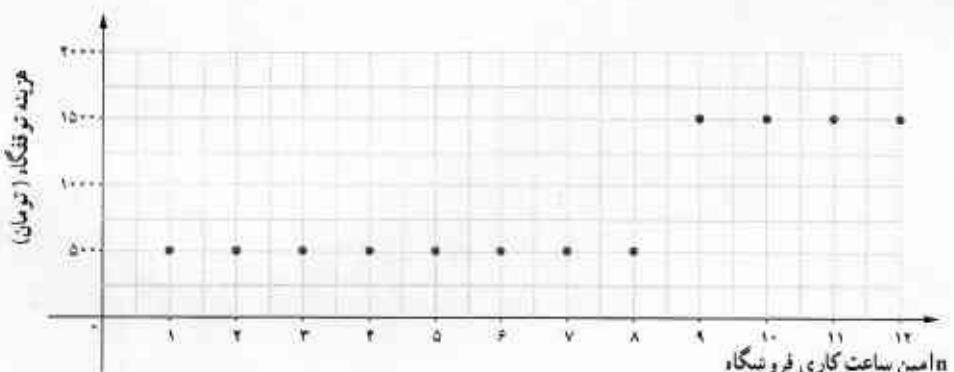
تابع

سه شنبه: با بررسی جدول ۱ تعداد خودروهای ورودی از نه ۲۰۰۰ و در چهار ساعت پایانی ساعت کاری فروشگاه در دسته ۴۰۰۰-۳۰۰۰ قرار می‌گرد. با در نظر گرفتن جدول ۲، هزینه استفاده از توقفگاه برای خودروها در این روز از این تابع پیروی می‌کند:

$$C(n) = \begin{cases} 500 & 1 \leq n \leq 8 \\ 1500 & 9 \leq n \leq 12 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

که ضابطه ۱ مربوط به ساعت ورودی اول تا هشتم و ضابطه ۲ مربوط به ساعت ورودی نهم تا دوازدهم است و نمودار آن:



۸امین ساعت کاری فروشگاه

(که اشتراک آنها نهی است)

توابعی که در بخش‌های مختلف دامنه، ضابطه‌های مختلف دارند، تابع جند ضابطه‌ای نامیده می‌شوند؛ مثلاً اگر یک

تابع از دو ضابطه پیروی کند، یک تابع **ضابطه‌ای نامیده** می‌شود.

دامنه نمودار روز دوشنبه متعلق به خطه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی است در صورتی که دامنه نمودارهای روز شنبه و بکشنبه متعلق به خطه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی است.

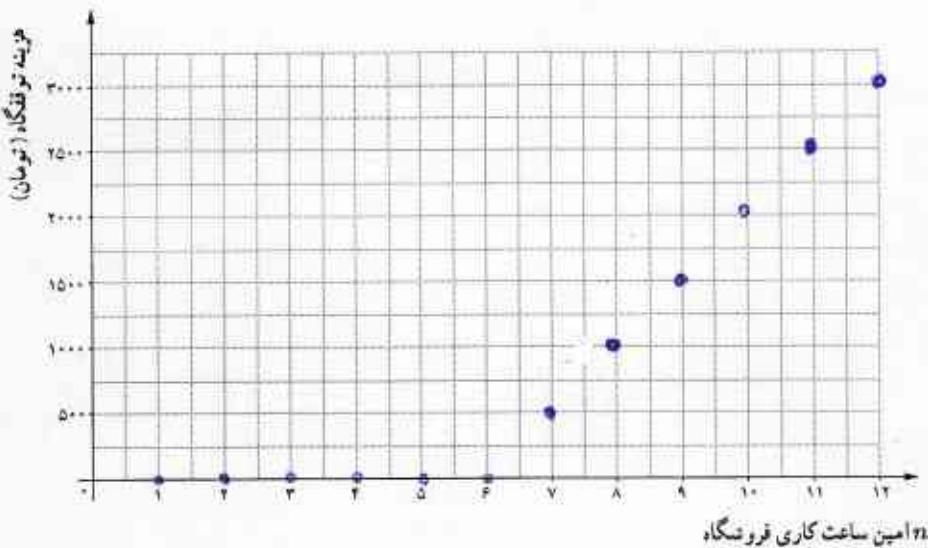
نمودار روز دوشنبه نقاط روزی دک خط است که به هم وصل می‌شود. اما نمودارهای روز شنبه و بکشنبه نقاطی هستند که روی دک خط هستند و به هم وصل نمی‌شوند.

کار در کلاس

چهارشنبه: در این روز با توجه به جدول ۱ و ۲ ضابطه تابع به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$C(n) = \begin{cases} 0 & 1 \leq n \leq 6 \\ 500 & n=7 \\ 1000 & n=8 \\ 1500 & n=9 \\ 2000 & n=10 \\ 2500 & n=11 \\ 3000 & n=12 \end{cases} \Leftrightarrow C(n) = \begin{cases} 0 & 1 \leq n \leq 6 \\ (n-6) \times 500 & 7 \leq n \leq 12 \end{cases}$$

۱. نمودار این تابع را رسم کنید:

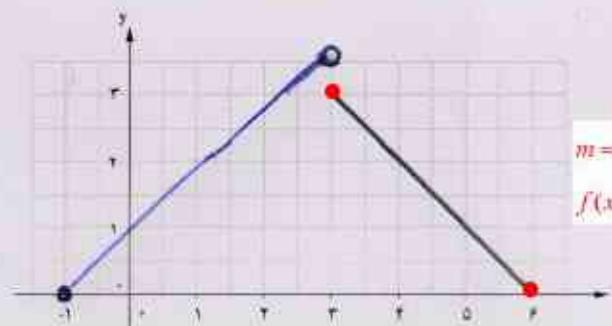


۲. درآمد توقفگاه فروشگاه در این روز چقدر است؟

$$\text{درآمد توقفگاه} = 500 \times 180 + 1000 \times 270 + 1500 \times 240 + 2000 \times 490 + 2500 \times 570 + 3000 \times 680 = 533000$$

لزム بذکر: طبق مطابعه در کار در کلاس هفتم پارکینگ در اولین ساعت کامپیو ساعت هفتراست و در هفتمین ساعت، میتوانند درود خود را در روز ۲۸ اکتبر به طبق جدول ۱، برای ۱۸۰ دقیقه (یعنی ساعت هشت) می‌خواهند. کار در کلاس ۲۰۰۰ را در روز ۱۸۰۰ خوب کردن و برای ساعت هشت دقیقه (یعنی ساعت هشت) خود را در هفتمین ساعت کار در کلاس نوشته فربه کنند. دلیل این کار در کلاس نوشته فربه کنند، را باهم جمع کنیم)

کار در کلاس



ضابطه تابع و نمودار آن را کامل کنید.
در سال گذشته دایش آموزان به این روش حل می کردند

$$m = \frac{3-0}{3-6} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$f(x) = mx + h \Rightarrow f(3) = -1(3) + h = 3 \Rightarrow h = 3 + 3 \Rightarrow h = 6 \Rightarrow f(x) = -x + 6$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 3 \\ -x+6 & 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

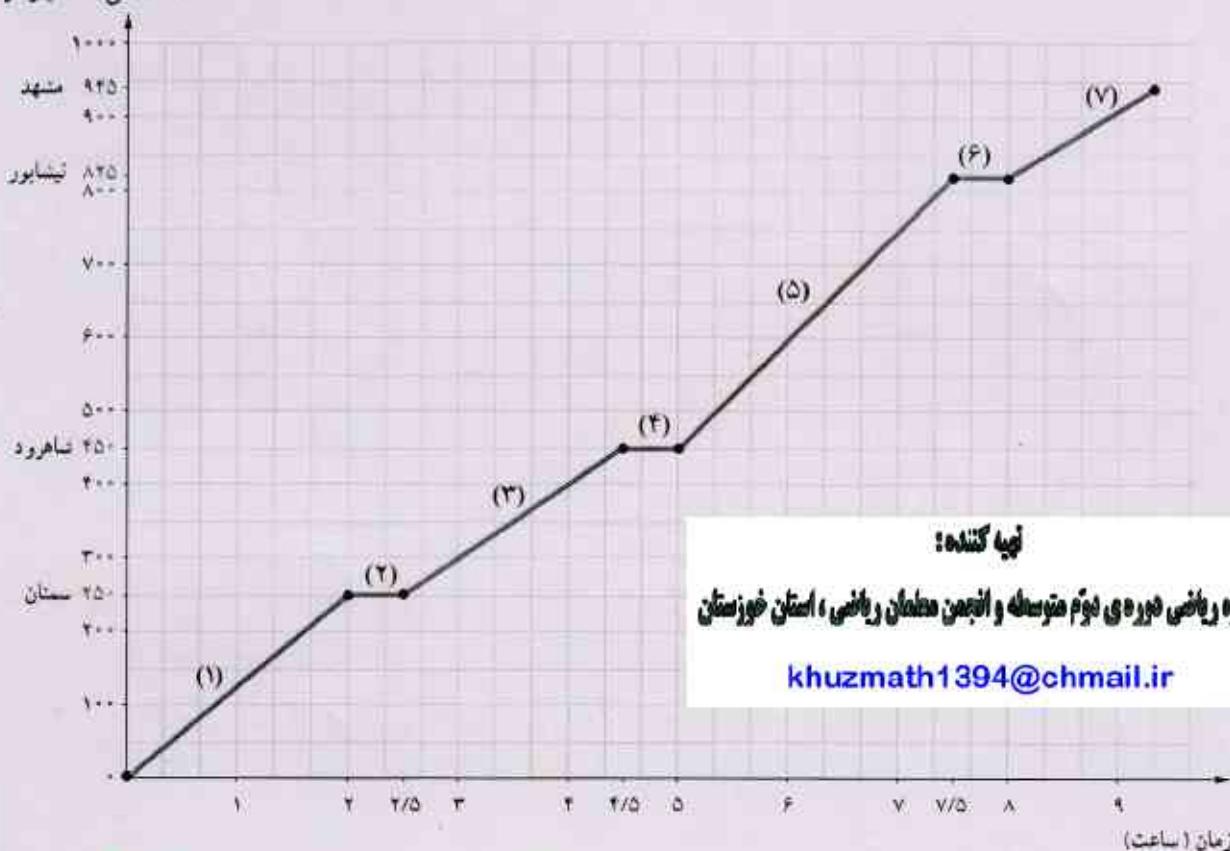
فعالیت

نمودار زیر قطاری را نشان می دهد که از تهران به مشهد رفته است.

ترفه در آنکه

- منهوم قسمت هایی که نمودار تابع ثابت است چیست؟
- ضابطه تابع «مکان-زمان» قطار از لحظه رسیدن به شاهروд تا لحظه ترک تیساپور را بدست آورید.
- اگر قطار مطابق ضابطه بخش ۵ و بدون توقف در تیساپور به مسیر خود ادامه دهد، در چه زمانی به مشهد می رسد؟

مسافت طی شده (کیلومتر)



نویسنده:

گروه ریاضی دوره‌ی دوم هنرستان و فنون معلمان روانی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

پاسخ ۱۳: صحن فاصله خط (۱۰)

$$120n - 200 = 940 \rightarrow$$

$$120n = 1240 \rightarrow n = \frac{1240}{120} = 10.3$$

$$n = 10 + 0.3 \times 7 \rightarrow n = 10.18$$

کسر که باست
لطفاً فرمایید

پاسخ ۱۴: خط (۲) : $y = 40x + 250$ $0 \leq x < 5$

خط (۱): $y = 120x - 200$ $5 \leq x < 7.5$

خط (۳): $y = 820$ $7.5 \leq x \leq 9$

$$f(x) = \begin{cases} 40x + 250 & 0 \leq x < 5 \\ 120x - 200 & 5 \leq x < 7.5 \\ 820 & 7.5 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

تابع همانی (Identity Function)

فعالیت

پیچ شنبه: به دلیل افزایش مرتب خودروهای ورودی از نخستین ساعت کاری تا دوازدهمین ساعت کاری فروشگاه، مدیران شرکت تصمیم گرفته‌اند که از یک مدل «تابع خطی» برای دریافت هزینه از خودروها استفاده کنند. به این معنا که اگر خودرو در n ساعت کاری وارد توفيقگاه شود، هزینه دریافتی n واحد (هر واحد ۵ تومان) باشد.

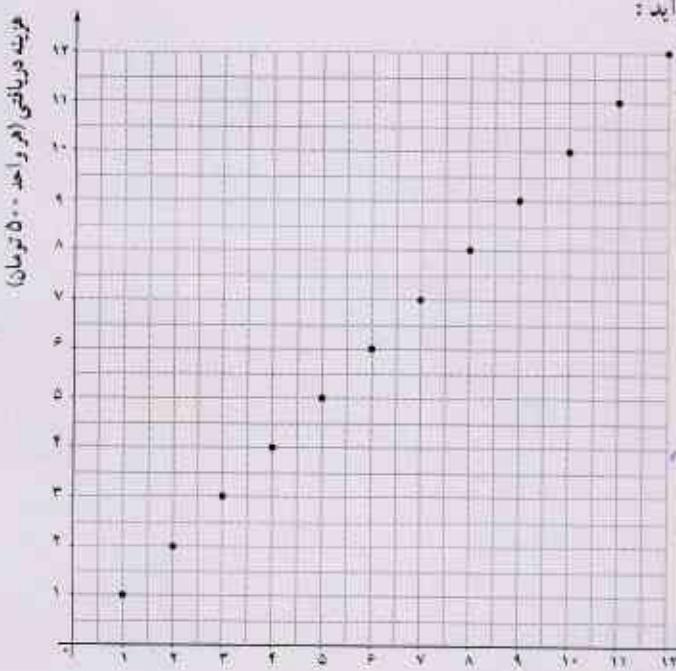
بنابراین نمودار زیر به دست می‌آید:

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9), (10, 10), (11, 11), (12, 12)\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$



که ابتدا هر واحده است برای $x=1$

و دوته در سه واحده برای $x=3$

و ...

و n این ساعت کاری فروشگاه

مجموعه نقاط نمودار را به صورت زوج مرتب زمان دهید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. چه رابطه‌ای میان دامنه و برد این تابع باشد؟

$$y = x$$

اگر این مجموعه نقاط را در نمودار به یکدیگر وصل کنیم، این نمودار یعنی چه مفهومی است؟ در این حالت دامنه و برد آن چه تغییری می‌کند؟

این تابع هر عدد حقیقی را به همان عدد حقیقی نظر می‌کند. — دامنه و برد آن قطعاً از مجموعه اعداد حقیقی می‌سود

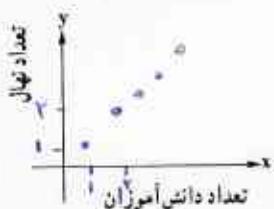
تابع با ضابطه $y = x$ را تابع همانی می‌نامند. با توجه به ضابطه
تابع، در تابع همانی دامنه و برد همواره با یکدیگر برابرند. از لحاظ
هندسی نمودار این تابع نیمساز ناحیه اول و سوم است.

$$D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}$$

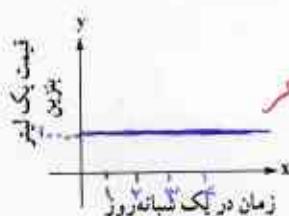
تمرین

ا. با توجه به معرفی محور x و y در هر دستگاه مختصات، با هر کدام از توضیحات زیر کدام یک از نوع ثابت، چند ضابطه‌ای یا همانی معرفی می‌شود؟ نوادار هر حالت را با توجه به توضیحات کامل کنید.

الف. به مناسبت روز درخت‌کاری، در یک مدرسه هر دانش‌آموز بک نهال می‌کارد. $f(x) = x$



$$f(x) = x$$



$$f(x) = 1000$$

ب. هر یک لیتر بنزین عادی در هر زمان از شبانه‌روز در یک بیلبان ۱۰۰۰ تومان است. $f(x) = 1000$ است این چون همیشه در هر ساعت است



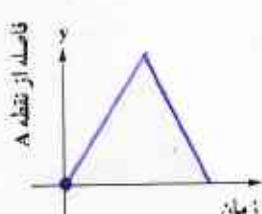
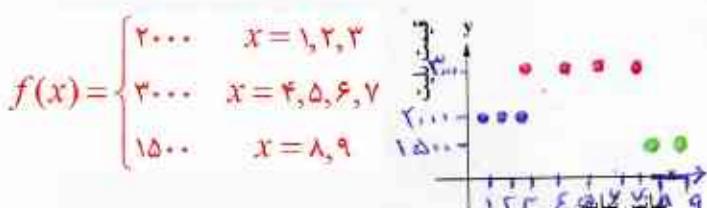
$$f(x) = x$$

ج. برای هر یک متر مربع نقاشی یک ساختمان یک قوطی رنگ کوچک استفاده می‌شود. $f(x) = x$ است

چون سطح زمین شده سه صد متر مربع است
پس نوادار نیما سرع اول سوم بیدست خود

د. بلیت یک سینما در سه سانس اول ۲۰۰۰ تومان، در چهار سانس بعدی ۳۰۰۰ تومان و در دو سانس آخر ۱۵۰۰ تومان است. $f(x) = \begin{cases} 2000 & x=1,2,3 \\ 3000 & x=4,5,6,7 \\ 1500 & x=8,9 \end{cases}$

چون سانس هر سانس سه سی نهم از سیم هر سو



ه. دونده‌ای، کار یک زمین فوبیا، با سرعت ثابت از نقطه A تا نقطه B شروع به دویدن می‌کند و دوباره به نقطه A بر می‌گردد.



چند صفحه ای

۲۱

(از نقطه A با سرعت ثابت در یک رمان شروع B می‌رسد و روانه آر ب ایمان سرعته ثابت است)

قدرت رمان شخص دیگر بیش از این اولین حرمسرا

$$D = \{1, 2\}$$

$$f = \{(1, 1), (2, 1)\} \quad R = \{1, 2\}$$

نمایش
نامنی

۲. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟ چرا؟

الف. اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد، آن تابع همانی است.
ب. اگر دامنه یک تابع همانی مجموعه اعداد حقیقی باشد، آن گاه حاصل $f(x) + f(-x)$ همواره برابر صفر است.
ج. اگر یک تابع ثابت باشد، آن گاه $f(kx) = kf(x)$ نادرست است.

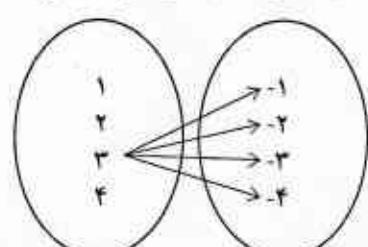
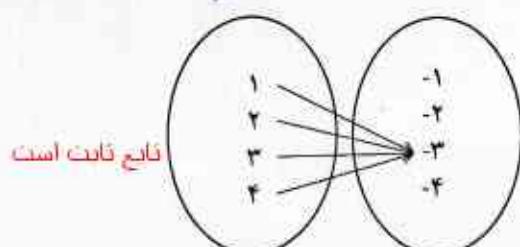
$$\begin{aligned} f(n) &= n \\ f(m) &= -n \end{aligned} \quad \begin{aligned} f(m), f(m), m + (-n) &= 0 \\ f(m) \cdot f(m), f(m) \cdot c &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad f(kx) = c$$

اگر $A = \{(2, b), (a, 4), (7, a+b)\}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار a کدام است؟

$$a+b = 4 \Rightarrow a+4 = 4 \Rightarrow a = 4 - 4 = 0 \Rightarrow a = 0$$

۴. اگر $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ یک تابع ثابت باشد، میانگین، میانه و واریانس مقادیر y_1, y_2, \dots, y_n را بدست آورید.
 $y_1 = y_2 = \dots = y_n = c \Rightarrow \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = c$

۵. کدام یک از نمایش‌های یکانی زیر یک تابع ثابت را معرفی می‌کند؟



$$f(a) = f(b) = f(a+b) = c$$

$$f(x) = c$$

الف. مقادیر $f(a)$, $f(b)$ و $f(a+b)$ را مشخص کنید.

ب. اگر در این تابع $f(a+b) = f(a) \times f(b)$ باشد، c چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

$$c = c \times c \Rightarrow c = c^2 \Rightarrow c(c-1) = 0 \quad \begin{cases} c = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

اگر $A = \{(a, 1), (b, 2), (c, 5)\}$ یک تابع همانی باشد، میانگین a و b و c را بدست آورید.

$$a=1, b=2, c=5 \quad 1+2+5 = \frac{8}{3}$$

۶. در هر یک از زوج مرتب‌های زیر $n \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای تعیین کنید که زوچ مرتب داده شده روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد.

$$(2, n^2 - 2n + 4) \quad n^2 - 2n + 4 = 2 \rightarrow n^2 - 2n + 2 = 0 \Rightarrow (n-1)(n-1) = 0 \quad \begin{cases} n-1 = 0 \\ n-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow n=1$$

$$(-1, n^2 - 4n + 2) \quad n^2 - 4n + 2 = -1 \Rightarrow n^2 - 4n + 1 = 0 \quad \begin{cases} n-1 = 0 \\ n-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow n=1$$

اگر f یک تابع ثابت با دامنه دو عضوی $n \in \mathbb{N}$ و $m \in \mathbb{N}$ باشد، مقدار $t = m + n$ را بدست آورید.

$$f = \{(-1, n^2 - 2n), (m-4, 3), (m+n, t)\} \quad t = 3 \quad n^2 - 2n = 3 \Rightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \Rightarrow (n-1)(n+1) = 0 \quad \begin{cases} n-1 = 0 \\ n+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow n=1$$

۷. ضابطه تابع زیر را مشخص کنید.

$$f = \{(-1, 3), (m-4, 3), (m+3, 2), (m+4, 1)\} \quad \begin{cases} m+3 = -1 \\ m+4 = 1 \end{cases} \Rightarrow m+3 = -1 \quad \begin{cases} m = -4 \\ m = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} m-4 = -1 \\ m = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} m = 4 \\ m = 3 \end{cases}$$

بررسی نتیجه بردار

نیمساز است



$$\Rightarrow m+t = 3+3 = 6$$

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 2 & 0 \leq x < 2 \\ 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

توجه: در سوال ۹

۹

بدست آوردن مقدار $m+t$ ضرورت نداشت

بهتر بود سوال چنان طراحی می‌شد که مقدار پارامترها برابر نباشد

$$x^{10} + 18x^8 + \dots + 38x^0 + 49x^2 + 57x^4 + \dots + 9x^6 + 40x^4 + 9x^2 + 4x^0 = (x^0 + 4x^2 + 9x^4 + \dots + 40x^4 + 9x^2 + 4x^0 + 18x^8 + \dots + 38x^{10})$$

$$+ 68x^3 + \dots = 532 \quad \text{نوبت ۱۱۸۲۰}$$

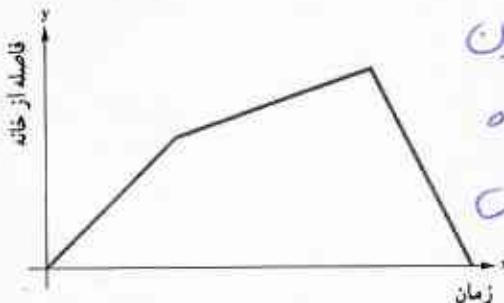
کل درآمد برای بدهی انتسابی

$$f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 2 \\ 5 & x > 2 \end{cases}$$

$f(x)$ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

$$f(2) = 2^2 = 4 \quad f(3) + f(-1) = 2 + (-1)^2 = 4 \quad f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \quad f(\sqrt{2}) + f(5) = (\sqrt{2})^2 + 5 = 2 + 5 = 7 \\ = -\sqrt{2} + 3$$

۱۲. نمودار زیر به کدام داستان مربوط است؟



ب) فرست ج سرپوشی شود چون

سرعت زیاد شدن نمودار کم نه

رسیمان حسنه است که اندیش

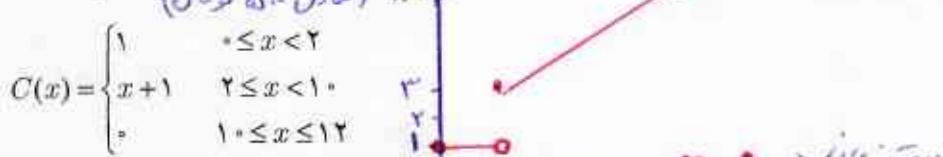
روضن دویل برخورد کرد

الف. آوا و مادریزگش برای قدم زدن در بستان، از خانه خارج شدند. آنها در ابتدا آهسته قدم می‌زند و سپس سرعتشان را بیشتر کردند تا به بستان رسیدند. سپس، از مسیری که آمده بودند، برگشتند و به خانه رسیدند.

