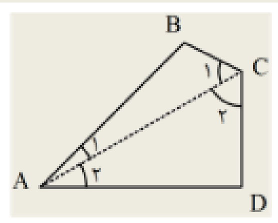
فرمول های هندسه دهم رشته ریاضی فیزیک

استدلال استنتاجی : می دانیم مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است با رسم یک چهار ضلعی محدب دلخواه و یک قطر از آن داریم :

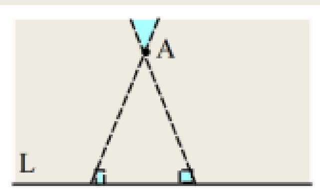


$$\left.\begin{aligned} A_1 + C_1 + B &= 180^\circ \\ A_2 + C_2 + D &= 180^\circ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{+} (A_1 + A_2) + (C_1 + C_2) + B + D = 360^\circ$$

$$\Rightarrow A + C + B + D = 360^\circ$$

برهان خلف : نوعی استدلال در هندسه و ریاضیات که به جای شروع از فرض و رسیدن به حکم . ابتدا فرض می کنیم حکم درست نباشد و به یک تناقض با فرض و یا به یک امر غیر ممکن می ریم . بنابر این می پذیریم که حکم درست بوده است .

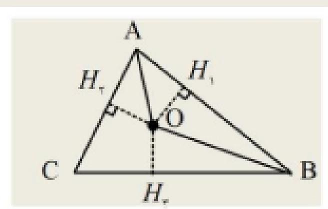
مثال : از هر نقطه خارج یک خط ، نمی توان بیش از یک عمود بر آن رسم کرد .



فرض می کنیم حکم غلط باشد یعنی بتوان دو عمود از A بر خط L رسم کرد

در این صورت مثلثی پدید می آید که مجموع زاویه های داخلی آن بیش از ۱۸۰ درجه است و چنین چیزی ممکن نیست . پس حکم نمی تواند غلط باشد .

قضیه ۱ : نیمساز های داخلی هر مثلث همرسند .



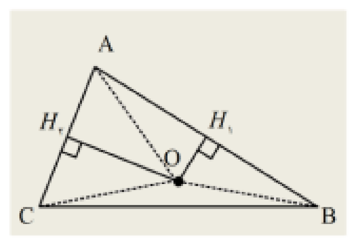
اثبات : نیمساز زاویه های A,B را رسم می کنیم و محل برخورد آنها را O می نامیم :

چون O روی نیمساز زاویه A است : $\cdots = \cdots$

چون O روی نیمساز زاویه B است : $\cdots = \cdots$

از دو رابطه قبل نتیجه می شود $\cdots = \cdots$ این یعنی O روی .... نیز قرار دارد .

قضیه ۲ : عمود منصف های اضلاع هر مثلث همرسند .



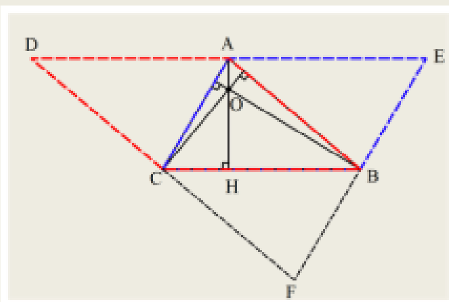
اثبات : عمود منصف اضلاع AB, AC را رسم می کنیم و محل برخورد آنها را O می نامیم :

چون O روی عمود منصف AB است : $\cdots=\cdots$

چون O روی عمود منصف AC است : $\cdots=\cdots$

از دو رابطه قبل نتیجه می شود $\cdots=\cdots$ این یعنی O روی .... نیز قرار دارد .

قضیه ۳ : ارتفاع های هر مثلث همرسند .



اثبات : از رئوس مثلث خطوطی موازی اضلاع مقابل آنها رسم می کنیم :

چهار ضلعی $AEBC$ متوازی الاضلاع است پس : $AE=\cdots$

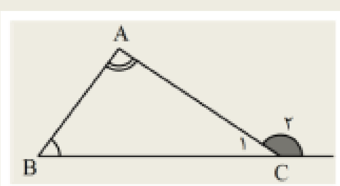
چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است پس : $AD=\cdots$

از روابط قبل نتیجه می شود $\cdots=\cdots$ پس AH پاره خط DE را .... می کند .

از طرفی چون $AH \perp BC$ و $BC \parallel DE$ پس $\cdots \perp \cdots$

در نتیجه AH عمود منصف پاره خط DE است و به این ترتیب ارتفاع های دیگر مثلث ABC نیز عمود منصف های مثلث DEF هستند و چون .... پس ارتفاع های مذکور همرسند .

قضیه ۱ : در هر مثلث زاویه خارجی از هر زاویه داخلی غیر مجاور بزرگ تر است .



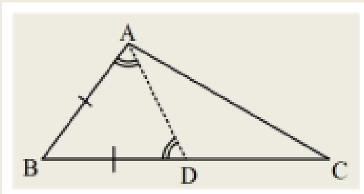
اثبات : می دانیم زاویه خارجی مثلث برابر با مجموع زاویه های داخلی غیر مجاور است

پس ....

بنابر این می توان گفت $\widehat{C_۲}$ به تنهایی از هر زاویه داخلی غیر مجاور بزرگ تر است .

قضیه ۲ : در هر مثلث زاویه مقابل به ضلع بزرگ تر از زاویه مقابل به ضلع کوچکتر ، بزرگتر است .

$$BC > AB \Rightarrow \hat{A} > \hat{C}$$



اثبات : روی ضلع BC به اندازه پاره خط AB جدا می کنیم :