ب. علی با دوچرخه‌اش از خانه به سمت بالای تپه رو به روی خانه‌شان حرکت کرد. پس از مدتی شبب تپه کمتر شد تا به بالای تپه رسید. سپس از آنجا از سمت دیگر به پایین تپه سرازیر شد.

ج. محمد رضا برای دویدن روزانه‌اش از خانه خارج شد. هنگام دویدن با دوست خود که در حال دویدن بود، برخورد کرد که باعث شد از سرعت دویدنش کم شود؛ اما بعد از آن با سرعت بیشتری به سمت خانه حرکت کرد و به خانه رسید.

۱۳. اگر هزینه توقفگاه در روز جمعه بر اساس مدت زمان سپری شده از بازگشایی فروشگاه از ساعت ۸ صبح از تابع



پیروی کند، با رسم نمودار تابع، هزینه توقفگاه هر خودرو را با توجه به ساعت و زمان ورودش به توقفگاه به کمک نمودار تابع محاسبه کنید. (هر واحد بر روی محور زمان معادل ۵۰ تومان است). $2 + 1 = 3$ $2 + 1 = 3$ $2 + 1 = 3$ $2 + 1 = 3$

* ۱۴. درآمد فروشگاه از توقفگاه را از روز شنبه تا چهارشنبه در دو حالت زیر مقایسه کنید.

الف. قبل از هوشمندسازی و بر اساس هزینه ثابت ۷۰ تومان برای هر خودرو که مستقل از روز و ساعت ورود به توقفگاه است.

ب. بر اساس هوشمندسازی در هر دو حالت از اطلاعات جدول ۱ استفاده کنید.

$$\text{حل تعریف دار اجباری بست} \quad 21239 \quad \text{نکته} \quad (110 + 130 \times 2 + 140 \times 3 + 170 \times 2) \times 70 = 21239 \quad \text{نکته} \quad (210 \times 4 + 230 \times 3 + 200 \times 2 + 240 \times 2 + 250) \times 70 = 18720$$

$$(120 + 110 + 180 \times 3 + 190 + 150 + 140 + 320 + 340 \times 2 + 360) \times 70 = 11900$$

$$(30 + 40 + 90 \times 2 + 70 + 50 + 180 + 270 + 350 + 450 + 550 + 70) \times 70 = 203000$$

کل درآمد برای ۱۷۰۱۰۰

$$\text{ب) بر اساس هوشمندساز} \quad (30 \times 3 + 40 \times 3 + 50 \times 2 + 70) \times 0 = 0 \quad \text{نکته} \quad (110 + 120 \times 2 + 140 \times 2 + 150 \times 2 + 170 \times 2) \times 70 = 885000 \quad \text{نکته} \quad (210 \times 4 + 230 \times 3 + 200 \times 2 + 240 \times 2 + 250) \times 100 = 249000$$

درس ۲

تابع پلکانی و قدر مطلقی

تابع پلکانی (Step Function)

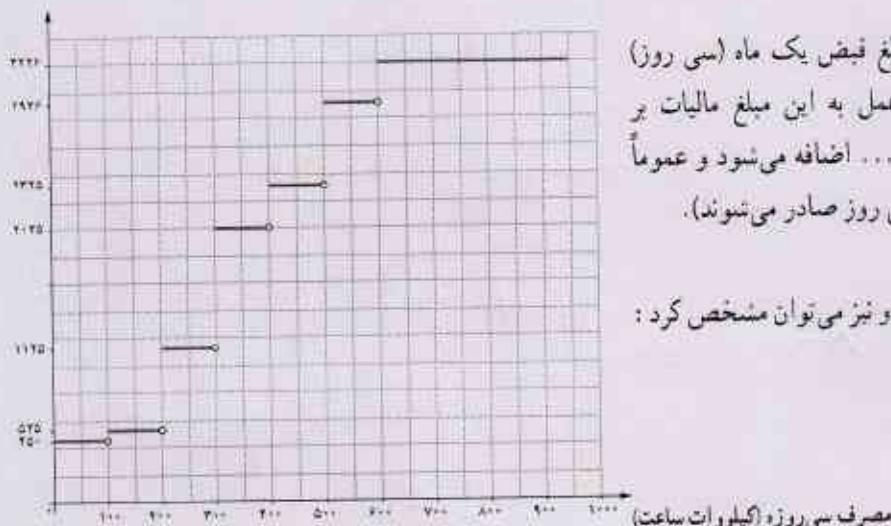
روش محاسبه قبض برق

محاسبه هزینه برق مصرفی در هر خانه بر اساس میزان «کیلووات ساعت» برقی است که در هر سی روز در یک خانه مصرف می‌شود. یک کیلووات ساعت (*kwh*) در واقع مصرف یک وسیله هزار واتی در مدت زمان یک ساعت است، مثلاً اگر ۱۰ لامپ صد واتی را به مدت یک ساعت روشن کنیم، یک کیلووات ساعت برق مصرف کرده‌ایم.

مبلغ هزینه مصرف ۳۰ روزه	مبلغ ۷۰ روزه	مبلغ ۴۰ روزه	مبلغ ۲۰ روزه	مبلغ هزینه مصرف ۵ روزه
۶۵۰۰	۹۰۰	۴۵۰	۲۲۵	۱۳۵
۲۹۵۰	۴۰۰	۲۲۵	۱۱۲۵	۷۰۵
۲۵۰۰	۱۰۰	۵۰	۲۵	۱۵
۰	۰	۰	۰	۰

اگر فرض کنیم مصرف برق یک خانه در سی روز $246/23 \text{ kwh}$ بوده است، برای محاسبه هزینه مصرف برق، میزان کیلووات ساعت مصرفی مطابق این جدول به صورت پلکانی تقسیم می‌شود.

هزینه پلکانی برق (ربال)



مجموع مبالغ سی هزار آخوند، مبلغ قبض یک ماه (سی روز) را مشخص می‌کند (البته در عمل به این مبلغ مالیات بر ارزش افزوده و عوارض برق و...) اضافه می‌شود و عموماً قبض‌های برق برای بیشتر از سی روز صادر می‌شوند).

جدول بالا را یا نمودار رویه رو نیز می‌توان مشخص کرد:

نمودار بالا نمودار یک تابع چندضابطه‌ای است که در هر ضایعه مقدار تابع عددی بایت است. این نوع توابع را تابع پلکانی می‌نامند.

فعالیت

به کمک نمودار بلکانی رسم شده برای محاسبه هزینه برق مصرفی یک خانه:

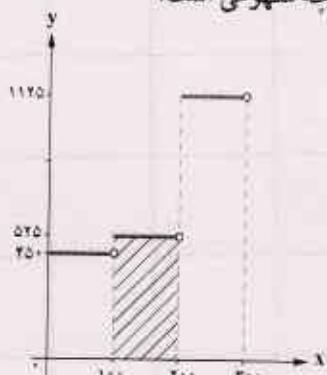
۱. هزینه 100 kwh اول جگونه محاسبه می شود؟ آیا می توانیم مساحتی را در نمودار داده شده، مشخص کنیم که این هزینه را تعیین کند؟

$$100 \times 45 = 450$$

۲. مساحت قسمت هائیور خورده زیر یانگر چه مفهومی است؟

هزینه مازاد بر صرف

$$(100 \text{ L} - 200 \text{ Kwh})$$



۳. هزینه کل برق مصرفی این خانه معادل چه مساحتی است؟ این مساحت را هائیور بزنید و مقدار هزینه را مشخص کنید.

هزینه مازاد بر قیمت

$$100 + 100 + 67,23 = 267,23$$

$$100 \times 45 + 100 \times 25 + 46/23 \times 1120$$

$$= 45000 + 25000 + 5200 \times 1120$$

$$= 14950 \text{ Kwh}$$

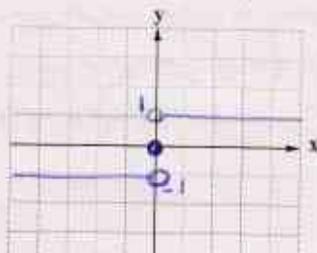
← (صیغه بزرگ صفر بزرگ)

تابع علامت (Sign Function)

کار در کلاس

بر اساس ضابطه تابع بلکانی $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ ، نمودار آن را رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

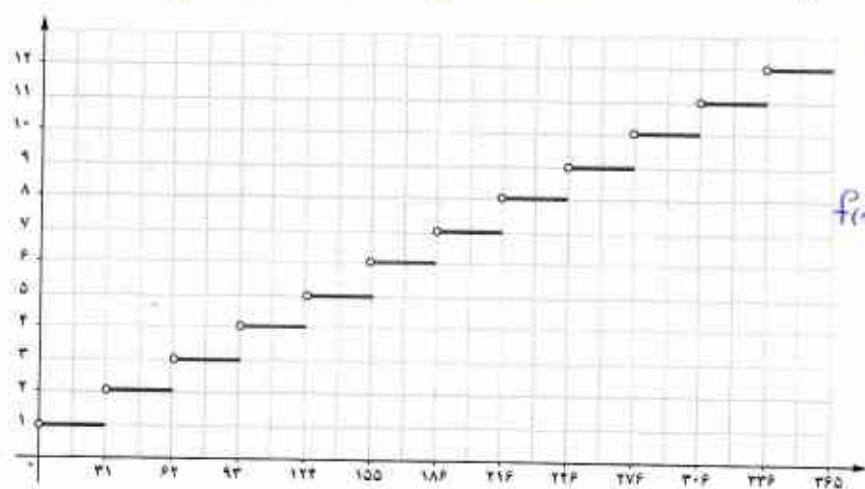


$$\text{دامنه } D_f = \mathbb{R} \text{ بر } R_f = \{-1, 0, 1\}$$

تابع بالا را تابع علامت یا تابع $y = \text{sign}(x)$ می نامند.

کار در کلاس

۱. نمودار زیر مدل ریاضی چه مفهومی را بیان می کند؟ محورهای x و y بیانگر چه کمیت هایی هستند؟ واحدهای آنها را مشخص کنید. ضابطه تابع را بنویسید؟ $\text{کل داروزخا در ماه هما مخفف سال} - \times \text{ بیانگر روزها} \times \text{ ماه هما سال}$



$$f(x) = \begin{cases} 1 & 70 \leq x < 80 \\ 2 & 80 \leq x < 90 \\ 3 & 90 \leq x < 100 \\ 4 & 100 \leq x < 110 \\ 5 & 110 \leq x < 120 \\ 6 & 120 \leq x < 130 \\ 7 & 130 \leq x < 140 \\ 8 & 140 \leq x < 150 \\ 9 & 150 \leq x < 160 \\ 10 & 160 \leq x < 170 \\ 11 & 170 \leq x < 180 \\ 12 & 180 \leq x < 190 \end{cases}$$

$70 \leq x < 80$

$80 \leq x < 90$

$90 \leq x < 100$

$100 \leq x < 110$

$110 \leq x < 120$

$120 \leq x < 130$

$130 \leq x < 140$

$140 \leq x < 150$

$150 \leq x < 160$

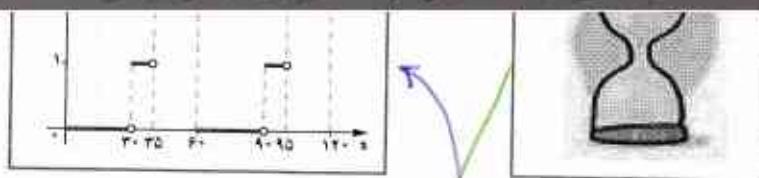
$160 \leq x < 170$

$170 \leq x < 180$

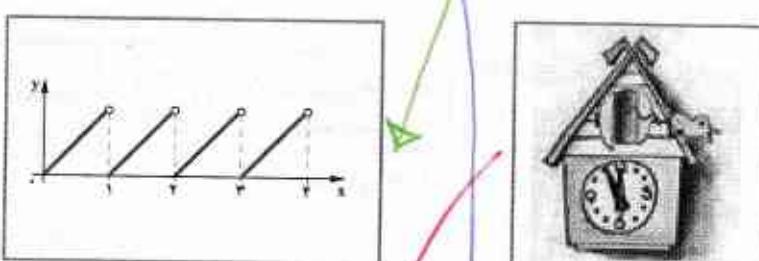
$180 \leq x < 190$

۲. هر کدام از نمودارهای نوعی سمت چپ را به تصوری که بیانگر آن مفهوم است، مرتبط کنید.

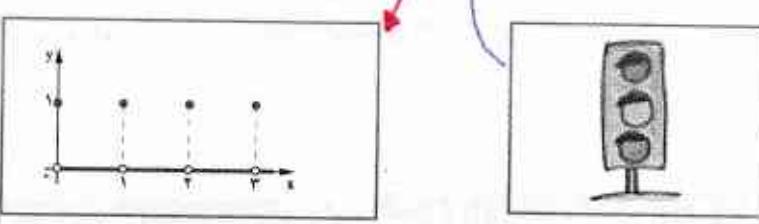
نمودار سوم نمودار سه قسمتی است: در مرحله اول که شناخت اساس هر ساعت بیرون دارد و در مرحله دوم، راهنمایی می شود.



ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین می برد.



برندهایی که در یک ساعت دیواری در رأس هر ساعت از ساعت بیرون می آید.



چراغ راهنمایی و رانندگی سه حالت.

نمودار سوم: مربوط به ساعت دیواری است چون مکان پوئده ثابت است فقط رأس هر ساعت بیرون می آید یعنی مکان آن تغییر می کند

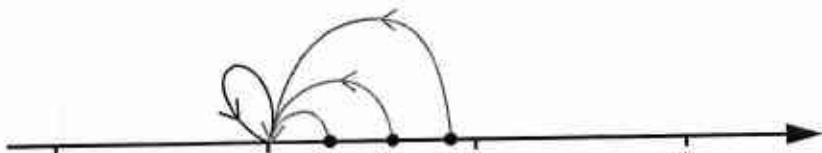
نمودار اول: نمودار طبق چراغ راهنمایی و رانندگی است: در مرحله اول صفر \rightarrow بیانگر روز \rightarrow مجموع روزها \rightarrow چراغ راهنمایی است (چراغ راهنمایی و رانندگی سه می باشد)

نمودار دوم: نمودار ساعت شنبه و یکشنبه با سرعت ثابت در روز \rightarrow مجموع روزها \rightarrow چشم دیگر قیمه اهمیت کوچک داشت \rightarrow ساعت شنبه در روز فردا کمتر خواهد بود.

تابع جزء صحیح (Greatest Integer Function)

فعالیت

فرض کنید y تابعی است که به هر عدد صحیح، خود همان عدد را نسبت می‌دهد و به هر عدد بین دو عدد صحیح متولی، عدد صحیح کوچک‌تر را نسبت می‌دهد.
برای مثال، در این تابع اگر x عدد صحیح ۱ انتخاب شود یا عددی بین ۱ و ۲ باشد، تابع y ، این اعداد را به عدد ۱ نسبت می‌دهد.
به بیانی دیگر:



(شکل ۱)

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow g(x) = 1$$

طبق تعریف تابع y ، اگر x عددی بین دو عدد صحیح متولی ۲ و ۳ باشد، این تابع مقادیر x را به عدد $\frac{3}{2}$ نسبت می‌دهد.
(شکل ۲).

و اگر x عددی بین اعداد ۲ و ۳ باشد، این تابع مقادیر x را به عدد $\frac{3}{2}$. نسبت می‌دهد (شکل ۳).



$$-3 \leq x < -2 \Rightarrow g(x) = -2$$

(شکل ۲)



$$1 \leq x < 2 \Rightarrow g(x) = 2$$

(شکل ۳)

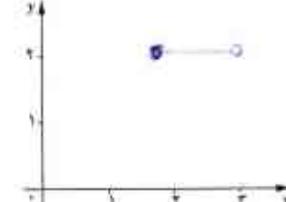
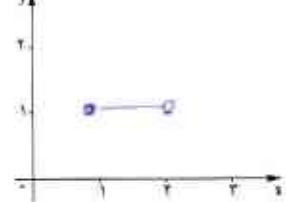
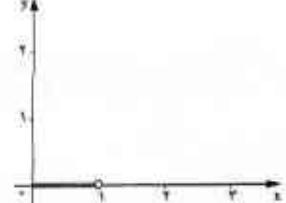
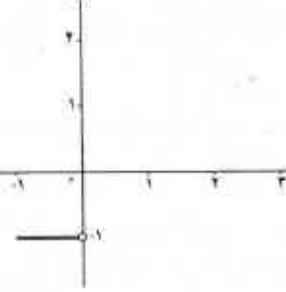
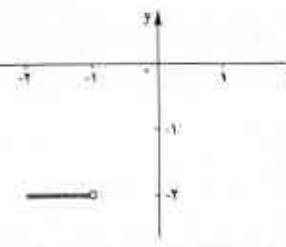
توجه کنید:

گروه ریاضی فوره دوم فتووه و الجعن هتلان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

کار در کلاس

به کمک تابع ψ که در فعالیت صفحه قبل تعریف شده است، جدول زیر را کامل کنید.

حدود x	جواب تابع g	نمودار تابع
 $1 \leq x < 2$	$g(x) = \psi$	
 $1 \leq x \leq 2$	$g(x) = 1$	
 $0 \leq x < 1$	$g(x) = \phi$	
 $-1 \leq x < 0$	$g(x) = -1$	
 $-2 \leq x < -1$	$g(x) = -\psi$	

لپیه گشته:

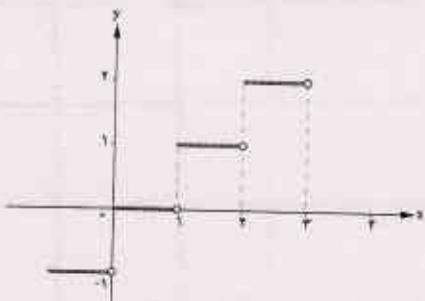
کروه راهنمایی دوم هزینه و ایندیکاتور معلمان رانی، استان خوزستان

۷۸

khuzmath1394@chmail.ir

این حالت را می‌توانیم با یک تابع چندضایه‌ای و نمودار متناظرش به صورت زیر بیان کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} \vdots & \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ \vdots & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ \vdots & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$



تابعی را که به هر عدد صحیح n خود همان عدد و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی n و $n+1$ ، عدد صحیح n را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح می‌نامند. ضایه این تابع را با $[x]$ یا $g(x) = [x]$ (بخوانید جزء صحیح x) معرفی می‌کنند.

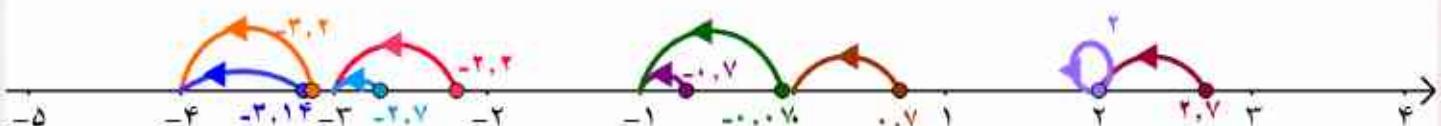
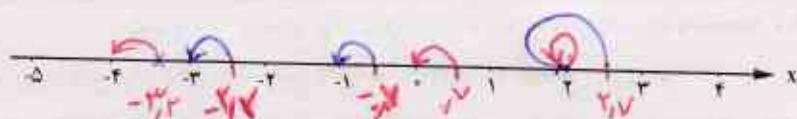
کار در کلاس

به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور اعداد، حاصل عبارت‌های خواسته شده را به دست آورید.

$$[7] = 2 \quad [2\pi] = 2 \quad [-2\pi] = -3$$

$$[\pi/4] = 0 \quad [-\pi/4] = -1 \quad [-\pi/\pi/4] = -1$$

$$[-2/\pi] = -1 \quad [-\pi] = -1 \quad [-2/2] = -1$$



نوبه گفته!

گروه ریاضی دوره‌ی دوم هنرستان و انجمن هنرستان و ریاضی، استان خوزستان

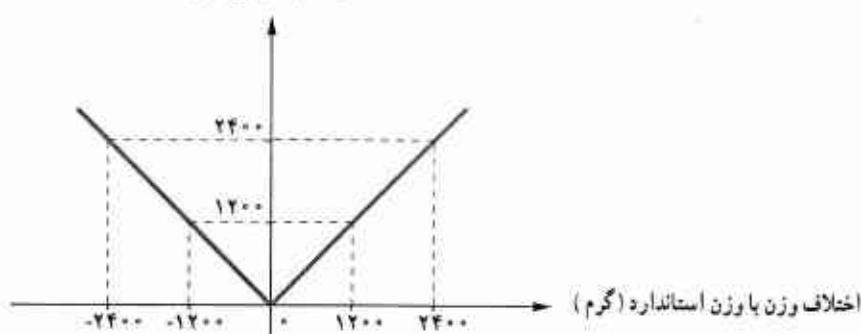
تابع قدر مطلق (Absolute Value Function)

فعالیت

فعالیت ۱. هر چند امروزه بخش عمده‌ای از افراد از اضافه وزن رنج می‌برند، بخش دیگری نیز دچار کمبود وزن نسبت به وزن استاندارد هستند. هر دو گروه باید تلاش کنند که وزن خود را استاندارد کنند. یک روش برای این کار، بیاده روی منظم روزانه است. فرض کنیم یک گروه خاص از افراد در یک روز، به ازای هر یک گرم افزایش با کاهش وزن باید یک ثانیه بیاده روی کند. بر این اساس فردی با 1200 گرم اضافه وزن با 1200 گرم کمبود وزن باید 1200 ثانیه، یعنی 2 دقیقه روزانه به صورت منظم بیاده روی کند و فردی با 2400 گرم اضافه وزن یا 2400 گرم کمبود وزن باید روزانه 2400 ثانیه یعنی 4 دقیقه به صورت منظم بیاده روی کند.

این مفهوم را می‌توان به کمک نمودار زیر نشان داد:

زمان بیاده روی روزانه (ثانیه)



اگر مقدار اضافه وزن را با علامت مثبت و مقدار کمبود وزن را با علامت منفی نشان دهیم و f بیانگر تابعی باشد که میزان بیاده روی بر حسب ثانیه را نشان می‌دهد، اطلاعات یش گفته را به صورت زیر می‌توانیم بیان کنیم:

$$f(1200) = 1200 \quad f(-1200) = 1200 \quad f(2400) = 2400 \quad f(-2400) = 2400$$

که این مفهوم را در یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

این تابع را می‌توان چنین تعبیر کرد که هر مقدار در دامنه را، به قدر مطلق همان مقدار در برد نظیر می‌کند.

تابع با ضابطه $f(x) = |x|$ ، تابع قدر مطلق نامیده می‌شود و مطابق تعریف:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

لوبه کنده!

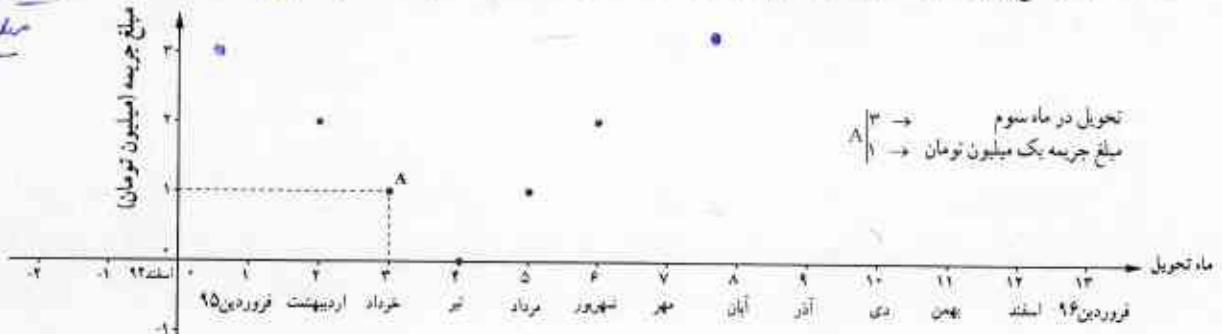
۴۰

گروه ریاضی فرهی دوم منسطه و انبجهن هلالان ربانی، استان خوزستان

فعالیت ۲. بله که روی رودخانه سیمینه‌رود در استان آذربایجان غربی ساخته شده، طبق قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه باید در تیر ۱۳۹۵ افتتاح شود. اگر احداث این بل زودتر از موعد مقرر انجام شود، به دلیل هزینه نگهداری بل و عدم استفاده از آن (به خاطر بیان نیافتن بقیه جاده موصلاتی به بل) به ضرر است. همچنین تأخیر در زمان افتتاح بل نیز موجب خسارت به صاحب کار (وزارت راه) است. بر این اساس مطابق قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه به ازای هر یک ماه اختلاف با زمان تحويل، پیمانکار معهد است یک میلیون تومان جریمه پرداخت کند. تحويل پروژه به روز بستگی ندارد؛ بلکه به ماه تحويل بستگی دارد.

الف. نمودار تابع جریمه بر حسب زمان تحويل پروژه در ماه‌های مختلف را کامل کنید. از این حوابه تأخیر را تحصل بر کفرهای

میتوان چومن جمع



ب. آیا می‌توانید این نمودار را به زبان یک تابع قدر مطلقی بیان کنید؟ $f(n) = \begin{cases} n-4 & n \in \mathbb{N} \\ -n+4 & n \in \mathbb{N} \end{cases}$

ج. اگر پیمانکار چهار میلیون تومان جریمه پرداخت کرده باشد، تحويل پروژه در چه ماه یا ماه‌هایی می‌تواند انجام شده باشد؟ آبان ۹۵ و آذر ۹۶

چرا؟ پاسخ این برسش را به کمک نمودار بالا و ضابطه تابع قدر مطلق به دست آمده توضیح دهید.

پرسش ۴-۷: نحوی چهارمین چومن پرکرده اختلاف طارم. مساحت قطعه $\frac{1}{2}(4-10) \times 10 = 30$ متر مربع

کار در کلاس

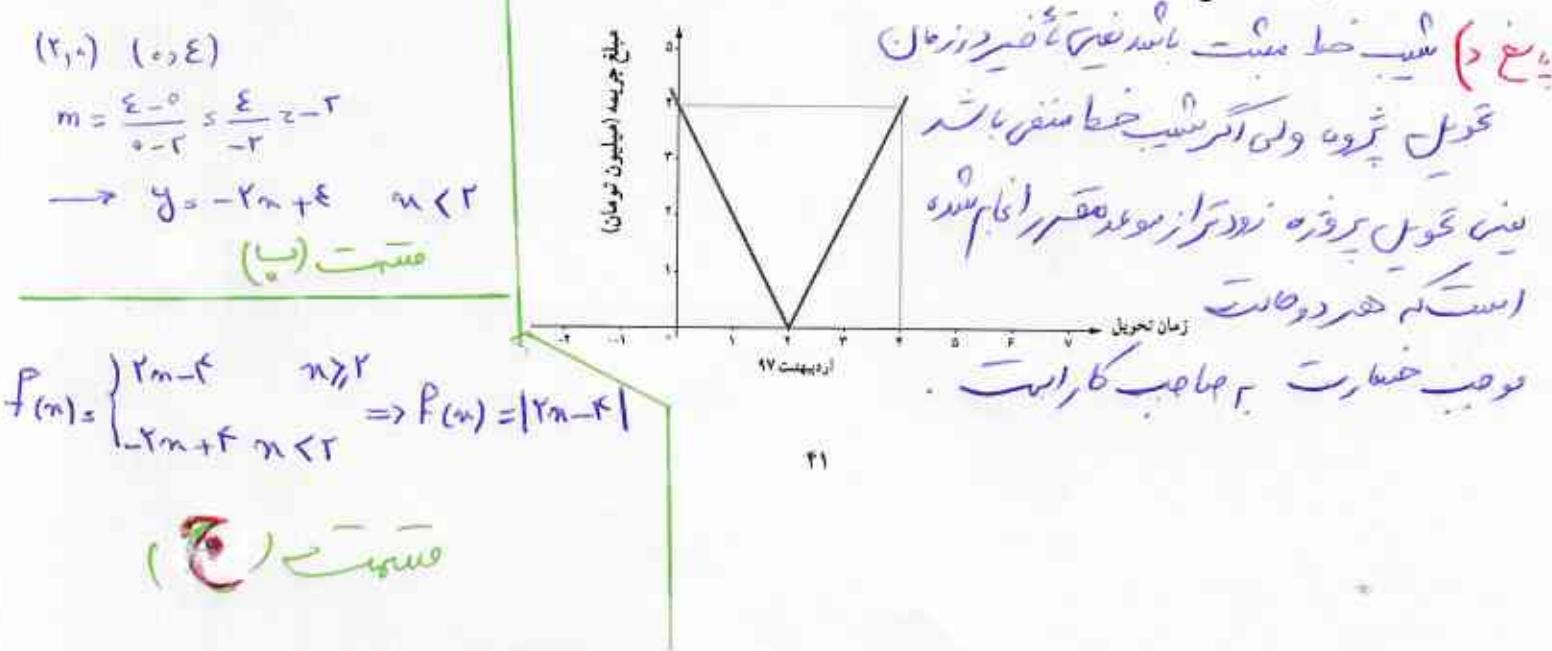
با توجه به نمودار

الف. شرایط تحويل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید. آگر پروژه از راه را در ۴۰ میلیون ریال پرکرده نمایم (۱۰ ایام)

ب. به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه هر یک آنیم خطها با نسبت مثبت و منفی را بدست آورید. برای ناقص نزد

ج. به کمک تعریف تابع قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید. $y = |2n - 4|$ (۱۰ ایام)

د. شیب خط در تابع به دست آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟ (۱۰ ایام)



پرسش ۴) مساحت محدود شده بخط متریک (۱۰ ایام)

تحویل پروژه ولی آگر سبیل خط منفرد باشد

نحوی چومن پرکرده زودتر از موعد مقرر (۱۰ ایام)

(مسکن) هر دو طرف زمان تحويل

موصف خسارت را مواجب کار است.

حل یک مسئله

نمودار تابع $y = |2x - 6|$ را رسم کنید.

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

با توجه به تعریف قدر مطلق

$$y = |2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & 2x - 6 \geq 0 \quad (1) \\ -(2x - 6) & 2x - 6 < 0 \quad (2) \end{cases}$$

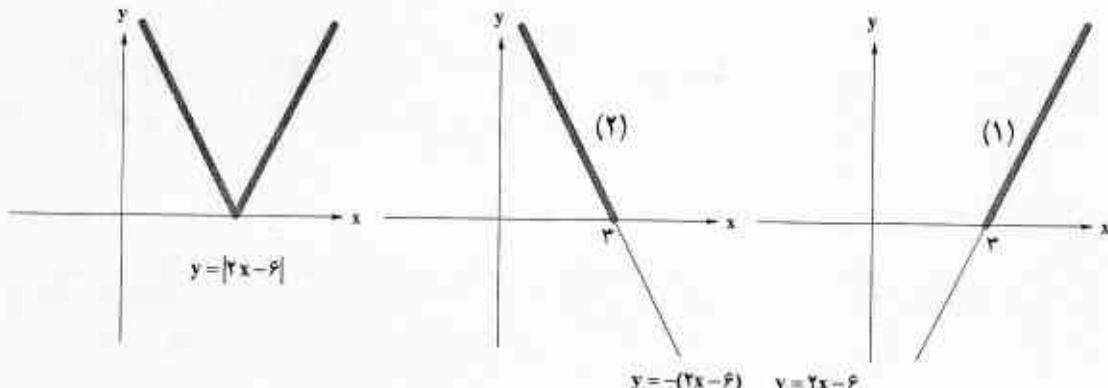
برای تعیین حدود x برای هر کدام از ضابطه‌های بالا، به کمک قوانین نامساوی‌ها در ریاضی نهم:

$$\begin{cases} 2x - 6 \geq 0, 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3 & (1) \\ 2x - 6 < 0, 2x < 6 \Rightarrow x < 3 & (2) \end{cases}$$

پس ضابطه تابع این‌گونه مشخص می‌شود:

$$y = |2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & x \geq 3 \quad (1) \\ -(2x - 6) & x < 3 \quad (2) \end{cases}$$

و نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود:



کار در کلاس

الف. نمودار $y = |x - 4|$ را رسم کنید.

ب. نمودار $y = |x|$ را در همین صفحه مختصات رسم کنید.

ج. آیا می‌توان بدون مراحل حل بالا، بر اساس نمودار $y = |x|$ ، نمودار $y = |x - 4|$ را رسم کرد؟ چگونه؟

د. نمودار $y = |x - 3|$ و $y = |x + 1|$ را با توجه به «ج» رسم کنید.

ه. نمودار $y = |x| + 1$ را جگونه می‌توان بر اساس نمودار $y = |x|$ رسم نمود؟

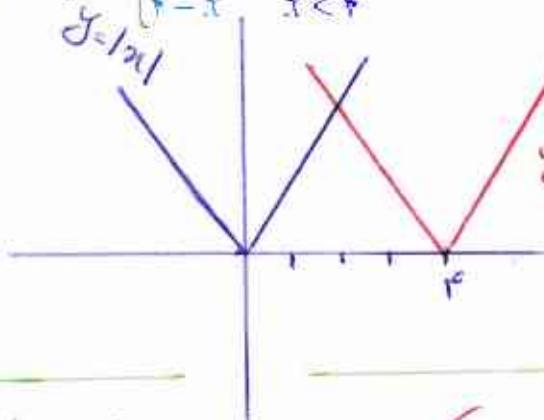
حل مسئله ۴۲

$$y = |x - 4| = \begin{cases} x - 4 & x - 4 \geq 0 \\ -(x - 4) & -(x - 4) < 0 \end{cases}$$

$$y = |x - 4|$$

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} x - 4 & x - 4 \geq 0 \\ 4 - x & x < 4 \end{cases}$$



(۱)

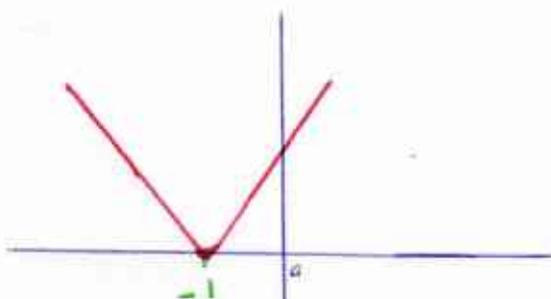
(۲)

ج) مسئله محدودیم تردد مخصوص سه کاربری انتقال حرارت برای رسم $|x - m| = n$ کافی است

این محدودیت $|x - m| = n$ را در سیم کردیں به اندازه ۳ و این رسم را با انتقال حرارت

$$y = |x + 1|$$

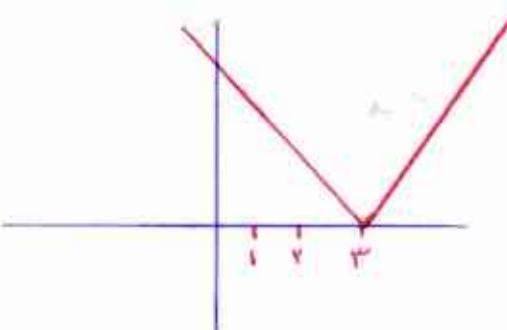
$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$



آنکه $|x + 1| = n$ را با ایندازه ۳ داریم
کافی است

$$y = |x - 3|$$

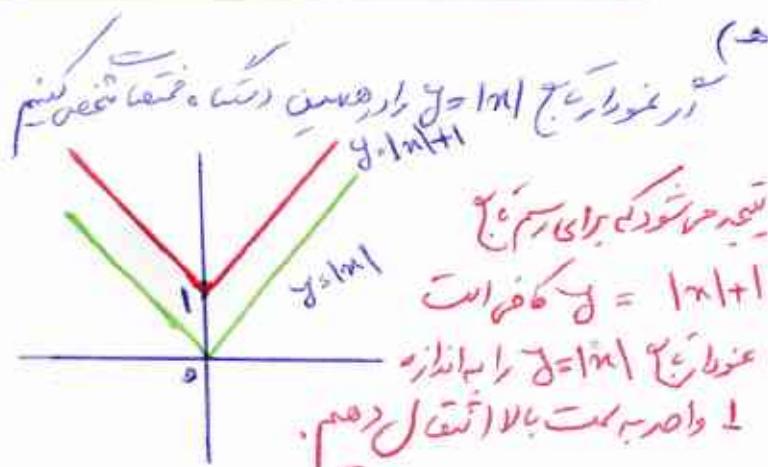
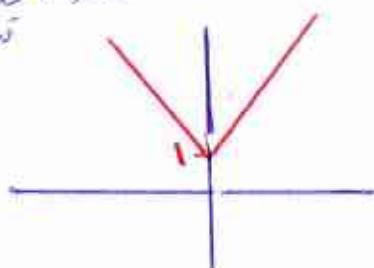
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$



آنکه $|x - 3| = n$ را با ایندازه ۳ داریم
کافی است

$$y = |x| + 1$$

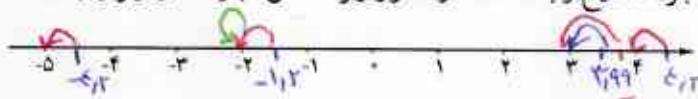
حیثیت درون
 $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow y = 1$
کار طبق
(+) جمعه راس
کار طبق



آنکه $|x| + 1 = n$ را برای رسم
کافی است
آنکه $|x| + 1 = n$ را با ایندازه ۳
داریم
کافی است

تمرین

۱. به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور زیر حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.



$$[\frac{4}{2}] = 4$$

$$[-\frac{4}{2}] = -4$$

$$[\frac{3}{99}] = 3$$

$$[-\frac{1}{2}] = -2$$

$$[-2] = -2$$

$$[\pi] = 3$$

۲. با توجه به تعریف تابع جزء صحیح، جدول زیر را کامل کنید.

ضابطه تابع	مقدار x	$f(x)$
$f(x) = [x]$	$x = -2/3$	$f(n) = -3$
	$x = 5$	$f(n) = 5$
$f(x) = [-x]$	$x = 1/7$	$f(n) = -5$
	$x = 2/3$	$f(n) = -2$
$f(x) = [x] + [-x]$	$x = 1$	$f(n) = 0$
	$x = 1/3$	$f(n) = -1$
	$x = 1/7$	$f(n) = -1$
	$x = 4$	$f(n) = 0$
$f(x) = [2x]$	$x = 1$	$f(n) = 2$
	$x = 0/2$	$f(n) = 0$
	$x = 1/3$	$f(n) = 2$

$$[n] + [-n] = \begin{cases} -1 & n \notin \mathbb{Z} \\ 0 & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۳. جدول مالیاتی زیر را که توسط هیئت مدیره یک شرکت برای سال جدید مالی آماده و تصویب شده است، در نظر بگیرید:

نرخ ماهیانه (درصد)	حقوق ماهیانه (تومان)
معاف از مالیات	۱/۳۰۰/۰۰۰ تا
۱۰	۴/۵۰۰/۰۰۰ تا ۱/۳۰۰/۰۰۰ تا
۱۵	۴/۵۰۰/۰۰۰ تا ۲/۵۰۰/۰۰۰ تا
۲۵	۴/۵۰۰/۰۰۰ تا

الف. نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید.

ب. به کمک نمودار پلکانی و محاسبه سطح متناظر با هر یک از حقوق‌های ماهیانه، مبلغ مالیات هر کدام از کارمندان زیر را محاسبه کنید.

کارمند ۱: مالیات

• کارمندی با حقوق ۱/۲۰۰/۰۰۰ تومان

• کارمندی با حقوق ۲/۴۰۰/۰۰۰ تومان

• کارمندی با حقوق ۶/۴۰۰/۰۰۰ تومان

$$\left(۲۴.۰\ldots \times \frac{۱۰}{۱۰۰} \right) = ۲۴.۰\ldots - ۲۴.۰\ldots = ۲۱۶\ldots$$

$$\left(۶.۰\ldots \times \frac{۲۵}{۱۰۰} \right) = ۶.۰\ldots - ۱۵.۰\ldots = ۴۵\ldots$$

$$f(۱۲\ldots) = ۱۲\ldots - ۱۲\ldots = ۰$$

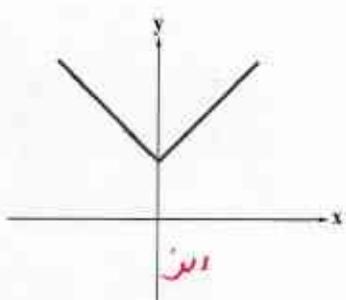
$$f(۲۴\ldots) = ۲۴\ldots - \left(۲۴\ldots \times \frac{۱۰}{۱۰۰} \right) = ۲۴\ldots - ۲۴\ldots = ۰$$

$$f(۶\ldots) = ۶\ldots - \left(۶\ldots \times \frac{۲۵}{۱۰۰} \right) = ۶\ldots - ۱۵\ldots = ۴۵\ldots$$

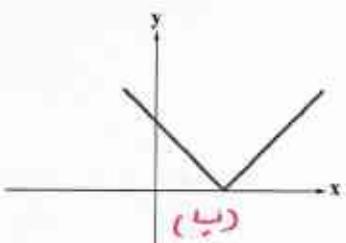
دریافتی

۴. با توجه به نمودارهای زیر، کدام نمودار، تابع a و کدام نمودار، تابع b را مشخص می‌کند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

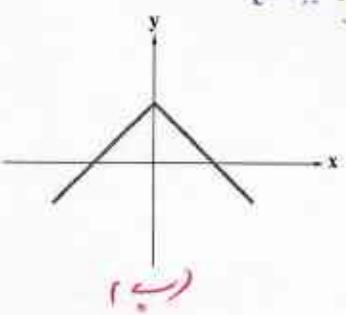
(الف) $y = |x| + 2$
(ب) $y = |x| - 3$



(الف) $y = |x+1|$
(ب) $y = |x-4|$

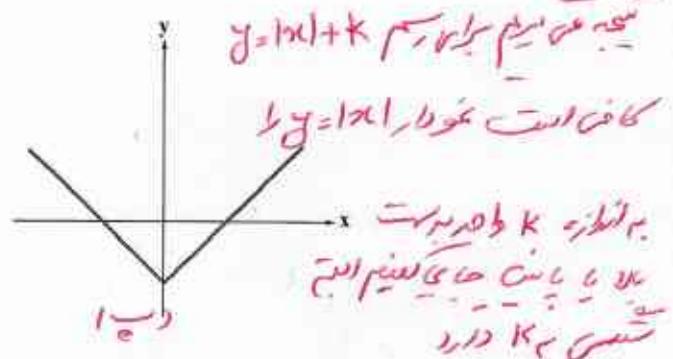
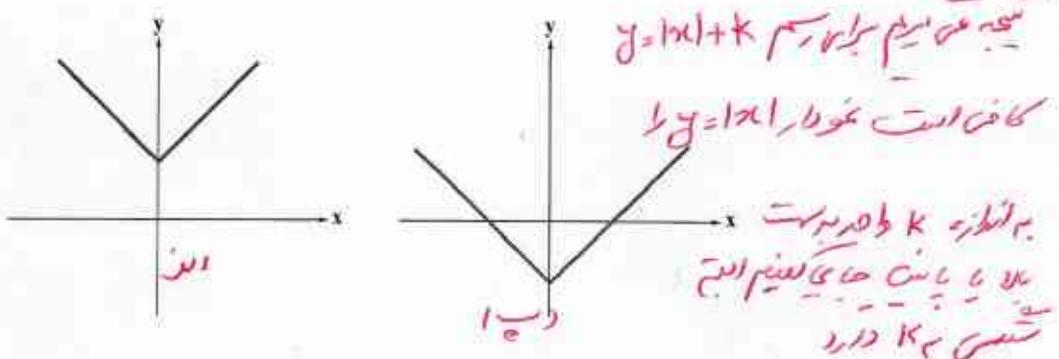


(الف) $y = -|x|$
(ب) $y = -|x|+1$



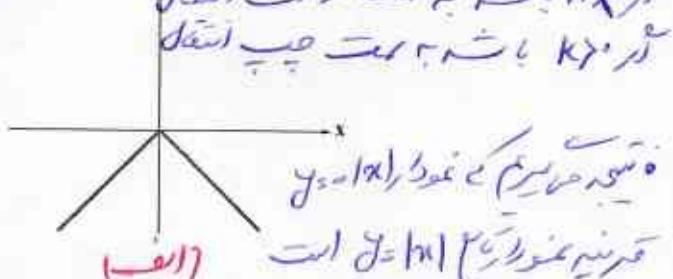
(الف) $y = |2x-3|$

(ب) $y = |3x+1|$



نتیجه: تابع a نسبت به تابع b
۱) آنچه از k بزرگتر است بالا
۲) آنچه از k کوچکتر است پائین

نتیجه: تابع a نسبت به تابع b
۱) k>0 نسبت به k<0 کوچکتر است



نتیجه: تابع a نسبت به تابع b
۱) k>0 نسبت به k<0 کوچکتر است

نتیجه: تابع a نسبت به تابع b
۱) k>0 نسبت به k<0 کوچکتر است

نتیجه: تابع a نسبت به تابع b
۱) k>0 نسبت به k<0 کوچکتر است

نتیجه: تابع a نسبت به تابع b
۱) k>0 نسبت به k<0 کوچکتر است

نتیجه: تابع a نسبت به تابع b
۱) k>0 نسبت به k<0 کوچکتر است

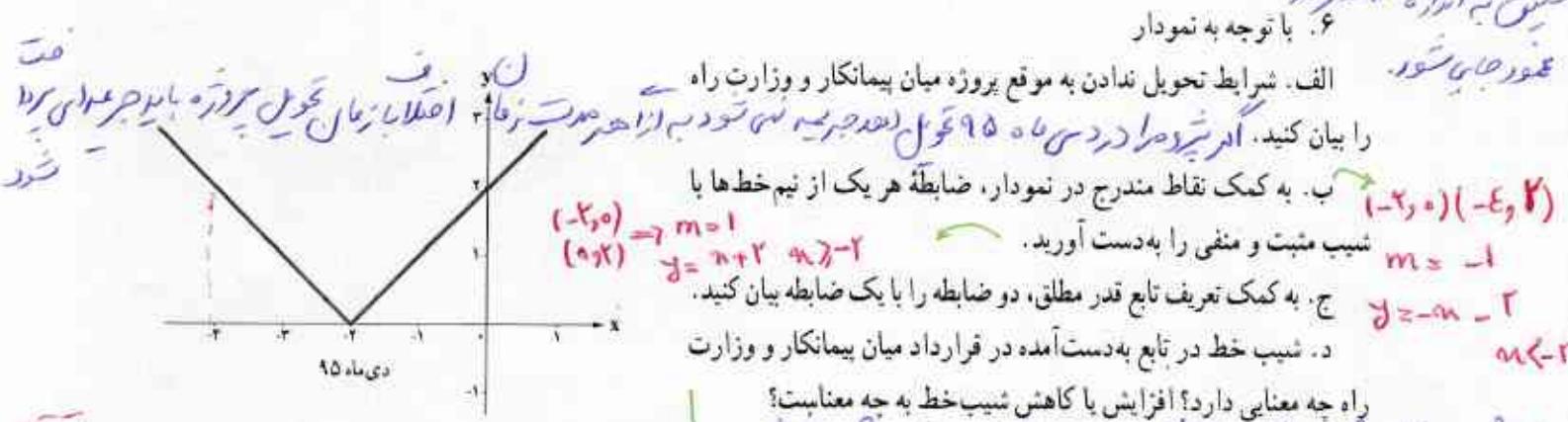
نتیجه: تابع a نسبت به تابع b
۱) k>0 نسبت به k<0 کوچکتر است

نتیجه: تابع a نسبت به تابع b
۱) k>0 نسبت به k<0 کوچکتر است

نتیجه: تابع a نسبت به تابع b
۱) k>0 نسبت به k<0 کوچکتر است

نتیجه: تابع a نسبت به تابع b
۱) k>0 نسبت به k<0 کوچکتر است

نتیجه: تابع a نسبت به تابع b
۱) k>0 نسبت به k<0 کوچکتر است



همه
خط

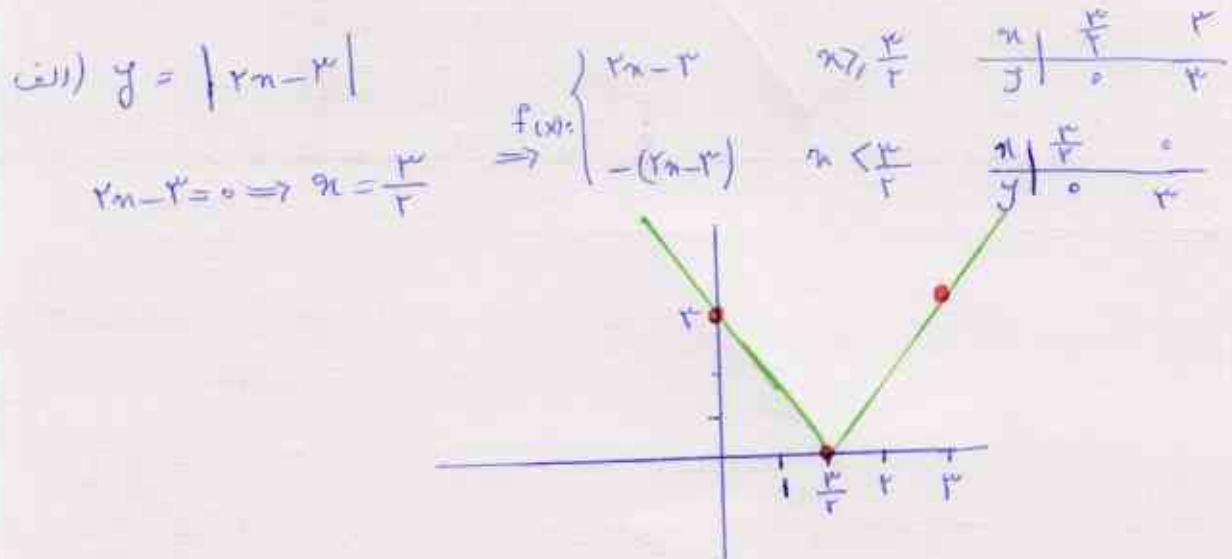
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq 0 \\ -x-2 & x < 0 \end{cases}$$

۱) سه خط مثبت و منفی را به دست آورید.
۲) سه خط مثبت و منفی را به دست آورید.
۳) سه خط مثبت و منفی را به دست آورید.
۴) سه خط مثبت و منفی را به دست آورید.

* اندیس سقدر سه خط نشان (قدرت اندیس مبلغ در عما
د ها فر تعداد سه خط نشان (عدد ها ها مبلغ در عما

تمدنی مفهومی ω بـ کاربردهای انسان سوال

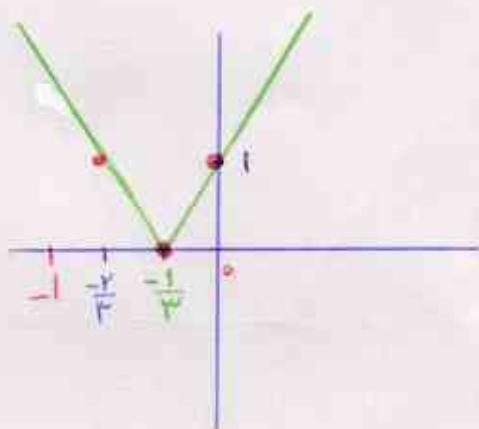
: نتیجه موردی



$\hookrightarrow y = |x + 1|$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$y = \begin{cases} x + 1 & x \geq -1 \\ -(x + 1) & x < -1 \end{cases}$$



نها گشته:

کرو دیاپس دوره دوم متوسط و ابجین هملان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

درس ۳

اعمال بر روی توابع

فعالیت

علیرضا، دانشجوی رشته اقتصاد است و با پدر و مادر و خواهرش مریم (دوازده ساله) زندگی می کند. وی می خواهد در جشنواره فیلم و تئاتر دهه فجر امسال اعضای خانواده اش را به تماشای یک فیلم یا تئاتر دعوت کند. با توجه به تفاوت علاوه‌مندی اعضای خانواده به سبک‌های مختلف فیلم و تئاتر و نوع موارد نمایش داده شده در سینما و تئاتر، برخلاف تصور او لیه‌اش، نتوانست به سادگی تصمیم بگیرد که چه فیلمی را می تواند با اعضای خانواده اش بینند. بنابراین:

۱. ابتدا با یک پرسشنامه سبک دلخواه هر یک از اعضای خانواده را مشخص کرد؛ زیرا بدیهی است که او تمایل دارد با هر کدام از اعضای خانواده اش به دیدن فیلم با تئاتری برود که سلیقه سینمای آنها و خودش را تأمین کند.
۲. با توجه به بودجه محدودی که برای این اقدام در نظر گرفته است، تمایل دارد که بداند هزینه صرفشده در این هفته چقدر خواهد بود. جدول زیر هزینه بلیت سینما و تئاتر را برای گروه‌های مختلف مشخص کرده است. مستو لان جشنواره در بخش‌های برای کودک و نوجوان و نیز دانشجویان تخفیف‌هایی قائل شده‌اند. لطفاً جدول را کامل کنید.

جدول ۱. هزینه بلیت با توجه به گروه‌های مختلف

سینمای کودک و نوجوان	تئاتر	سینما	مکان نمایش گروه سنی
۴۰۰۰	۳۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	فرد عادی
۴۰۰۰	$۴۰\% \text{ تخفیف}$ $= ۲۴,۰۰۰$	$۲۰\% \text{ تخفیف}$ $= ۸,۰۰۰$	دانشجو
$۵۰\% \text{ تخفیف}$ $= ۳,۰۰۰$	$۱۵\% \text{ تخفیف}$ $= ۱,۵۰۰$	۱۰۰۰	کودک و نوجوان



علیرضا تابع پرسش نامه داده شده به اعضای خانواده را در جدول های زیر مشخص نمود :

جدول ۲. علاقه مندی به سینما کودک و نوجوان

غلمن - تخلیق	ایمیشن	تاریخی	کمدی	سبک فیلم	اعضای خانواده
✓	✓		✓		مردم
✓	✓	✓			علیرضا

جدول ۳. علاقه مندی به سینما

غلمن - تخلیق	حاده‌ای	اجتماعی	تاریخی	دقاع مقدس	کمدی	سبک فیلم	اعضای خانواده
✓		✓			✓		مادر
		✓	✓	✓			پدر
							مردم
✓		✓		✓			علیرضا

جدول ۴. علاقه مندی به تئاتر

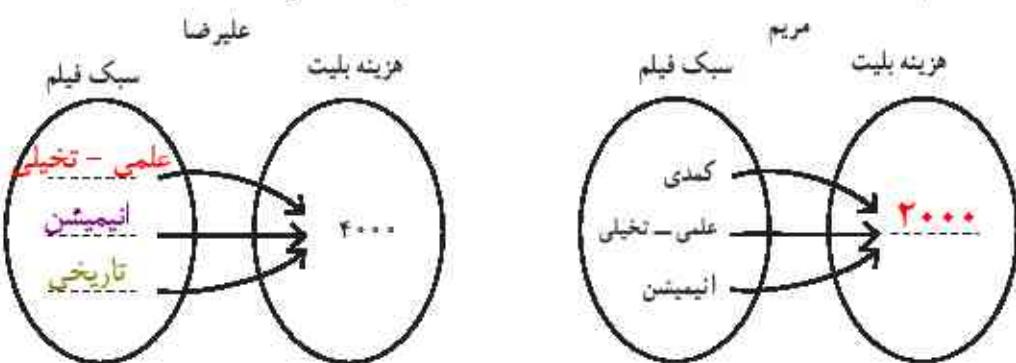
اججتماعی	تاریخی	دقاع مقدس	کمدی	سبک تئاتر	اعضای خانواده
	✓	✓	✓		مادر
✓	✓	✓			پدر
	✓		✓		مردم
	✓				علیرضا

در نخستین روز هفته (شنبه)، علیرضا می خواهد خواهرش را به تماشای یک فیلم در سینما کودک و نوجوان ببرد.
او باید دو نکته را مشخص کند :

۱. به دیدن چه سبک فیلمی می روند؟

۲. هزینه بلیت آنها چقدر است؟

طبعی است که علیرضا و خواهرش به دیدن سبک فیلمی خواهند رفت که هر دو به آن علاقه مند باشند؛ به بیان دیگر این سبک فیلم در استراک علاقه، دو نفرستان باشد. با توجه به جدول های ۱ و ۲ اگر این دو نفر را تابعی در نظر بگیریم که «دامنه» آن سبک فیلم مورد علاقه هر کدام باشد و «برد» آن هزینه خرید بلیت، تماش های یکسانی این دو تابع به صورت زیر است :



پس اشتراک فیلم مورد علاقه شان دو سبک فیلم (ایمیشن و علمی-تخیلی) است و برای تماشای بکی از این دو سبک با هر دو نوع آنها می‌توانند به سینما بروند. این مطلب را می‌توانیم چنین نشان دهیم:

{ ۴۰۰۰، علمی- تخیلی و (۴۰۰۰، ایمیشن) و (۴۰۰۰، تاریخی) } = علیرضا

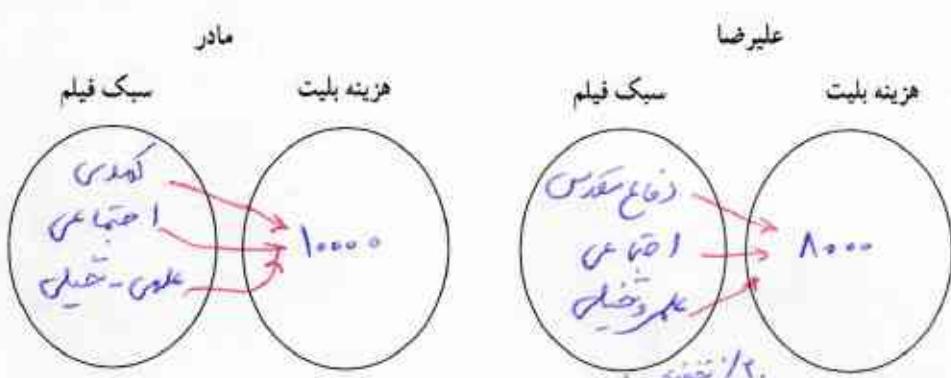
{ ۱۰۰۰، علمی- تخیلی و (۱۰۰۰، ایمیشن) و (۱۰۰۰، کمدی) } = مریم

{ ۲۰۰۰ + ۴۰۰۰، علمی- تخیلی و (۲۰۰۰ + ۴۰۰۰، ایمیشن) } = مریم + علیرضا

کار در کلاس

۱. اگر در روز دوشنبه علیرضا بخواهد مادرش را به تماشای یک فیلم در سینما دعوت کند، با توجه به جدول ۱ و جدول ۲:

الف. نمایش‌های پیکانی مشابه فعالیت صفحه قبل را برای هر کدام رسم کنید.



ب. با توجه به اشتراک سبک فیلم مورد علاقه هر کدام، نمایش زوج مرتبی تابعی را بنویسید که علیرضا و مادرش می‌توانند به تماشای فیلمی در سینما بنشینند.

ج. هزینه‌ای که در این روز علیرضا صرف می‌کند، چقدر است؟ **۱۸۰۰۰ تومان**

۲. پنج شنبه علیرضا می‌خواهد همه اعضای خانواده‌اش را به تماشای یک نتاز ببرد. با استفاده از جدول ۱ و جدول ۲.

الف. نمایش زوج مرتبی هر کدام از اعضای خانواده و سپس نمایش زوج مرتبی شرایطی را که همه آنها به تماشای یک نتاز می‌روند، مشخص کنید.

ب. علیرضا در این روز چه میزان هزینه می‌کند؟

(درست ۶۵۰۰)

۶۵۰۰

$$30000 + 40000 + 18000 + 24000 = 99000$$

(۱۰۰۰۰ و ۷۰۰۰) (۱۰۰۰۰ و ۳۰۰۰) (۱۰۰۰۰ و ۳۰۰۰) { فارغ‌الحدف }

(۱۰۰۰۰ و ۳۰۰۰) (۱۰۰۰۰ و ۳۰۰۰) (۱۰۰۰۰ و ۳۰۰۰) { پدر علیرضا }

$$30000 - 40000 = 26000$$

{ ۱۵۰۰۰ و ۱۵۰۰۰) (۱۵۰۰۰ و ۱۵۰۰۰) = مریم

پاسخ افق

با توجه به فعالیت مطرح شده برسش مهم زیر را پاسخ می دهیم :

با جه شرایطی می توان دو تابع f و g را با یکدیگر جمع کرد؟

برای دو تابع f و g که روی دامنه های دلخواهی تعریف شده اند، $f+g$ تابعی است که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این اشتراک داریم :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

برای مثال اگر :

$$f = \{(1, 2) \text{ و } (-3, 4) \text{ و } (3, -1) \text{ و } (5, 7)\}$$

و

$$g = \{(2, 1) \text{ و } (3, -1) \text{ و } (7, 1)\}$$

فرض شود با توجه به دامنه های دو تابع f و g :

$$D_f = \{1, -3, 3, 5\}$$

$$D_g = \{2, 3, 7\}$$

اشتراک دو دامنه برابر است با :

$$D_f \cap D_g = \{3, 7\}$$

پس تابع $f+g$ این گونه مشخص می شود :

$$f+g = \{(3, -1+5) \text{ و } (7, 7+(-1))\} = \{(3, 4) \text{ و } (7, 6)\}$$

توضیح :

گروه رانشی نوروزی دوم مهرماه و اربعین هلالان رانشی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

فعالیت

با توجه به ضابطه های $f_1(x) = x^r - 1$ و $f_r(x) = x^r + n$ ، ضابطه توابع زیر را به دست آورید:

$$f_r(x) = f_1(x) + f_r(x) = (x^r - 1) + (x^r + n) = 2x^r + n \quad f_r(x) = 2x^r + n$$

$$f_r(x) = f_r(x) - f_1(x) = 2x^r + n - (x^r - 1) = x^r - n - 1 \quad f_r(x) = x^r - n - 1$$

$$f_2(x) = f_r(x) - f_1(x) = (x^r + n) - (x^r - 1) = x^r + n + 1 \quad f_2(x) = -x^r + n + 1$$

$$f_3(x) = f_r(x) \times f_1(x) = (x^r - 1)(x^r + n) = x^{2r} + nx^r - n - 1 \quad f_3(x) = x^{2r} + nx^r - n - 1$$

$$f_4(x) = \frac{f_r(x)}{f_1(x)} = \frac{x^r - 1}{x^r + n} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^r + n} \in \mathbb{N} - 1 \quad f_4(x) = n - 1$$

$$f_5(x) = \frac{f_r(x)}{f_1(x)} = \frac{n+1}{x^r - 1} = \frac{n+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} \quad f_5(x) = \frac{1}{x-1}$$

اگر مقادیر تابع های f_i تا f_r به ازای $x=2$ نمادهای وزنه های کفه های ترازو باشند، چرا دو کفه ترازو با هم برابرند؟ از این پاسخ

جه تبیین می آید؟ **تغییر شرمسال در کارهای سیم**
 کس کفر سکه در تراطیه های لاله ریت کفر در کفر کسر کفر در کفر کسر کفر در کفر.

$$f_1(2) + f_r(2) = 4$$

$$|f_r(2)| = 0$$

$$|f_r(2) - f_1(2)| = 0$$

$$f_{\sqrt{r}}(2) = 2-1 = 1$$

$$\frac{f_r(2)}{f_1(2)} = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{کفه سمت حب} \\ \text{کفه سمت حب} \end{array} \right\} = 9 + 4 + 0 + 1 + 0 + 1 = 14 \\ \left. \begin{array}{l} \text{کفه سمت راست} \\ \text{کفه سمت راست} \end{array} \right\} = 0 + 9 + 1 + 1 + 0 + 4 = 14$$

عمل های جمع، تفرق، ضرب و تقسیم روی دو تابع به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

نویه گفتگو:

گروه رانشی دوره ای دوم منطقه و انجمن هنرمندان رانشی، استان خوزستان

$f_1(v) = (v)^v - v = v - v = 0$	$f_v(v) = (v) + v = v$
$f_\tau(v) = (v)^v + (v) = v + v = v$	$f_\tau(v) = (v)^v - (v) - v = v - v - v = 0$
$f_\delta(v) = -(v)^v + (v) + v = -v + v + v = 0$	$f_\delta(v) = (v)^v + (v)^v - (v) - v = v + v - v - v = 0$
$f_\gamma(v) = (v) - v = 0$	$f_\lambda(v) = \frac{v}{(v)-v} = \frac{v}{0} = \text{undefined}$

سمت چپ ترازو	سمت راست ترازو
$f_s(v) = 0$	$ f_s(v) - f_v(v) = v - v = 0 = 0$
$f_1(v) + f_\tau(v) = v + v = v$	$ f_\delta(v) = 0 = 0$
$ f_\tau(v) = 0 = 0$	$f_1(v) \times f_\tau(v) = v \times v = v$
$ f_\tau(v) - f_\lambda(v) = v - v = 0 = 0$	$f_\tau(v) = (v)^v + (v) = v + v = v$
$f_\gamma(v) = (v) - v = 0$	$f_\lambda(v) = \frac{v}{(v)-v} = \frac{v}{0} = \text{undefined}$
$\frac{f_\tau(v)}{f_\lambda(v)} = \frac{v}{v} = 1$	$\frac{f_1(v)}{f_\tau(v)} = \frac{v}{v} = 1$
$0 + v + \dots + v + v = 17$	$0 + \dots + 0 + v + v + v = 17$

نتیجه می گیریم:
$f_\delta(v) = f_1(v) \times f_\tau(v)$
$f_1(v) + f_\tau(v) = f_\tau(v)$
$ f_\tau(v) = f_\delta(v) $
$ f_\tau(v) - f_\lambda(v) = f_1(v) - f_\tau(v) $
$f_\gamma(v) = \frac{f_1(v)}{f_\tau(v)}$
$\frac{f_\tau(v)}{f_1(v)} = f_\lambda(v)$

نها کند:

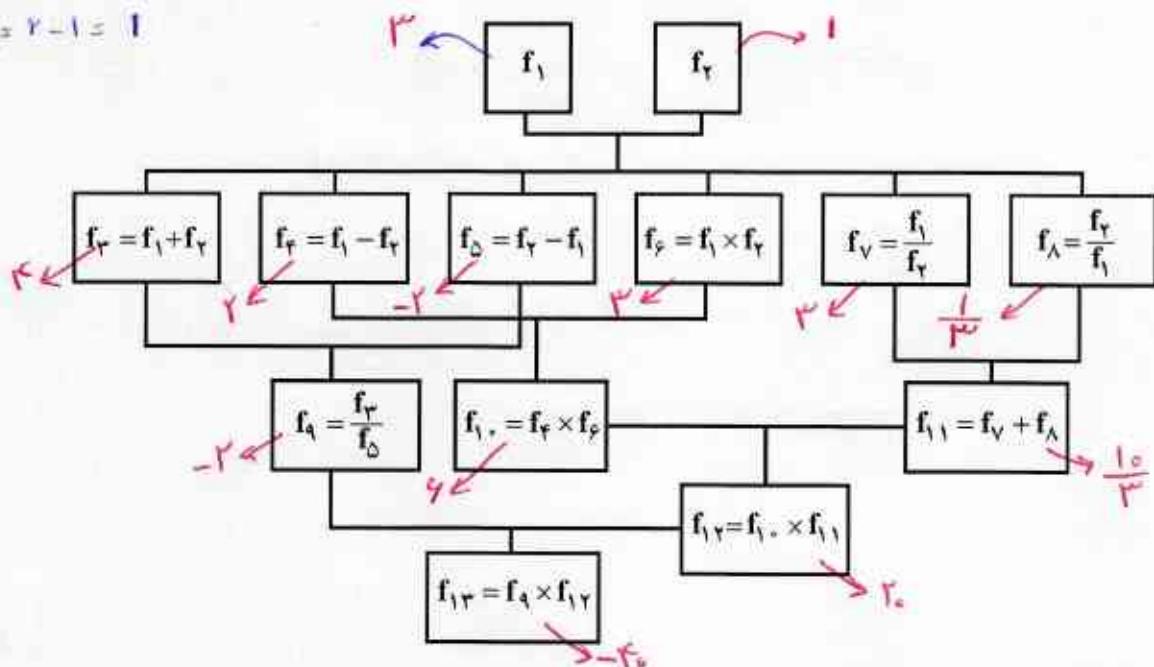
کرو و پاپی دوره ای دو مرتبه و این هم مطابق باشد، اصلان خواهد شد

کار در کلاس

۱. با توجه به ضابطه $f_r(x) = x - 1$ و $f_v(x) = x + 1$ درخت زیر را به ازای $x = 2$ کامل کنید.

$$f_r(2) = 2 + 1 = 3$$

$$f_v(2) = 2 - 1 = 1$$



۲. اگر $\{(3, 1), (-1, 4), (1, -1), (2, 0), (0, 2), (5, 2)\} = f$ و $\{(-1, 2), (1, 0), (0, 5), (2, 5)\} = g$ باشد، توابع زیر را مشخص کنید.

$$f + g = \{(r, \Delta), (-1, \Delta)\}$$

$$D_{f+g} = \{r, -1\}$$

$$f \times g = \{(r, \circ), (-1, \circ)\}$$

$$D_{f \times g} = \{r, -1\}$$

$$\frac{g}{f} = \left\{ (-1, \frac{r}{r}) \right\}$$

$$D_g = \{-1\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(r, \circ), (-1, \frac{r}{r})\}$$

$$D_{f/g} = \{r, -1\}$$

$$f - g = \{(r, -\Delta), (-1, 1)\}$$

$$D_{f-g} = \{r, -1\}$$

$$g - f = \{(r, \Delta), (-1, -1)\}$$

$$D_{g-f} = \{r, -1\}$$

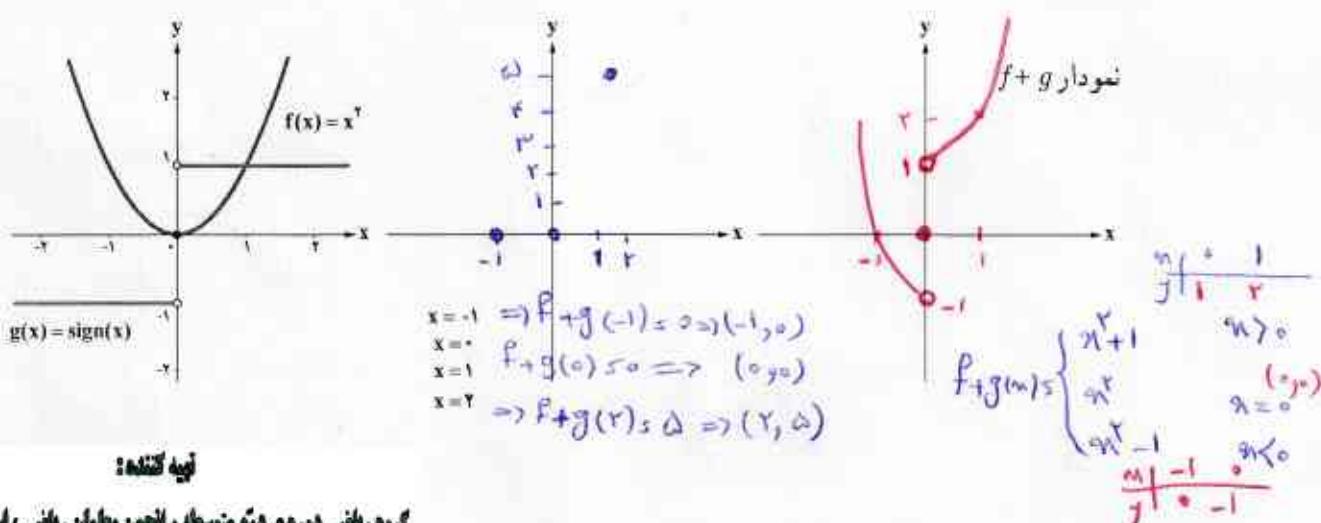
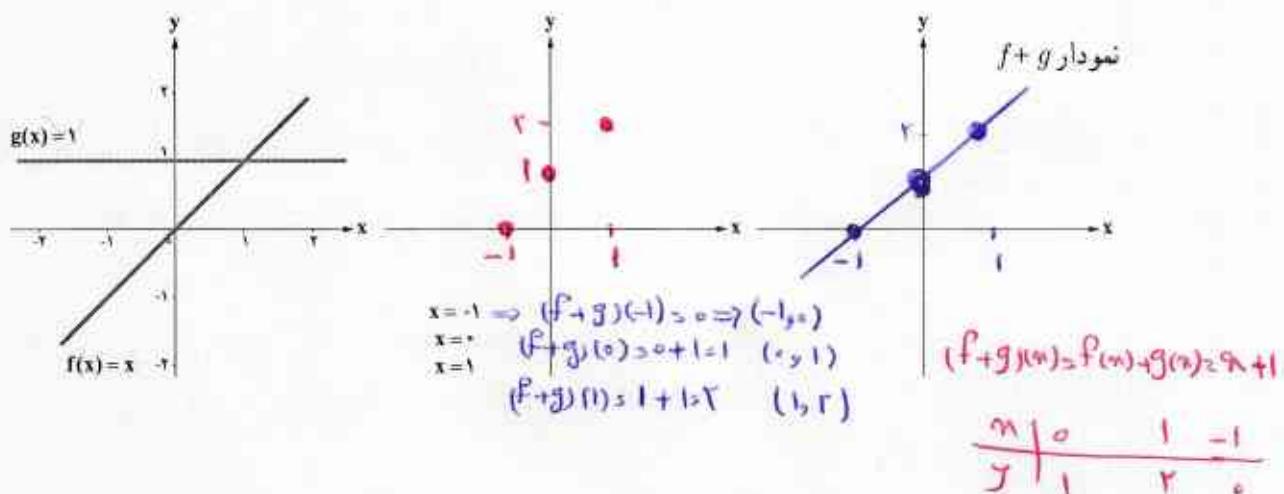
توبه گشته:

۵.

گروه ریاضی دوم منسطه و اجمعن معلمان ریاضی، استان خوزستان

فعالیت

به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g ، نمودار تابع $f+g$ را ابتدا فقط در نقاط داده شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $f+g$ را به کمک ضابطه تابع آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع رسم کنید.



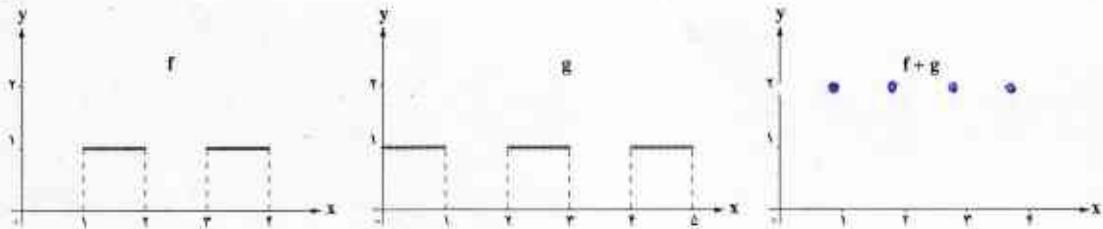
گروه ریاضی دویمه دهم متوسطه و ابتدی معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

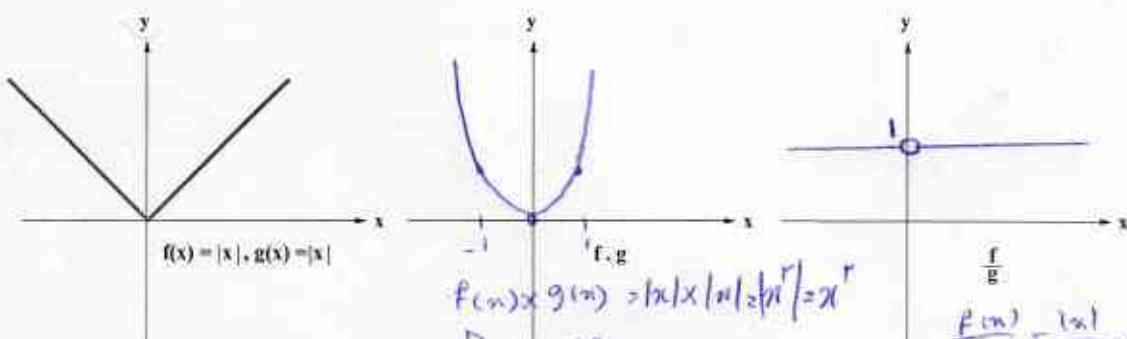
تمرین

$$D_{f+g} = \{1, 2, 3, 4\}$$

۱. در هر حالت با توجه به نمودار توابع f و g ، نمودار تابع خواسته شده را رسم کنید.
- (الف)



(ب)



$$D_{f/g} = \mathbb{R} - \{0\}$$

۲. یک شرکت هولдинگ^۱ دارای دو کارخانه A و B است. اگر تابع درآمد و هزینه برای تولید x تن کاشی در کارخانه A به ترتیب $x^2 + 16x + 6$ و در کارخانه B به ترتیب $x^2 + 12x + 9$ واحد باشد (هر واحد معادل یک میلیون تومان):
- الف. تابع سود شرکت هولдинگ را بدست آورید.

ب. این هولдинگ با چه میزان تولید کاشی به سود ماکریم خود می‌رسد؟

۳. اگر $[x] = f(x)$ با دامنه $1 \leq x \leq 2$ و $|x| = g(x)$ با دامنه $1 \leq x \leq 2$ و $h(x) = x^2 - 4$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$ در نظر گرفته شود، جدول زیر را کامل کنید.

تابع	ضابطه	نمودار
$s(x) = f(x) + g(x)$	$s(x) = [x] + x \quad (1, 2)$ $D_s = D_f \cap D_g = \{1, 2\}$ $m=1 \rightarrow s(1) = [1] + 1 = 2$	
$q(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$	$q(x) = \frac{x^2 - 4}{[x]} \quad (1, 2)$ $D_f \cap D_h = \{1, 2\}$ $m=1 \rightarrow q(1) = \frac{1^2 - 4}{[1]} = -3$	
$p(x) = h(x) \times g(x)$	$p(x) = (x^2 - 4) \times x \quad (1, 2)$ $D_h \cap D_g = \{1, 2\}$ $m=1 \rightarrow p(1) = (1^2 - 4) \times 1 = -3$	

۱. هولдинگ از واژه Latin Hold به معنای نگه داشتن می‌آید. شرکت هولдинگ یا مادر، شرکتی سهامی است که دارایی «شرکت‌های زیرمجموعه» است. کنترل شرکت‌های زیرمجموعه مستقیماً زیر نظر مدیران و هیئت مدیره شرکت اصلی است.



$$P(n) = R_1(n) - C_1(n) = -2n^2 + 18n - (8n + 4) \stackrel{\text{نحوه ۱}}{=} -2n^2 + 10n - 4$$

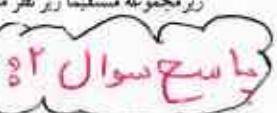
$$P_1(n) = R_1(n) - C_1(n) = -2n^2 + 18n - (8n + 4) \stackrel{\text{نحوه ۲}}{=} -2n^2 + 10n - 4$$

$$P_2(n) = R_2(n) - C_2(n) = -2n^2 + 18n - (8n + 9) \stackrel{\text{نحوه ۳}}{=} -2n^2 + 10n - 9$$

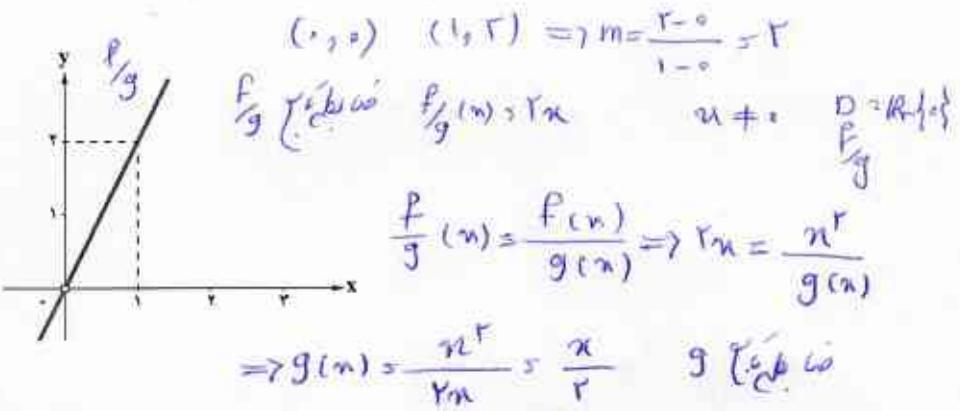
$$\Rightarrow P(n) = -2n^2 + 18n - 4 + (-n^2 + 10n - 4) = -3n^2 + 18n - 15$$

پاسخ هست ب) \leftarrow سورشارکت هولдинگ که سهمی است و همان سهم مقدار آن را سهمی است

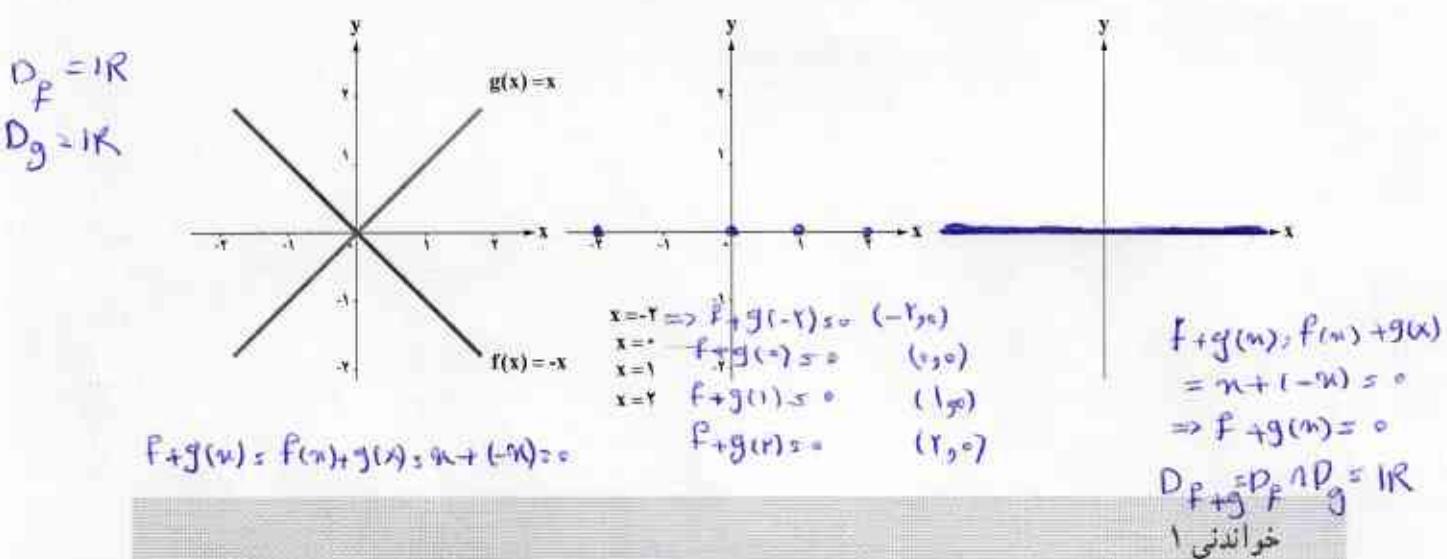
$$m = \frac{-b}{2a} = \frac{-18}{4(-3)} = \frac{9}{2} = 4.5$$



۴. اگر $x = f(x) = \frac{f}{g}(x)$ و تابع $f(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را بدست آورید؟



۵. به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g ، نمودار تابع $f+g$ را ابتدا فقط در نقاط داده شده، مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $(f+g)(n)$ را به کمک ضابطه آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.



چرا در عبارات جبری به جای متغیر از حرف x استفاده می‌کنیم؟

در آثار ریاضی اسلامی برعی از اصطلاحات مانند تمام استفاده نمی‌شدند. یکی از این اصطلاحات کلمه «شی» است که آن را به جای مجھول به کار می‌بردند. اولین ترجمه کتاب‌های ریاضی دوره اسلامی به زبان اسپانیایی انجام گرفت. مسکل علمای قرون وسطی اسپانیا که وظیفه‌شان ترجمه چیزی متومن بود، در این زمینه این بود که حرف «ش» و کلمه «شی» قابل تبدیل به زبان اسپانیایی نبود. به دلیل آنکه در اسپانیا صدای «ش» یا «shi» وجود ندارد. صدای «ck» یا «ک» را از یونانی قدیم به شکل «با» «کای» جایگزین صدای «ش» یا «shi» کردند و بعدها که این متن به زبان‌های رایج‌تر اروپایی ترجمه شد، حرف یونانی «کای» «κ»، با حرف لاتین «x» جایگزین شد.



خواندنی ۲

صنعت کشاورزی که حتی در نگاه نخستین نیز ساده به نظر نمی‌رسد، امروزه برای پاسخ‌گویی به تقاضای روزافزون صنایع غذایی نیازمند تجزیه و تحلیل دقیق تر و فناوری پیشرفته‌تر است. به همین دلیل در سال ۲۰۱۶ و در یک بروزه دانشگاهی، در طرحی جالب، کاری گروهی میان کشاورزان، ریاضی‌دانان و متخصصان مهندسی آب با هدف کاهش مصرف آب و البته تعرفکریز کم نشدن میزان محصول شکل گرفت؛ جنان که در تأمین بازار و سود کشاورزان خلی بوجود نیاید.

برای این هدف یک مدل ریاضی آبیاری طراحی شد که موارد زیر در آن به دقت در نظر گرفته شده بود:

– رابطه میان رشد گیاه و مصرف آب در هر مرحله از رشد

– بهترین زمان کاشت

– مناسب‌ترین مکان کاشت (اینکه در چه زمین‌های کاشت انجام شود و در چه زمین‌هایی ستر کاشت مها نیست) نقطه عطف این طرح این بود که کشاورزان هرگز تصور نمی‌کردند چه اطلاعات مهم و تعیین کننده‌ای در اختیار دارند که با این اطلاعات می‌توان به یک مدل ریاضی برای کاشت محصول دست یافت.

امروزه کمک گرفتن از مدل‌های ریاضی در کشاورزی که بر اساس اطلاعات دقیق کشاورزان طراحی می‌شوند، در صنعت کشاورزی توین به شکل گیری شاخه‌ای به نام «کشاورزی دقیق» (Precision farming) انجامیده است. در این شاخه به جمع‌آوری و بررسی داده‌ها بسیار اهمیت داده می‌شود.

مثالی دیگر در این زمینه طراحی مدلی برای استفاده از کودهای سمیابی است. در حال حاضر به کمک ماشین‌آلات مجهز به GPS برای نمونه‌برداری از خاک زمین‌های کشاورزی و اطلاعات تجربی کشاورزان می‌توان فهمید که چه بخشی از زمین به کود سمیابی بیشتر و چه بخشی به کود کمتر نیاز دارد. برآیند این اطلاعات سبب می‌شود که تا میزان قابل توجهی از استفاده بی‌رویه کود سمیابی جلوگیری شود که نتجه مستقیم و متفاوت آن کمتر شدن چشمگیر نیترات در منابع آبی؛ به ویژه آب‌های کشاورزی است.

فصل ۳- آمار

شاخص‌های آماری

درس ۱

سری‌های زمانی

درس ۲



در دوره متوسطه تقریباً دانش‌آموزان دختر ۵۱٪ از کل دانش‌آموزان این دوره را تشکیل می‌دهند.

درس ۱

شاخص های آماری

$$\text{میانگین} = \frac{2000 + 2000}{2} = 2000 \text{ میلیون}$$

$$\bar{x} = \frac{4 \times 1000 + 2 \times 4000 + 3 \times 3000 + 2 \times 2000 + 1 \times 1000}{10} = 2100$$

سباری از موقع کمیت های وجود دارند که می توانند معرف پارامتر جامعه باشند.

آیا می تواند چند کمیت را که در سال قبل با آن آشنا شدید، نام ببرید؟ نام این کمیت ها چه بود؟ میانگین، میانه، متوسط،
جامعة، داشت آموزان یک صدرمه پارامتر میانگین متوسط آموزان آن صدرمه

فعالیت

نمونه گیری از هزینه و درآمد خانوارها، یکی از مهم ترین طرح های آمارگیری در هر کشوری است. آیا تاکنون فکر کرده اید چگونه متوسط درآمد ماهیانه هر خانواده را در یک کشور محاسبه می کنند؟ سرشماری روشی مفروض به صرفه برای گردآوری داده ها برای پاسخ به این سوال نیست.

در اینجا صورت ساده تر آن را در نظر می گیریم. فرض کنید، می خواهیم متوسط درآمد کارکنان یک مؤسسه تجاری را محاسبه کنیم. ده نفر از کارکنان را به صورت تصادفی انتخاب می کنیم. اگر درآمد ماهیانه ده نفر بر حسب هزار تومان به صورت زیر باشد،
میانگین و میانه درآمد ماهیانه آنها چقدر است؟

هیئت مدیره مؤسسه تجاری تصمیم دارد به کارکنانی که درآمد کمتری دارند، بارانه برداخت کند. به نظر شما به چه کسانی باید بارانه برداخت شود؟ اگر تعداد اعضای خانواده هر عضو نمونه به صورت زیر باشد، میانگین و میانه درآمد هر یک از افراد چقدر است؟ آیا یا داشتن این داده ها نظر شما درباره سوال قبل تغییر کرده است؟ یعنی به کدام یک از کارکنان مؤسسه بارانه برداخت کنیم؟

که درآمد زیر میانگین
دارند

ردیف	درآمد ماهیانه (هزار تومان)	تعداد اعضا خانوار	متوسط درآمد هر عضو
۱	۱۰۰۰	۳	$\frac{1000}{3} \approx 333,333$
۲	۳۰۰۰	۴	$\frac{3000}{4} = 750$
۳	۱۰۰۰	۱	$\frac{1000}{1} = 1000$
۴	۴۰۰۰	۵	$\frac{4000}{5} = 800$
۵	۳۰۰۰	۱	$\frac{3000}{1} = 3000$
۶	۳۰۰۰	۷	$\frac{3000}{7} = 428,571$
۷	۲۰۰۰	۳	$\frac{2000}{3} = 666,667$
۸	۱۰۰۰	۴	$\frac{1000}{4} = 250$
۹	۲۰۰۰	۲	$\frac{2000}{2} = 1000$
۱۰	۱۰۰۰	۱	$\frac{1000}{1} = 1000$

* ۲۵۰, ۳۳۳, ۳۳, ۴۲۸, ۵۷, ۶۹۹, ۷۶, ۷۰۰, ۸۰۰, ۱۰۰۰, ۱۰۰۰, ۱۰۰۰, ۱۰۰۰

$$\text{میانگین} = \frac{750 + 800}{2} = 775 \text{ میلیون}$$

$$\bar{x} = \frac{250 + 333,333 + 428,571 + 666,667 + 700 + 800 + 1000 + 1000 + 1000}{10} = \frac{9228,571}{10} = 922,857$$

$$\text{کار می‌شود} \rightarrow ۱۴۲,۵ - ۳۴۳,۳ = ۵۴,۱۷ \rightarrow ۳۸۷,۰ = \frac{۵۴,۱۷}{۳} = \text{کار می‌شود}$$

$$\text{کار می‌شود} \rightarrow ۱۳۷,۵ = \frac{۵۴,۱۷}{۶} = ۸,۰ = \frac{۳۸۷,۰}{۴} = \text{کار می‌شود}$$

خط فقر حداقل درآمدی است که برای زندگی یک نفر در یک ماه موردنیاز است. خط فقر برادر است با نصف میانگین با نصف میانه درآمد ماهیانه افراد جامعه.

کار در کلاس

در فعالیت قبل خط فقر را به دو روش ذکر شده محاسبه کرد. هیئت مدیره مؤسسه تجارتی تصمیم دارد مقدار بارانه را بر اساس نصف میانه محاسبه کند. به کدام یک از کارکنان چه میزان بارانه بدهند که خانواده او حداقل درآمدی بین از خط فقر داشته باشد؟ *

$$۳۸۷,۰ = \frac{۷۷,۵}{۲} = \text{نصف میانه}$$

$$۳۸۷,۰ = \frac{۱۲۲,۸۵۴}{۴} = \text{نصف میانه}$$

خط فقر بین المللی توسط بانک جهانی در سال جاری حدود چهار هزار تومان ($1/25$ دلار آمریکا) برای هر نفر در روز تعیین شده است.

۱. در فعالیت قبل جند خانوار درآمدی کمتر از چهار هزار تومان دارند.

۲. اگر درآمد یک خانواده سه نفری در یک ماه دو میلیون تومان باشد، طبق این تعریف این خانواده چه وضعیتی دارد؟

۳. متوسط درآمد ماهیانه یک خانواده سه نفره در ماه حداقل چقدر باشد تا شخص فقر نباشد؟

۴. در فعالیت قبل میزان بارانه را با خط فقر بین المللی برای هر یک از کارکنان محاسبه کنید.

۵. جه موضع دو روش محاسبه خط فقر تقاضت زیادی باهم دارند؟ جرا؟ **آخر** دوره امتحانه داشتم

شاخص یک معیار آماری است که تغییرات نسبی در جامعه آماری را نشان می‌دهد.

شاخص‌ها نه تنها مانند جداول فراوانی و نمودارها، متغیرهای داده‌ها را خلاصه می‌کنند؛ بلکه واقعیت‌های محدودی را از جامعه بمسادگی به ما نشان می‌دهند و امکان مقایسه را فراهم می‌کنند. مثلاً خط فقر شاخصی است که درآمد افرادی را که حداقل درآمد برای زندگی را ندارند، مشخص می‌کند. این شاخص به ما کمک می‌کند در طی زمان امکان بررسی تأثیر سیاست‌های دولت‌ها بر ای قفز زدایی را رصد کنیم.

جرایع احتساب این مدل، جرایع احتساب احظای سرتاسری جرایع احتساب اتوبوس، جرایع احتساب اخلاقی در سرتاسری

دانشورد خودرو که از میان آنها، انتقالات داخل خودرو برحی از مهم ترین شاخص‌های را به راننده نشان می‌دهد.

دستیابی آب، جرایع احتساب اتوبوس، جرایع احتساب اتوبوس، امیر نایاب مسافت طی شده، مسافت طی شده، سفر و عملکرد تظییف خودرو پیش زیبیه، دستگیر میزان سوت، دستگیر میزان سوت، جرایع احتساب اتوبوس، امیر نایاب مسافت طی شده، دستگیر میزان سوت، مسافت طی شده، در گیریکن اتوبوسی

۱- از این تعریف خط فقر (Poverty line) به دلیل سادگی آن استفاده کند است. دولت‌ها از تعریف بسیار دقیق‌تری استفاده می‌کنند. در آن کتاب متعارف از خط فقر همچنین تعریف است.

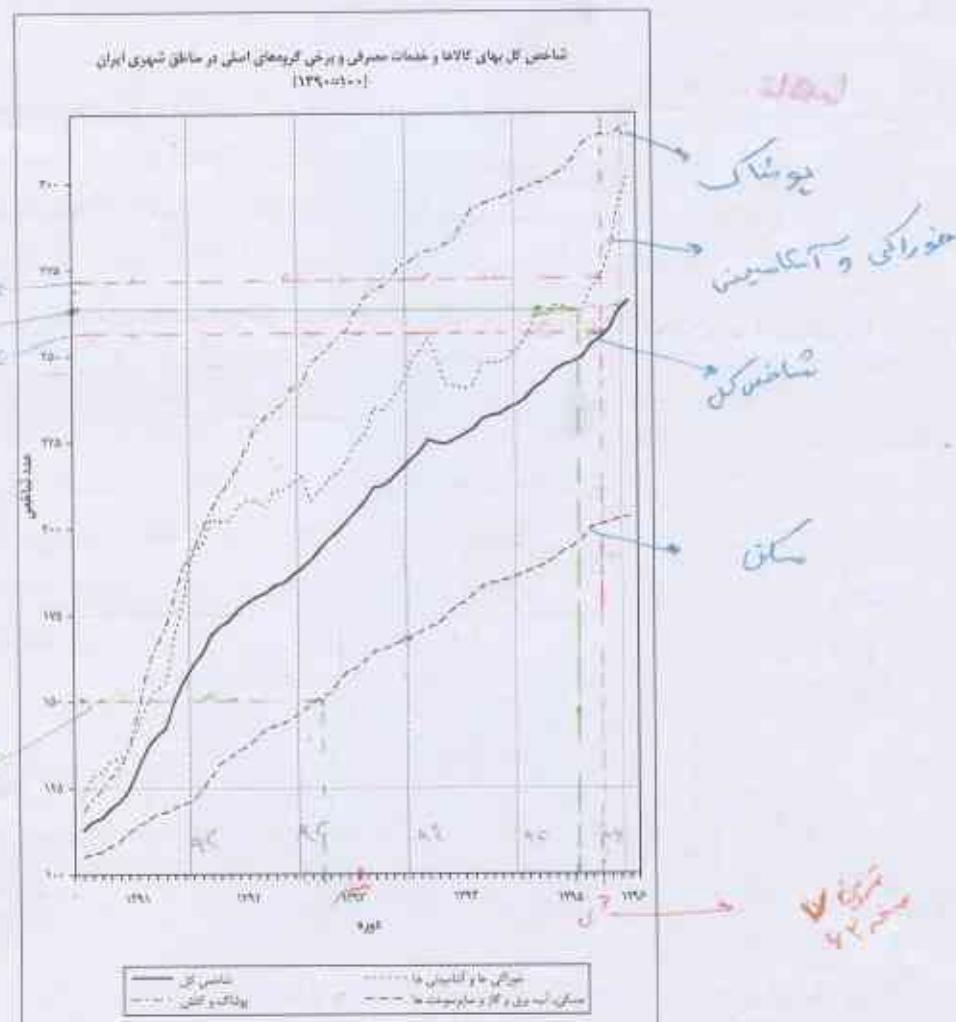
۲- معمولاً شاخص‌ها (Indices) بر اساس چند امداد محاسبه می‌شوند. عدد ماتجیل و پیشر اینهاست.

شاخص	
۱	$\frac{۱۰۰۰۰۰}{۳ \times ۳} = ۱۱۱۱,۱۱$
۲	$\frac{۴۰۰۰۰۰}{۴ \times ۳} = ۲۰۰۰۰$
۳	$\frac{۱۰۰۰۰۰}{۱ \times ۴} = ۳۰۰۰۰,۳۳$
۴	$\frac{۴۰۰۰۰۰}{۲ \times ۲} = ۲۹۹۹۹,۹۹$
۵	$\frac{۴۰۰۰۰۰}{۱ \times ۳} = ۱۳۳۳۳,۳۳$
۶	$\frac{۳۵۰۰۰۰}{۳ \times ۳} = ۱۴۲۸,۰۷۶$
۷	$\frac{۲۰۰۰۰۰}{۳ \times ۳} = ۲۲۲۲۲,۲۲$
۸	$\frac{۱۰۰۰۰۰}{۴ \times ۳} = ۸۳۳۳,۳۳$
۹	$\frac{۲۰۰۰۰۰}{۲ \times ۳} = ۳۳۳۳۳,۳۳$
۱۰	$\frac{۱۰۰۰۰۰}{۱ \times ۴} = ۱۰۰۰۰$

فعالیت

می خواهیم با برداخت بارانه ثابت به خانوارها تعداد کسانی را که درآمدی کمتر از خط فقر دارند، کاهش دهیم. اگر بودجه این کار ثابت باشد، به نظر نسما آن را بین همه خانوارها تقسیم کنیم با خانوارهایی که درآمدی کمتر از خط فقر داشته‌اند؛ پاسخ خود را برای خط فقر بین‌المللی تجزیه کنید.

فرض کنید هدف ما کنترل فقر با تناظر میان‌الملل آن باشد و تصمیم گرفته‌ایم که به خانوارهایی که درآمدی کمتر از خط فقر دارند، بارانه دهیم. آیا با این تصمیم به هدف خود رسیده‌ایم؟ برای پاسخ دقیق‌تر به این سؤال نیاز به معرفی شاخص دیگری داریم. در ادامه نمودار **برآکنش نگاشت شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی**^۱ ماضی شهری در طی ۵ سال متولی رسم شده است. این شاخص بر اساس متوسط هزینه ۳۰۰ نوع کالا، خوراکی و خدمات برای هر ماه محاسبه می‌شود. از جمله می‌توان به هزینه‌های مسکن، بوشاک، سلامت، غذا، حمل و نقل و تحصیل اشاره کرد. البته موارد ذکر شده دارای اهمیت بکسانی در محاسبه نیستند.



این شاخص نسبت به یک سال پایه محاسبه می‌شود که در نمودار عدد ذکر شده در صد تغییرات نسبت به سال پایه ۱۳۹۰ است.

۱. CPI: Consumer Price Index

شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی، متوسط مبلغ برداشت شده از میوی مصرف کنندگان برای مجموعه‌ای از تعداد زیادی کالا و خدمت در طول یک سال است. آن شاخص تحولات قیمت را بر مبنای یک سال باهش نشان می‌دهد.

مثال

به عنوان مثال اگر سبد هزینه خانواری در سال پایه از دو کالای نان و گوشت تشکیل شده باشد و قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰ ریال باشد و در سال مورد نظر به ۱۵۰۰ و ۷۰۰۰ ریال برسد و با فرض آنکه مقادیر مصرفی نان و گوشت در سال پایه به ترتیب معادل ۴۰۰ و ۸۰ کیلوگرم باشد، برای محاسبه شاخص بهصورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{شاخص بهای نان و گوشت} = \frac{140}{5} = \frac{1}{4} \times 5 \times 100 = \frac{5}{4} \times 100 = \frac{500}{4} = 125$$

کار در کلاس

۱. در نمودار شاخص بهای کالاها و خدمات محور طول هاست **نمودار**. و محور عرض هاست **محور عرض** است.

۲. شاخص بهای کالاها و خدمات به واحد اندازه‌گیری **نمودار** است.

۳. به نظر می‌رسد افزایش شاخص بهای کالاها و خدمات نشان‌دهنده **افزایش** هزینه اقلام خوراکی و **صیروفی** است.

۴. شاخص بهای کالاها و خدمات بر اساس تعداد **نما** متغیر محاسبه می‌شود.

۵. اهمیت شاخص بهای کالاها و خدمات چیست؟ **این شاخص تحولات قیمت را بر مبنای یک سال پایه نشان می‌دهد** حال به سوال قبل باز می‌گردیم. آیا برداخت پارانه ثابت طی سال‌های آئی (مثل ۴۵۰۰۰ تومان به ازای هر نفر) می‌تواند در همه

این مدت درآمد خانوار را بیشتر از خط فقر نگه دارد؟ **خیر**

خواهند

در اقتصاد، یک جزیان جرخشی بول و کالاها و خدمات و عوامل تولید وجود دارد. به عنوان مثال، وقتی آفای شکوهی به عنوان طراح در یک شرکت سازنده تزیینات داخلی مساختمان کار می‌کند، درآمدی به دست می‌آورد که می‌تواند آن را برای خرید کالاها و خدمات، خرچ کند. آفای شکوهی در طول سال، درآمدش را صرف خرید کالاها و خدمات گوناگونی می‌کند. او وقتی به قروشگاه می‌رود، ۱۰۰ هزار تومان با خود می‌برد و مجموعه‌ای از کالاهای مورد نیاز خانواده‌اش را می‌خرد. فرض کنیم خریدهایش اینها باشند: شیر، تخم مرغ، برنج، گوشت، چای و شکر. او همچنین بنزین برای خودرو سواری اش می‌خرد و هزینه احارة خانه و قبض آب و برق و گاز و تلفن را می‌پردازد. او در این سال، یک تلویزیون می‌خرد؛ به یک مسافت می‌رود، و یک عمل جراحی هم انجام می‌دهد.

هر یک از خانوارها و افراد جامعه در طول سال، هزینه‌هایی این‌جذب دارد. هزینه‌هایی همه خانوارها در هر سال، شاخص به نام «شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی یا شاخص قیمت مصرف گننده» را می‌سازد که برای کل اقتصاد محاسبه می‌شود. **این شاخص، سطح قیمت‌ها در یک سال را اندازه می‌گیرد.**

شاخص بهای کالاها و خدمات نشان می‌دهد که با بولمان قدر می‌توانیم خرید کنیم، یا با استفاده، «قدرت خرید» بولمان قدر است. هرچه قیمت‌ها افزایش یابند، «قدرت خرید» بولمان کاهش می‌یابد.

آفای شکوهی در سال بعد نیز به فروشگاه می‌رود و همان مبلغ ۱۰۰ هزار تومان را خرج می‌کند. او متوجه می‌شود که این بار نمی‌تواند همه کالاهای قبلی را با همان ۱۰۰ هزار تومان بخرد. علت این موضوع، افزایش قیمت کالاها و خدمات در طول زمان است. در واقع، «هزینه زندگی» او افزایش یافته است. او نه تنها وقni که به فروشگاه می‌رود، باید بول پستری بپردازد، بلکه برای پر کردن باک بینین خود را برای یک شب اقامت در شهری (بیکر) باید بول پستری بپردازد.

تعییر متوسط قیمت کالاها و خدمات در طول زمان را توزم می‌نامند.

توزم، یکی از مهم‌ترین مفاهیم اقتصادی است که شما به آسانی می‌توانید درک کنید. توزم بر زندگی نکننک ما اثرگذار است. اقتصاددانان و امدادانان با کمک بدیگر، میزان توزم با تغییرات سطح قیمت‌ها را با استفاده از «شاخص بهای کالاها و خدمات» محاسبه می‌کنند. برای این کار، شاخص بهای کالاها و خدمات یک سال را با سال‌های قبل مقایسه می‌کنند. به نظر شما رابطه بین توزم و شاخص بهای کالاها و خدمات چیست؟

از تقسیم تفاصل شاخص در سال مورد نظر و شاخص در سال پایه بر عدد ۱۰۰، افزایش قیمت‌ها به درصد در فاصله بین سال پایه و سال مورد نظر به دست می‌آید.

$$\text{توزم} = \frac{\text{(شاخص بهای گوشت و نان در سال پایه)} - \text{(شاخص بهای گوشت و نان در سال مورد نظر)}}{100} \times 100\% = \frac{40.5 - 100}{100} = -59.5\%$$

کار در کلاس

از مدرسه به خانه برمی‌گشتم و داشتم از کنار دکه روزنامه‌فروشی رد می‌شدم که جمله درست یکی از روزنامه‌ها نظرم را جلب کرد: «در صورتی که رشد اقتصاد سالانه یک درصد باشد، در سال ۱۴۰۰ نیخ (شاخص) بیکاری تحصیل کردگان آموزش عالی به ۴۸ درصد خواهد رسید».

با خودم گفتم پس در زمانی که ما قرار است شاغل شویم، احتمال یافتن شغل پنجاه‌پنجاه است. تا به حال به این مستله توجه نکرده‌بودم و فکر می‌کدم اگر درین بخوانم، شغل خوبی خواهم داشت و می‌بنداشتم درس خواندن سخت است اما نسبت به کار بیدا کردن خیلی راحت‌تر است.

این جمله را با معلم درس آمار در میان گذاشتیم. او گفت: «نیخ بیکاری عبارت است از نسبت جمعیت بیکار به جمعیت فعال». این نیخ با رشد اقتصادی پنج درصد نیز محاسبه شده و اگر رشد اقتصادی ۵ درصد برای کشور به دست آید، نیخ بیکاری تحصیل کردگان به ۳۶ درصد می‌رسد. سپس او با یک توضیح و چند سوال، نظرم را درباره همه ماجرا عرض کرد. بیکار به فردی بالای ۱۶ سال می‌گویند که به طور موقت بیکار شده با در جست‌وجوی شغل باند، یا منتظر شروع یک کار جدید از تاریخ منحصری باشد. این تعریف برای تمام کشورها یکسان است.

ایا به نظر شما شاخص بیکاری برای چهار زیرگروه رشته‌های تحصیلی یکسان است؟ در هر رشته جطور؟



تمرین

اعضا

ب) اعضای خانوارها قبل حل نی باشند

لیست مفہوم

برنامه های

۱. اگر میانگین درآمد خانوارهای کشور ۳۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال باشد، حداقل حقوق دریافتی کارکنان شرکت الف اینقدر باشد تا هیچ کارمندی در این شرکت زیر خط فقر نباشد؟ چه زمانی از میانه درآمد خانوارها برای محاسبه خط فقر استفاده می‌کنیم؟

۲. خانواده‌ای تنفس نفره در بکی از کشورهای در حال توسعه زندگی می‌کند. با توجه به تعریف خط فقر بین‌المللی درآمد ماهانه این خانواده باید چند دلار باشد تا زیر خط فقر نباشد؟ حداقل سالار ۴۲۵ دلار است.

$$3. \text{در یک منطقه } ۱۲۰۰ \text{ نفر از افراد ۱۶ \text{ ساله} \text{ و بیشتر شاغل} \text{ اند. در این منطقه } ۲۰۰ \text{ نفر } ۱۶ \text{ ساله} \text{ و بیشتر جویای} \text{ کار} \text{ می‌باشند.}$$

الف) نرخ بیکاری در این منطقه چقدر است $\frac{۱۶}{۱۲۰۰} = ۱\% = ۱/۱۶$ درصد

ب) حداقل چند شغل در این منطقه باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری منطقه پایین ۵ درصد باشد؟

$$4. \text{خانواده آقای صالحی در فروردین ماه سال } ۱۳۹۰ \text{، با صد هزار تومان هزینه ماهانه مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت‌های داشته است. در همان تاریخ هزینه ماهانه خوراکی‌ها و آسامیدنی‌های این خانواده دوست و بتجاه هزار تومان بوده است. اگر تعداد افراد این خانواده تغییری نکرده باشد، بر مبنای تعداد شاخص‌بهای کالا و خدمات مصرفي موارد زیر را به طور تقریبی محاسبه کنید. فرمول درسوار:}$$

الف) هزینه ماهانه مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت‌های این خانواده در خرداد ماه $۱۳۹۳ = ۱۲۹۵$ هزار تومان

۵. ناتوب یا شاخص نوءه بدنی که در سال گذشته آن را در کتاب ریاضی و آمار خود دیده، یکی دیگر از شاخص‌های مهم

آماری است که به شاخص سلامت معروف است. برای محاسبه آن باید وزن فرد را به کیلوگرم بر توان دوم قدرن بر حسب متر تقسیم کرد.

$$\frac{\text{وزن}}{\text{متر}^2} = \text{ناتوب}$$

جدول زیر اطلاعات خانواده صالحی را نشان می‌دهد.

نامهای	قد (سانتی‌متر)	وزن (کیلوگرم)	سن (سال)	افراد خانواده	ناتوب
$\frac{۱۷۷}{۱۷۷} \approx ۱۷۷$	۶۲	۱۷	صالح	$\frac{۱۷۷}{۱۷۷} = ۱$	۱
$\frac{۸۵}{۸۵} \approx ۸۵$	۸۵	۲۲	برادر	$\frac{۸۵}{۸۵} = ۱$	۱
$\frac{۵۳}{۵۳} \approx ۵۳$	۵۳	۲۵	خواهر	$\frac{۵۳}{۵۳} = ۱$	۱
$\frac{۶۰}{۶۰} \approx ۶۰$	۶۰	۵۰	مادر	$\frac{۶۰}{۶۰} = ۱$	۱
$\frac{۸۱}{۸۱} \approx ۸۱$	۸۱	۵۵	پدر	$\frac{۸۱}{۸۱} = ۱$	۱

اکنون با توجه به جدول بالا مشخص کنید کدام یک از افراد این خانواده وزن مطلوبی دارند؟ تحاکم بر وزن مطلوب \rightarrow

۶. در موقع خرید کتاب‌های داستان معمولاً به سطح کتاب برای رده سنی مشخص شده، توجه می‌کنیم. به نظر شما جگونه این کار

را انجام می‌دهند؟ آیا نظر افراد با تجربه برای تعیین سطح یک مت بنده مخصوص همیشه یکسان است؟ ارزیابی آنها کیفی است یا کمی؟

$$\rightarrow \text{هزار تین} = \frac{۱۰۰ \times ۱۵۰}{۱۰۰} = ۷۵ \text{ راه} \quad (۳)$$

$$\text{هزار تین} = \frac{۲۵ \times ۴۴۲}{۱۰۰} = ۶۰۵ \quad (۴)$$

$$\text{محاسبه} \dots \dots \dots = \frac{۳۵,۰۰۰}{۵} = \text{درآمد} \quad (۱)$$

$$\text{محاسبه} \dots \dots \dots = \frac{۳,۵ - ۳,۵}{۳,۵} = \text{خط فقر} \quad (۲)$$

* با فرض اینه تمام ۳۵ درآمد ساهمیت
تک خانواده که نزدیک سال را حاصل
نمایم

بلوار این طبق جدول متعه عده خانواده مرکزی ۱۰/۸ بر حسب فقر هستند
زمانی از سیانه در آمد خانواده استفاده نمایم که دارد در راستا لشته باشیم

خواهانی من میزان سهولت در ک من از طریق انتخاب واژه‌های مناسب و رعایت دستور نگارش است.

یکی از شاخص‌های خواهانی که سال‌های تحصیل خواسته‌منون انگلیسی را تخمین می‌زند، به صورت زیر تعریف شده است.
شاخص پایه آموزش = $\frac{1}{4} \times [\text{میانگین تعداد کلمات در هر جمله} + \text{درصد کلمات «دستوار»}]$
که منظور از کلمات «دستوار» کلمات دو همای دون در نظر گرفتن اسامی و کلمات ترکیبی آسان است. این شاخص عددی بین ۱ تا ۱۲ است که نشان‌دهنده پایه تحصیلی است.

(الف) برای کتابی با متوسط طول جملات ۸ کلمه‌ای و ۲۰ درصد کلمه سخت، شاخص پایه آموزش را محاسبه کنید. این کتاب مناسب دانش‌آموزان چه پایه‌ای است؟

پاسخ: این کتاب مناسب دانش‌آموزانی است که پایه $\frac{8}{20} \times 12 = 4.8$ را به بیان رسانده‌اند.

(ب) مزایا و محدودیت‌های این شاخص چیست؟

پاسخ: استفاده از این شاخص ساده است. با این حال، فرض می‌کند که کلمات بزرگ‌تر و جملات طولانی تر باعث سختی شدن من می‌شوند، اما یک تویسته چیزهای دست می‌تواند با کلمات و جملات دیگری باعث آسانی شدن شود.

(ج) همان‌گونه که متوجه شده‌اید، این شاخص بر اساس دو امار از دو متغیر تعریف شده است. آنها را نام بینید.

۷. هزینه‌های زندگی خانواده آقای صالحی در سال ۱۳۹۰ در جدول زیر آمده است. با توجه به نمودار شاخص بهای کالاهای خدمات مصرفی جدول زیر را کامل کنید. (حلق جدول صفحه ۵۸)

	۱۳۹۰	۱۲۹۳	۱۲۹۶	۱۳۹۶
هزینه خوراکی‌ها و آشامیدنی‌ها (بر حسب هزار نومان)	۲۱۰	$\frac{۲۱۰ \times ۲۲۵}{۱۰۰} = ۴۷۲.۵$	$\frac{۴۱۰ \times ۲۷۸}{۱۰۰} = ۸۷۷.۲$	۸۷۷.۲
هزینه کل (بر حسب هزار نومان)	۸۵۰	$\frac{۸۵۰ \times ۲۰۲}{۱۰۰} = ۱۷۱۷$	$\frac{۸۵۰ \times ۲۵۰}{۱۰۰} = ۲۱۲۵$	۲۱۲۵

۸. شاخص بوسیدگی دندان (DMFT) در ایران برای سال ۱۳۶۰ برابر ۳ بوده است؛ یعنی هر ایرانی به طور متوسط دارای یک دندان کشیده شده، یک دندان بوسیده و یک دندان بُر شده است. این شاخص در سال ۱۳۹۵ برابر ۶ شده است. این شاخص را در سال ۱۳۹۵ تفسیر کنید. شاخص در سال ۱۳۹۵ چند درصد افزایش داشته است؟ این شاخص در سال ۱۳۶۰ نسبت به سال ۱۳۹۵ چند درصد کاهش داشته است؟

شاخص ۶ مکان $\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}$ دندان کشیده شده، $\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}$ دندان بوسیده شده و $\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}$ دندان بُر شده.

ازین شاخص در سال ۱۳۹۵ ۱۳٪ نسبت به سال ۱۳۶۰ روبرابر شده است.

ازین شاخص در سال ۱۳٪ نسبت به سال ۱۳۹۵ ۵٪ کاهش یافته است.

درس ۲

سری‌های زمانی

$$\bar{x} = \frac{10+20+30+35+10+10}{4} = \frac{140}{4} \approx 35$$

$$S = \frac{(10-35)^2 + (20-35)^2 + (30-35)^2 + (35-35)^2 + (10-35)^2 + (10-35)^2}{4}$$

$$= \frac{134,89 + 84,89 + 32,89 + 0 + 134,89 + 134,89}{4} = \frac{283134}{4} \approx 707,83 \quad b = \sqrt{67,83} \approx 8,23$$

به نظر شما دستیابی به کدام یک از اطلاعات زیر جالب‌تر است؟

دماهی هوای شهر محل زندگی ما در هفته آینده.

میزان آلاینده‌های شهر محل زندگی ما در ماه آینده.

نرخ بیکاری در زمان اخذ دیبلم.

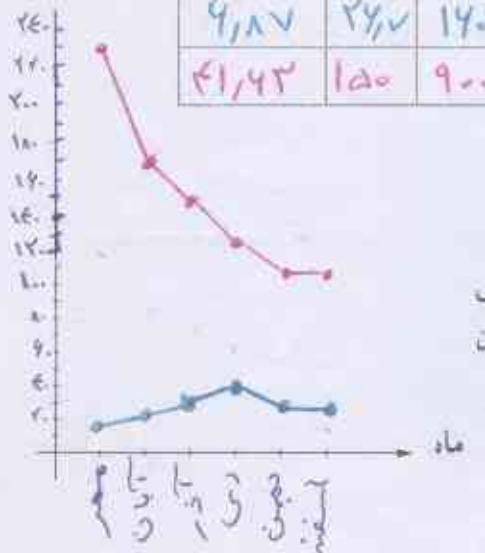
آیا به نظر شما مجموعه‌ای از داده‌های آماری که در فواصل زمانی مساوی و منظم جمع‌آوری شده باشند، می‌توانند پیش‌بینی

خوبی برای تضمیم‌گیری ما باشند؟ **بله**

فعالیت

میزان بارندگی در شش ماه دوم سال دو شهر A و B بر حسب میلی‌متر در جدول زیر آمده است

	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند	مجموع	میانگین	انحراف معیار
شهر A	15	20	20	35	20	20	140	35	10,87
شهر B	22	17	15	12	11	11	90	22,5	41,43



جدول را کامل کنید.

میانگین و انحراف معیار بارندگی در شهرها را مقایسه کنید.

نمودار پراکنش نگاشت هر دو شهر را بر حسب ماههای سال با یک مقیاس

بر روی یک محور رسم کنید. نقاط را به هم وصل کنید. برای مشخص ندن

هر شهر از یک رنگ متفاوت استفاده کنید.

کدام شهر میزان بارندگی بیشتری در پاییز نسبت به زمستان دارد؟

تمرین

$$\bar{x} = \frac{230+170+150+120+110+110}{6} = \frac{900}{6} = 150$$

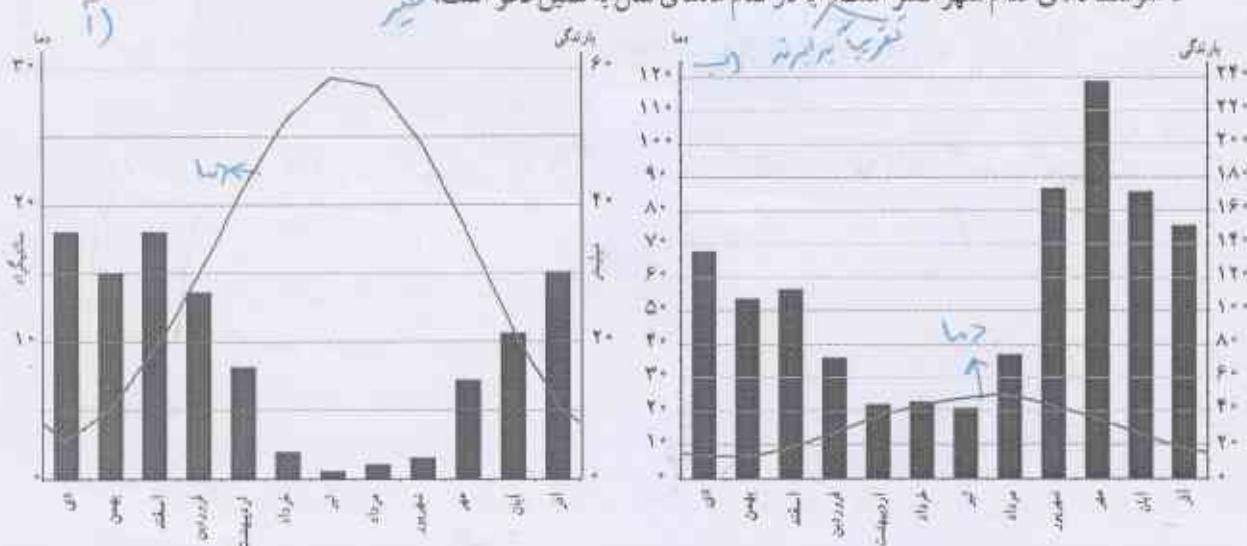
$$S = \frac{(230-150)^2 + (170-150)^2 + (150-150)^2 + (120-150)^2 + (110-150)^2 + (110-150)^2}{6} = \frac{4400}{6} = 733,33$$

$$= \frac{10400}{4} \approx 1733,33$$

$$b = \sqrt{1733,33} \approx 41,43$$

حال نمودار برآکنش نگاشت دما و نمودار میله‌ای بارندگی همان دو شهر را با مقیاس‌های متفاوت برای یک سال بهبوده در یک محور رسم کردند.

- درجه فصلی از سال بارندگی پیشتر است؟ میلیون شتر آر زمستان برار سحر سایز
- متوسط دمای کدام شهر کمتر است؟ آبا در تمام ماه‌های سال به همین نحو است؟ خیر



سری زمانی: مجموعه داده‌هایی که در طی زمان با فواصل منظم گردآوری می‌شوند.
نمودار سری زمانی: برآکنش نگاشت سری زمانی که داده‌ها را با باره خط‌های در طول زمان به هم متصل می‌کند.

کار در کلاس

نحوه: اشکال برچسب مخوب‌ها معلوم می‌شوند

سری زمانی زیر نشان دهنده ۶ روز درجه حرارت بدن یک بیمار مبتلا به بیماری میکروبی است. او بستری شده و در مانش با آنتی‌بیوتیک آغاز شده است.

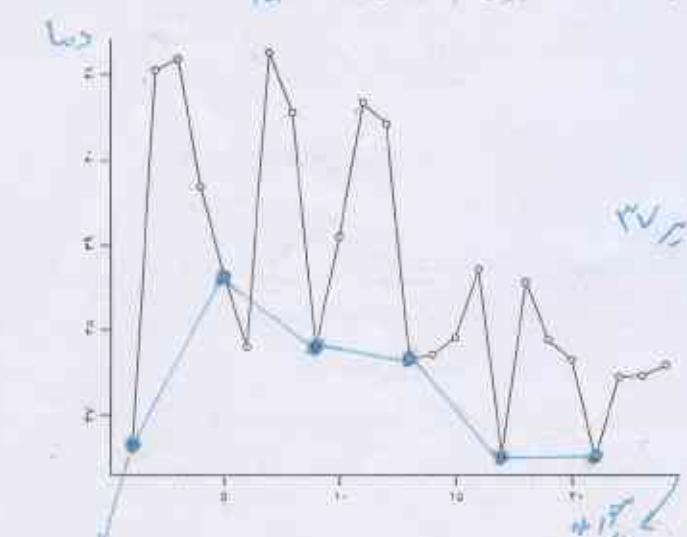
- هر روز چند درجه حرارت خوانده شده بیت شده است.

درجه حرارت بیمار در لحظه بستری شدن چند درجه است؟ ۳۷

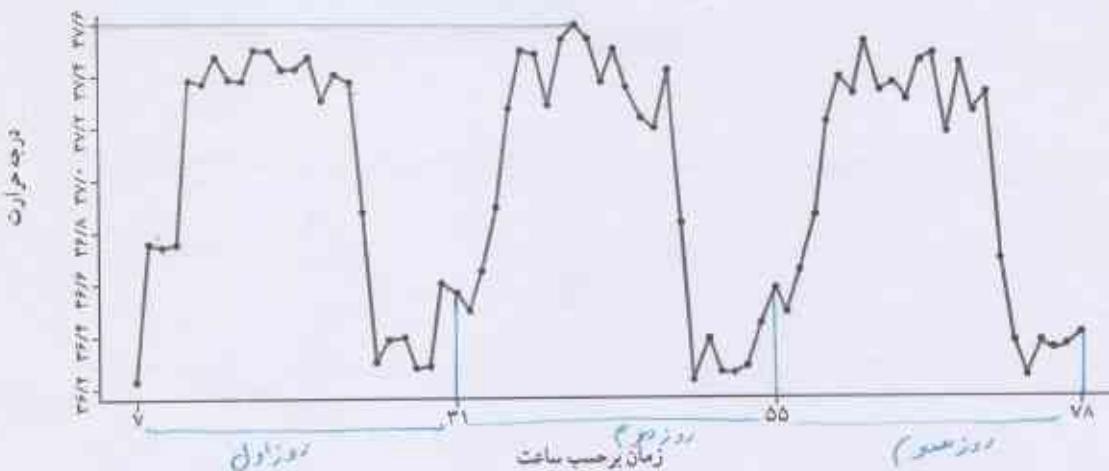
- پس از چند روز درجه حرارت بیمار به حالت طبیعی بازگشته است؟ روز ششم، ساعت صفر شده است.

اگر اولین زمان بیت درجه حرارت ساعت ۷ صبح باشد، نمودار را فقط برای ساعات ۷ صبح رسم کنید. کدام نمودار ساده‌تر به نظر می‌رسد؟ کدام یک جزئیات پیشتری را نشان می‌دهد؟

نمودار که
نمودار که



درجه حرارت بدن یک انسان سالم هر ساعت طی ۲ روز از ۷ صبح اندازه‌گیری شده است.



• شترین دمای بدن چقدر است؟ **قریباً ۳۷,۲ کم - زیاد کم**

• دمای بدن در طول روز اول چه تغییراتی کرده است؟ تغییرات دمای بدن در روز اول را توصیف کنید.

• آیا این تغییرات در روزهای بعد نیز تکرار شده است؟ **بله**

• این منحنی چه ویژگی دارد؟ (خطی، صعودی یا تابوی) **تندیس**

خواندنی

معادله منحنی دمای بدن انسان سالم در طی روز تقریباً برابر است با

$$y = 37 + 0.18 \sin^2((\pi/12)x - (\pi/2)) + 0.06$$

که مقدار $x = x$ دمای بدن در ساعت ۱۲ ظهر است.

بیت سلیمانی خواندن

نکرار یک ورزشی را در سری دما الگو می‌نامند. بازناسی الگو به ما کمک می‌کند که جسم معادله‌هایی را برای پذیرنده‌های طبیعی بیاییم.

فریه لئنه:

۶۰

گروه رانس دوره دوم منوشه و اینжен معلمان رانس، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

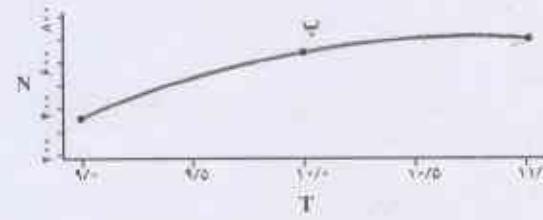
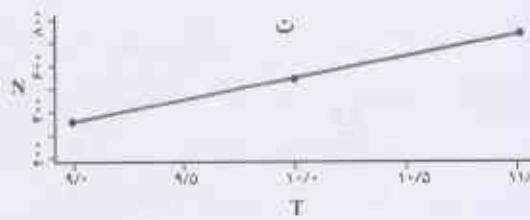
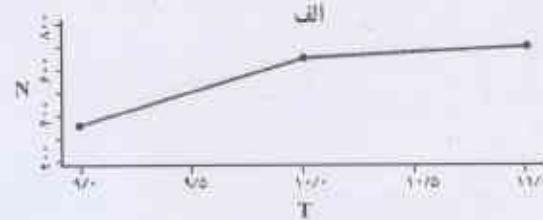
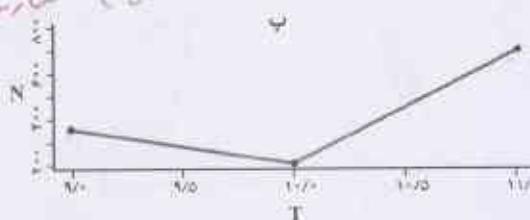
فعالیت

در یک مرکز خرید تعداد مشتری‌ها بین ساعت ۹ تا ۲۱ به صورت زیر ثبت شده است.

ساعت (T)	تعداد مشتری (N)
۹	۳۵۰
۱۱	۷۵۰
۱۳	۸۰۰
۱۵	۶۵۰
۱۷	۳۰۰
۱۹	۵۰۰
۲۱	۲۵۰

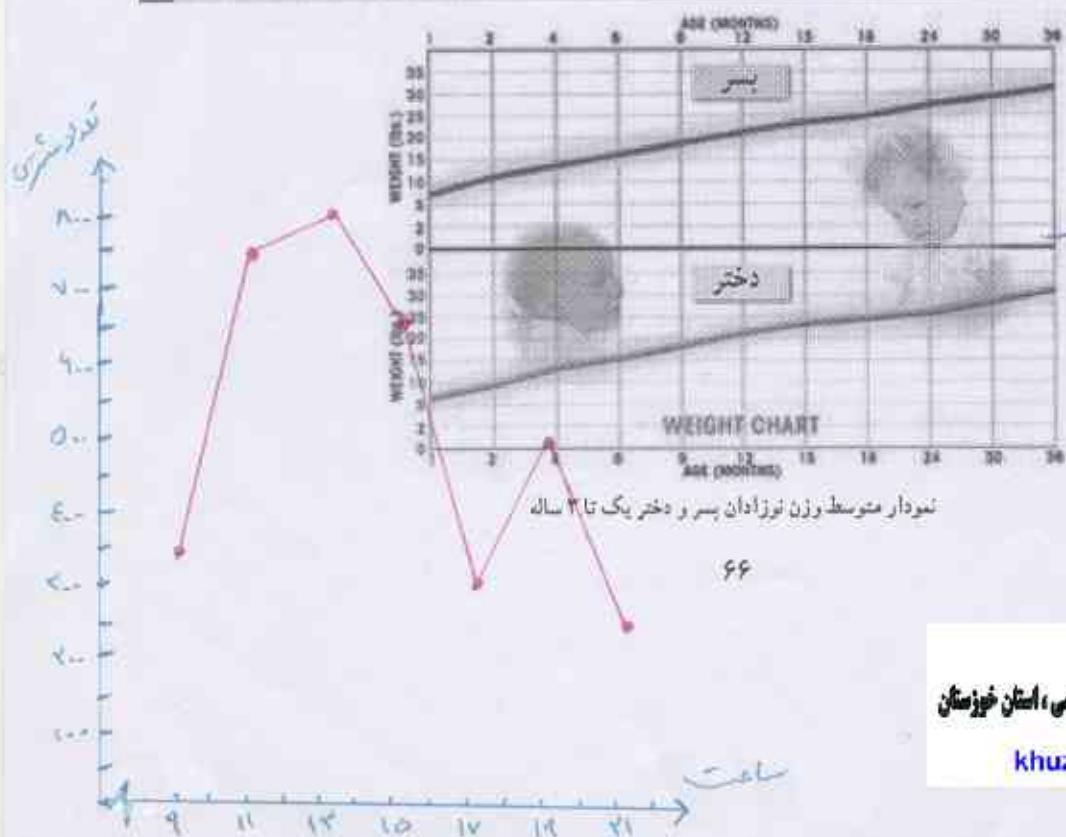
نمودار سری زمانی را رسم کنید.

می‌خواهیم تعداد مشتری‌های ساعت ۱۰ را حدس بزنیم. به ظرف شناس کامپیک از نمودارهای زیر واقعی تر است؟



اگر فرض کنیم تعداد مشتری‌ها در فاصله زمانی ۹ تا ۱۱ به صورت یکنواخت تغییر گردد است، به سوال قبل پاسخ دهدید.

دروندیابی تخمین داده‌های بین داده‌های ثابت شده است.



نوبه گشته:

گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه و ابجمن هنرستان ریاضی، استان خوزستان

$$f(9) : 200(9) + h = 350 \Rightarrow h = 350 - 1800 \Rightarrow h = -1450 \Rightarrow f(n) = 200n - 1450$$

کار در کلاس

می خواهیم تعداد مشتری های ساعت ۱۰ در فعالیت قبل را درون یابی کیم. فرض می کنیم تعداد مشتری ها در فاصله زمانی ۱ نا ۱۱ به صورت یک واخت تغییر گرده است.

- معادله خط بین دو ساعت ۹:۳۵ و ۱۰:۷۵ را بدست آورید.

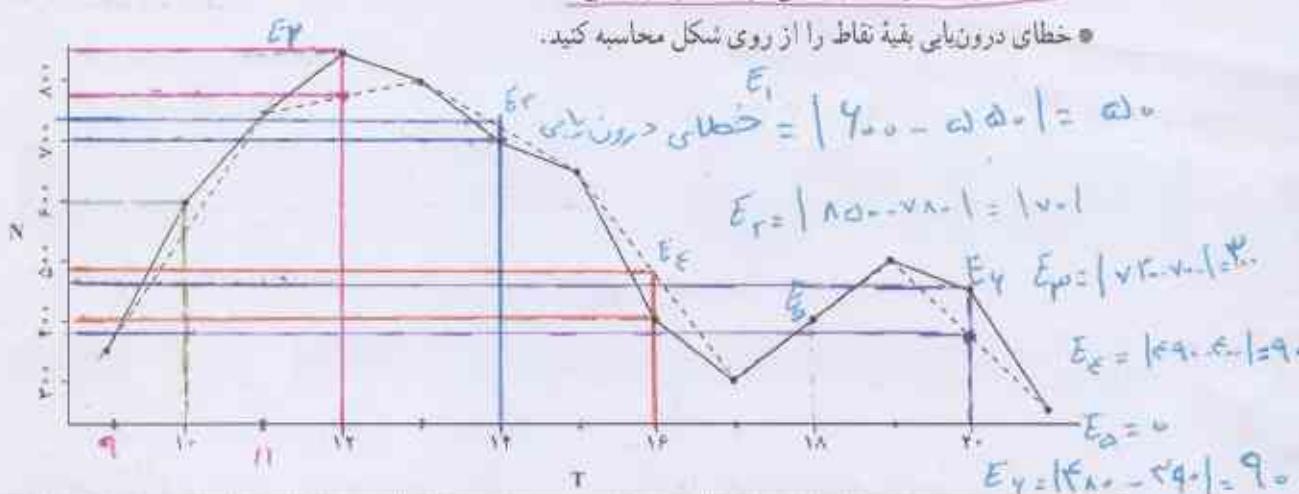
$$\text{خط را رسم کنید. } y = 200 - 1450 = 200 - 1450 = 50$$

- مقدار این خط در ساعت ۱۰ چقدر است؟

- این مقدار به درون یابی کدامیک از شکل های فعالیت قبل تزدیک تر است؟

اگر مقادیر داده های واقعی را به صورت ساعتی جمع آوری کرده باشیم که در شکل زیر با خط تور نشان داده شده است، خطای درون یابی ساعت ۱۰ چقدر است؟ N نشان دهنده تعداد مشتری ها و T نشان دهنده زمان است. (خطای برای هر نقطه برابر است با قدر مطلق تفاضل مقدار واقعی هر نقطه از درون یابی آن).

- خطای درون یابی بقیه نقاط را از روی شکل محاسبه کنید.



درون یابی که به وسیله یک یاره خط انجام شود، درون یابی خطی است.



نحوه انتقال:

کروه رفاقتی فولادی ذوب فولاد و الیمن هلمان رفاقتی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

نمودار شاخص قیمت واقعی و اسی بورس

تهران در ماه های گذشته. رفتار این شاخص در

ایندی جگونه خواهد بود؟

آنکه نمودار را اینچه نمایم

$$m = \frac{19 - 12}{2 - 1} = \frac{7}{1} = 7$$

$$f(x) : 3x + b = 12 \Rightarrow b = 12 - 3x$$

$$f(x) = 3x + 5$$

فعالیت

میزان فروش یک شرکت در ۵ سال متوالی بر حسب میلیارد ریال به صورت زیر است

سال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
فروش	۹	۱۰	۱۱	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷

• سری زمانی را رسم کنید.

• فروش در سال هفتم را حدس بزنید.

• میانگین سال و فروش را محاسبه کنید و روی نمودار نمایش دهید.

• یک خط از نقطه میانگین‌ها به نقطه $(5, 19)$ وصل کنید.

• معادله خط را به دست آورید.

• اگر به جای x در معادله، مقدار ۶ قرار دهید، عدد به دست آمده چقدر است؟ آیا می‌توان این مقدار را به عنوان تخمین فروش در سال آینده تصور کرد؟ بله

برون‌بایی تخمین داده‌های بعد با قابل اعتماد ترین داده‌های ثبت شده است.

در فعالیت قبل مقدار عدد به دست آمده در سال ششم برون‌بایی مقدار فروش است.

تمرین

۱- کدام یک از داده‌های زیر سری زمانی است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

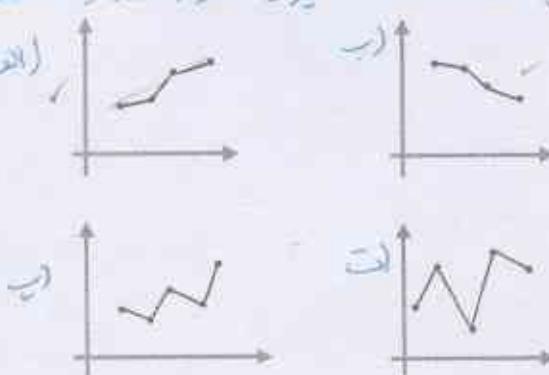
الف) تعداد مسافران فرودگاه بوشهر در هر ماه در ۱۰ سال گذشته. متوالی تر مانند صفت دارد.

ب) تعداد مشتریان یک تاجر بر حسب مدت زمانی که صرف بازاریابی می‌کند.

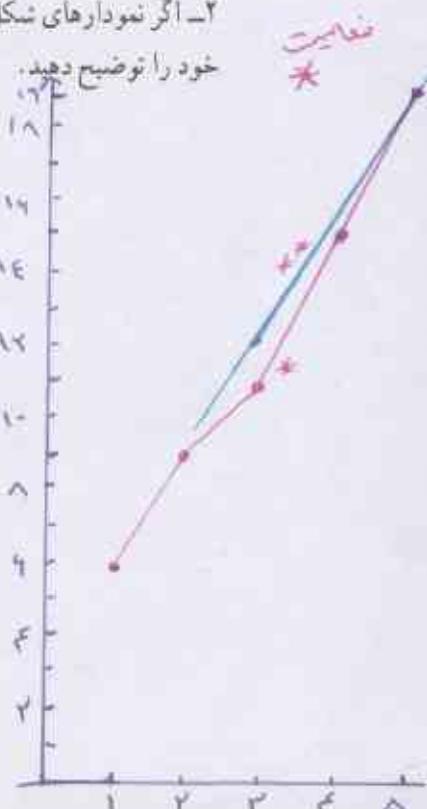
ج) تعداد ساعاتی که در معرض نور مستقیم خورشید قرار داریم: شدت آفتاب سوختگی.

۲- اگر نمودارهای شکل زیر یک سری زمانی باشند، در کدام حالت درون‌بایی و برون‌بایی خطی بهتر است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

شکل‌های انتداب - چون متغیر را که خود تغییر می‌کند و تغییرات کالجاتی خارج می‌نماید.



امکان: سعیر است شکل‌ها اسم تجزیی شود



جواب تمرینات صفحه ۶۹ در صفحات بعدی است

۳- یک دکه دار تعداد بطری های آب فروخته شده، از شروع فصل گرما را یک روز در میان مطابق با جدول زیر ثبت کرده است:

شنبه	پنجشنبه	سه شنبه	یکشنبه	جمعه	چهارشنبه	دوشنبه	شنبه	روز
۲۳	۲۱	۲۲	۱۸	۲۵	۱۶	۱۳	۸	تعداد بطری ها

الف) سری زمانی داده ها رارسم کنید.

ب) تعداد بطری های فروخته شده روزهای فرد را درون یابی کنید.

ج) تعداد بطری های فروخته شده دوشنبه از هفته دوم را برونو یابی کنید.

۴- تعداد گل های زده شده در لیگ برتر فوتبال جام خلیج فارس در هفته های زوج و پایانی در جدول زیر آمده است.

۲۸	۲۶	۲۴	۲۲	۲۰	هفت
۲۵	۲۵	۲۲	۲۷	۳۰	تعداد گل ها

سری زمانی مربوط به آن را رسم کنید. تعداد گل های هفته ۱۳۰ ام را برونو یابی کنید.

۵- میانگین افزایش خدمات یک تعمیرگاه نسبت به سال اول (سال پایه) بر حسب درصد در جدول زیر آمده است.

۶	۵	۴	۳	۲	۱	سال
۶۷	۵۸	۴۸	۳۸/۵	۲۹	۱۹/۵	درآمد

الف) سری زمانی داده ها را رسم کنید.

ب) درصد افزایش خدمات سال هفتم این تعمیرگاه را نسبت به سال پایه برونو یابی کنید.

۶- تعداد زلزله های بالای ۷ ریشتر در جهان مطابق جدول زیر برای ده سال ثبت شده است.

دهم	نهم	هشتم	هفتم	ششم	پنجم	چهارم	سوم	دوم	اول	سال
۲۱	۱۶	۲۵	۲۱	۱۶	۲۰	۲۳	۲۹	۲۸	۳۰	تعداد زلزله های بالای ۷ ریشتر

الف) سری زمانی آن را رسم کنید.

ب) میانگین سال و تعداد زلزله ها را به دست آورید.

ج) معادله خطی را که نقطه ۲۱ و ۱۰ را به میانگین سال و تعداد زلزله ها وصل می کند، به دست آورید.

د) با استفاده از خطی که معادله آن را به دست آورده اید، تعداد زلزله های بالای ۷ ریشتر را در سال یازدهم در جهان برونو یابی کنید.

ه) اگر بدانیم در سال یازدهم دقیقاً ۲۵ زلزله آمده است، خطای برونو یابی چقدر است؟

۷- نرخ تورم در ایران بین سال های ۱۳۱۶ تا ۱۳۹۵ در جدول زیر داده شده است.

نوبه تئنه:

(ب)

$$m = \frac{r_0 - r}{T - t} = \frac{14}{9}$$

$$\frac{14}{9}(0) + h = r \Rightarrow$$

$$h = r - \frac{14}{9} \Rightarrow h = \frac{r_0 - r}{9} \Rightarrow h = \frac{14}{9}$$

$$f(x) = \frac{14}{9}x + \frac{14}{9}$$

$$f(r) = \frac{14}{9}(r) + \frac{14}{9} = \frac{14r + 14}{9} = \frac{140}{9}$$

$$f(r') = \frac{14}{9}(r') + \frac{14}{9} = \frac{14r' + 14}{9} = \frac{149}{9}$$

$$f(r'') = \frac{14}{9}(r'') + \frac{14}{9} = \frac{14r'' + 14}{9} = \frac{149}{9} = 16.5$$

$$\bar{x} = \frac{1 + 14 + 16 + 17}{4} = \frac{48}{4} = 12$$

$$\bar{y} = \frac{10 + 14 + 16 + 17}{4} = \frac{57}{4} = 14.25$$

$$m = \frac{r_0 - r_{\bar{x}}}{T - t} = \frac{14 - 12}{9} = \frac{2}{9} = \frac{19}{9}$$

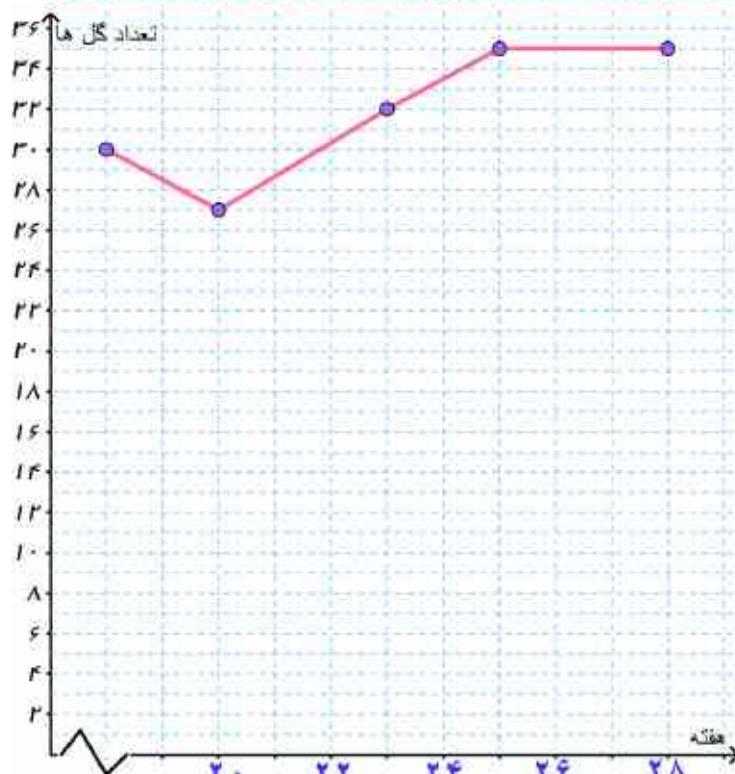
$$\frac{19}{9}(r) + h = r_0 \Rightarrow h = r_0 - \frac{19r}{9} \Rightarrow h = \frac{140 - 19r}{9} \Rightarrow h = \frac{14}{9}$$

$$f(x) = \frac{19}{9}x + \frac{14}{9} \Rightarrow f(1) = \frac{19}{9}(1) + \frac{14}{9} = \frac{19 + 14}{9} = \frac{33}{9} = 3.67$$

تعداد بطری های دو شنبه هفته دوم



(ج)



تمرین ۴

$$\bar{x} = \frac{20 + 21 + 22 + 23 + 24}{5} = \frac{110}{5} = 22$$

$$\bar{y} = \frac{20 + 21 + 22 + 23 + 24}{5} = \frac{110}{5} = 22$$

$$m = \frac{24 - 20}{5} = \frac{4}{5} = \frac{2}{2.5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5}(r_0) + h = r_0 \Rightarrow$$

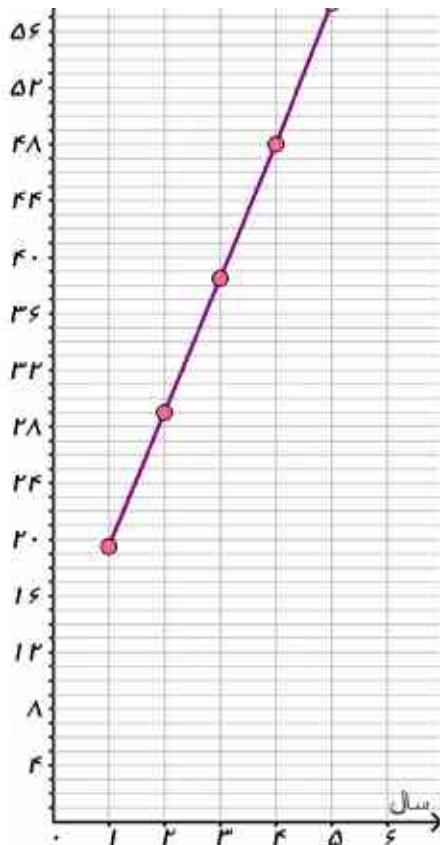
$$h = \frac{-10 + 24}{5} = \frac{14}{5} = 2.8$$

$$f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{14}{5}$$

$$f(25) = \frac{2}{5}(25) + \frac{14}{5} = \frac{50 + 14}{5} = \frac{64}{5} = 12.8$$

I

تمرين 5



تمرين 6

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6}$$

$$\bar{y} = \frac{10.0 + 12.9 + 14.1.0 + 16.1 + 18.1 + 20.1}{6} = \frac{99.9}{6}$$

$$m = \frac{99.9 - \frac{21}{6}}{\frac{10.0 - \frac{21}{6}}{6}} = \frac{\frac{99.9 - 21}{6}}{\frac{10.0 - 21}{6}} = \frac{18.9}{10}$$

$$\frac{18.9}{10}(x) + h = 9.9 \Rightarrow$$

$$h = -\frac{10.0x}{10} + 10.0 \Rightarrow h = \frac{-10.0x + 10.0}{10} \Rightarrow h = \frac{10.0}{10}$$

$$f(x) = \frac{18.9}{10}x + \frac{10.0}{10}$$

$$f(10) = \frac{18.9}{10}(10) + \frac{10.0}{10} = \frac{99.9 + 10.0}{10} = \frac{109.9}{10} \approx 10.99$$

تمرين 7

(ب)

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10} = \frac{55}{10} = 5.5$$

$$\bar{y} = \frac{10.0 + 12.9 + 14.1.0 + 16.1 + 18.1 + 20.1 + 22.9 + 25.0 + 28.1}{10} = \frac{224}{10} = 22.4$$

$$m = \frac{21 - 22.4}{10 - 5.5} = \frac{-1.4}{4.5} = -\frac{14}{45}$$

$$-\frac{14}{45}(10) + h = 21 \Rightarrow h = 21 + \frac{14}{45} \Rightarrow h = \frac{945 + 14}{45} \Rightarrow h = \frac{969}{45}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{14}{45}x + \frac{969}{45}$$

$$f(10) = -\frac{14}{45}(10) + \frac{969}{45} = \frac{-140 + 969}{45} = \frac{829}{45} \approx 18.42$$

$$\text{خطای برون یابی } E = |21.00 - 18.42| = 2.58$$

(ج)



II

جواب نمرین صفحه ۷۰ در صفحات بعدی است

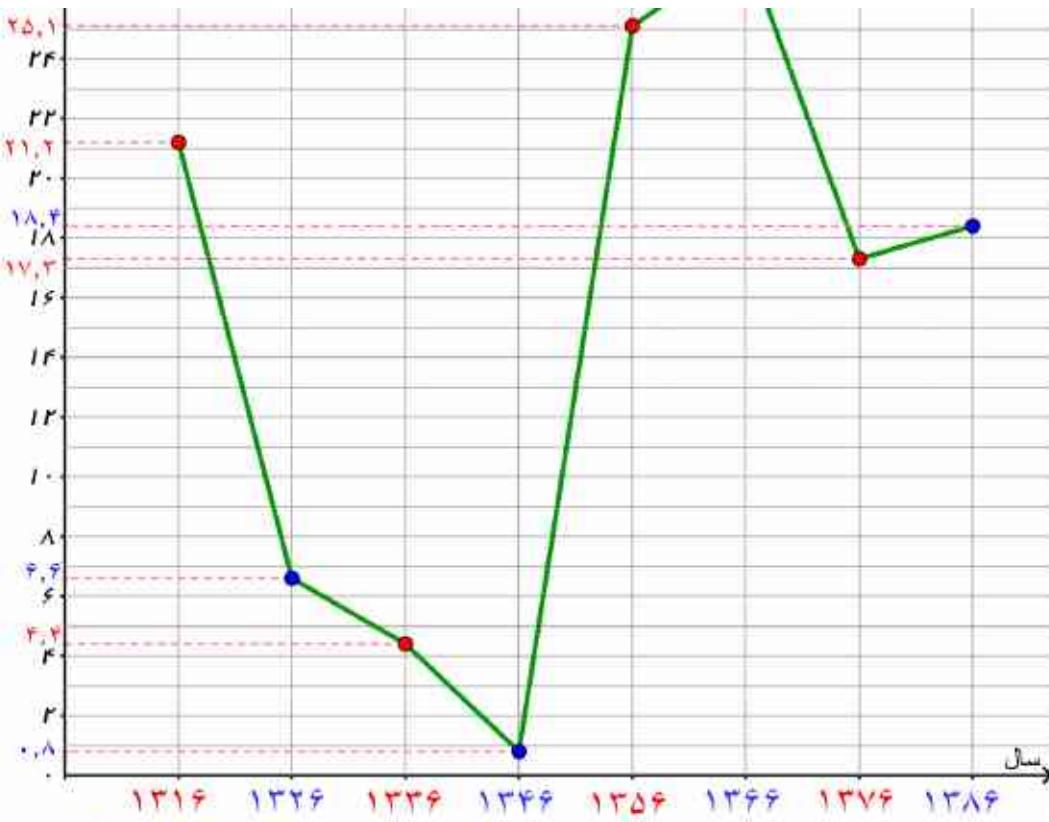
- الف) نمودار سری زمانی داده‌ها را در میان سال در میان رسم کنید.
- ب) داده‌های را با استفاده از قسمت قبل درون‌بایی کنید.
- ج) بر روی همان سری زمانی داده‌ها پنج سال در میان را با استفاده از جدول بهروی همان نمودار رسم و خطای درون‌بایی را محاسبه کنید.

سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم														
۱۳۱۶	۲۱/۲	۱۳۲۶	۶/۶	۱۳۳۶	۴/۴	۱۳۴۶	۰/۸	۱۳۵۶	۲۵/۱	۱۳۶۶	۲۷/۷	۱۳۷۶	۱۷/۲	۱۳۸۶	۱۸/۴		
۱۳۱۷	۸/۸	۱۳۲۷	۱۱/۱	۱۳۳۷	۱/۰	۱۳۴۷	۱/۵	۱۳۵۷	۱۰/۰	۱۳۶۷	۲۸/۹	۱۳۷۷	۱۸/۱	۱۳۸۷	۲۵/۴		
۱۳۱۸	۸/۰	۱۳۲۸	۲/۲	۱۳۳۸	۱۲/۰	۱۳۴۸	۲/۶	۱۳۵۸	۱۱/۴	۱۳۶۸	۱۷/۴	۱۳۷۸	۲۰/۱	۱۳۸۸	۱۰/۸		
۱۳۱۹	۱۳/۸	۱۳۲۹	-۱۷/۲	۱۳۳۹	۷/۹	۱۳۴۹	۱/۵	۱۳۵۹	۲۴/۵	۱۳۶۹	۹/۰	۱۳۷۹	۱۲/۶	۱۳۸۹	۱۲/۴		
۱۳۲۰	۴۹/۰	۱۳۳۰	۸/۲	۱۳۴۰	۱/۶	۱۳۵۰	۵/۵	۱۳۶۰	۲۲/۸	۱۳۷۰	۲۰/۷	۱۳۸۰	۱۱/۴	۱۳۹۰	۲۱/۵		
۱۳۲۱	۹۶/۲	۱۳۳۱	۷/۲	۱۳۴۱	۰/۹	۱۳۵۱	۶/۲	۱۳۶۱	۱۹/۲	۱۳۷۱	۲۴/۴	۱۳۸۱	۱۵/۸	۱۳۹۱	۲۰/۵		
۱۳۲۲	۱۱/۰	۱۳۳۲	۹/۲	۱۳۴۲	۱/۰	۱۳۵۲	۱۱/۲	۱۳۶۲	۱۴/۸	۱۳۷۲	۲۲/۹	۱۳۸۲	۱۵/۶	۱۳۹۲	۲۴/۷		
۱۳۲۳	۲/۷	۱۳۳۳	۱۵/۰	۱۳۴۳	۴/۵	۱۳۵۳	۱۵/۵	۱۳۶۳	۱۰/۴	۱۳۷۳	۳۵/۲	۱۳۸۳	۱۵/۲	۱۳۹۳	۱۵/۶		
۱۳۲۴	-۱۴/۴	۱۳۳۴	۱/۷	۱۳۴۴	۰/۳	۱۳۵۴	۹/۹	۱۳۶۴	۶/۹	۱۳۷۴	۴۹/۴	۱۳۸۴	۱۰/۴	۱۳۹۴	۱۱/۹		
۱۳۲۵	-۱۱/۵	۱۳۳۵	۸/۸	۱۳۴۵	۰/۸	۱۳۵۵	۱۶/۶	۱۳۶۵	۲۲/۷	۱۳۷۵	۲۲/۲	۱۳۸۵	۱۱/۹	۱۳۹۵	۹		

نوبه گفته:

گروه ریاضی دوره‌ی دوم منوشه و آنچون سلطان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir



(ب) توجه سال ۱۳۱۶ را سال
یک در نظر گرفته ایم بنابراین
سال ۱۳۸۶ سال ۷۱ است.

$$m = \frac{18.8 - 12.2}{10 - 1} = \frac{-6.6}{9} = -\frac{2.2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{3}(10) + h = 18.8 \Rightarrow h = \frac{21.2}{3} + \frac{18.8}{3} \Rightarrow h = \frac{31.2}{3} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{31.2}{3}$$

(ج)



I

$f(1) = -\frac{P}{100}(1) + \frac{1112P}{100} = \frac{-P + 1112P}{100} = \frac{1111P}{100} = 11.1P \Rightarrow E = 11.1 - 9.9 = 1.2$	در سال ۱۳۲۶
$f(19) = -\frac{P}{100}(19) + \frac{1112P}{100} = \frac{-19P + 1112P}{100} = \frac{1112P}{100} = 11.2P \Rightarrow E = 11.2 - 9.9 = 1.3$	در سال ۱۳۳۱
$f(21) = -\frac{P}{100}(21) + \frac{1112P}{100} = \frac{-21P + 1112P}{100} = \frac{1112P}{100} = 11.2P \Rightarrow E = 11.2 - 9.9 = 1.3$	در سال ۱۳۳۶
$f(29) = -\frac{P}{100}(29) + \frac{1112P}{100} = \frac{-29P + 1112P}{100} = \frac{1112P}{100} = 11.2P \Rightarrow E = 11.2 - 9.9 = 1.3$	در سال ۱۳۴۱
$f(30) = -\frac{P}{100}(30) + \frac{1112P}{100} = \frac{-30P + 1112P}{100} = \frac{1112P}{100} = 11.2P \Rightarrow E = 11.2 - 9.9 = 1.3$	در سال ۱۳۴۶
$f(39) = -\frac{P}{100}(39) + \frac{1112P}{100} = \frac{-39P + 1112P}{100} = \frac{1112P}{100} = 11.2P \Rightarrow E = 11.2 - 9.9 = 1.3$	در سال ۱۳۵۱
$f(40) = -\frac{P}{100}(40) + \frac{1112P}{100} = \frac{-40P + 1112P}{100} = \frac{1112P}{100} = 11.2P \Rightarrow E = 11.2 - 9.9 = 1.3$	در سال ۱۳۵۶
$f(49) = -\frac{P}{100}(49) + \frac{1112P}{100} = \frac{-49P + 1112P}{100} = \frac{1112P}{100} = 11.2P \Rightarrow E = 11.2 - 9.9 = 1.3$	در سال ۱۳۶۱
$f(50) = -\frac{P}{100}(50) + \frac{1112P}{100} = \frac{-50P + 1112P}{100} = \frac{1112P}{100} = 11.2P \Rightarrow E = 11.2 - 9.9 = 1.3$	در سال ۱۳۶۶
$f(59) = -\frac{P}{100}(59) + \frac{1112P}{100} = \frac{-59P + 1112P}{100} = \frac{1112P}{100} = 11.2P \Rightarrow E = 11.2 - 9.9 = 1.3$	در سال ۱۳۷۱
$f(60) = -\frac{P}{100}(60) + \frac{1112P}{100} = \frac{-60P + 1112P}{100} = \frac{1112P}{100} = 11.2P \Rightarrow E = 11.2 - 9.9 = 1.3$	در سال ۱۳۷۶
$f(69) = -\frac{P}{100}(69) + \frac{1112P}{100} = \frac{-69P + 1112P}{100} = \frac{1112P}{100} = 11.2P \Rightarrow E = 11.2 - 9.9 = 1.3$	در سال ۱۳۸۱
$f(70) = -\frac{P}{100}(70) + \frac{1112P}{100} = \frac{-70P + 1112P}{100} = \frac{1112P}{100} = 11.2P \Rightarrow E = 11.2 - 9.9 = 1.3$	در سال ۱۳۸۶

منابع

- ۱- هاک، سوزان. فلسفه منطق، (ترجمه: سیدمحمدعلی حجتی)، انتشارات طه.
 - ۲- امیری، حمیدرضا، ایلخانی بور، یدالله. مبانی ریاضیات گسته. انتشارات مدرسه.
 - ۳- سام، لوید. معماها و سرگرمی‌های ریاضی، (ترجمه: کاظم فائقی)، انتشارات امید یزدانی، ۱۳۶۴.
 - ۴- ایگل ونس، بورس، استریل، جودت. مقدمه‌ای بر استدلال ریاضی، (ترجمه: غلامرضا یاسی بور)، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۶.
 - ۵- شهریاری، برویز و همکاران، دانشنامه ریاضی، انتشارات کانون فرهنگی آموزش، ۱۳۹۲.
-
- 6- Canton, B. **Mathematics of Data Management**, Mc Graw – Hill, 2002.
 - 7- Ministry of Education. **Mathematical Development 5.3**, Austed Publishing, Western Australia.
 - 8- Smith, P. **An Introduction to Gödel's Theorems**, Cambridge University Press, 2013.
 - 9- Nickerson, R. S. **Mathematical Reasoning: Patterns, problems, conjectures, and proofs**, Psychology press, 2010.
 - 10- Henriksen M. **What is Gödel's theorem**, Scientific American, January, 1999.



بسمه تعالی

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایجاد نقش خطیر خود در اجرای سند تحول آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی، مشارکت معلمان را به عنوان سیاست اجرایی مهم دنبال می‌نماید. برای تحقق این امر با بهره‌مندی هوشمندانه از فرصت‌های فناوری‌های نوین در اقدامی توآورانه سامانه تعاملی برخط اعتبارسنجی کتاب‌های نونگاشت راهاندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان درباره کتاب‌های درسی نونگاشت کیفیت تولیدات سازمان را بهبود بخشد و محتوای کتاب‌های درسی را در اولین چاپ سپاری با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب فرآیند اعتبارسنجی همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی، گروه‌های آموزشی، دبیرخانه راهبری دروس در استان‌ها، شورای هماهنگی تالیف دفاتر، دبیرخانه پروژه اعتبارسنجی سازمان در هماهنگی و اجرا، نقش سازنده‌ای را داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش همکاران شرکت‌کننده در فرآیند اعتبارسنجی، اسمامی دیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با اراده نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب باری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌نماید.

محسن باهو

مشاور معاون وزیر و مدیر پروژه اعتبارسنجی

اسمی دیران و هنرآموزان شرکت‌کننده در اعتبارسنجی کتاب ریاضی و آمار (۲۰) گذ ۱۱۱۲۱۲

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	عباس اسدی قلعه روشنی	چهار محال و بختیاری	۱۵	مرضیه شریف زاد	ایلام
۲	اکرم سلامی	آذربایجان شرقی	۱۶	لیلا صبوری	فارس
۳	سهیلا چناری	کرمانشاه	۱۷	ابوب خلیلیان گل سفیدی	چهارمحال و بختیاری
۴	جواد کاواللوبی	خراسان شمالی	۱۸	تهمینه امیر خسروی	کرمان
۵	فاطمه عموبی	شهر تهران	۱۹	نذہت دانش	کرمان
۶	ساره ماه گلی	خراسان جنوبی	۲۰	عبداللطیف حسین پور	هرمزگان
۷	پروین طالب حسامی آذر	کردستان	۲۱	جمال نوین	بندر
۸	جواد راشدی	خراسان جنوبی	۲۲	کل بخت دهواری ناگان	سیستان و بلوچستان
۹	مصطفی رجب پور	همدان	۲۳	طاهره دانش شکیب	گیلان
۱۰	مهری هیرجاج	سمنان	۲۴	زهرا ملتمنس	شهرستان‌های تهران
۱۱	اکبر رضائی پور	قزوین	۲۵	قریدون حسنی شیروان شاهی	آذربایجان غربی
۱۲	منور صفائی	سمنان	۲۶	علی مهرنیا	آذربایجان شرقی
۱۳	وحیده سلیمانی	گلستان	۲۷	روحیم بردیده	مازندران
۱۴	شهیده رنجبران	همدان	۲۸	ترحس زنگارکی	میکری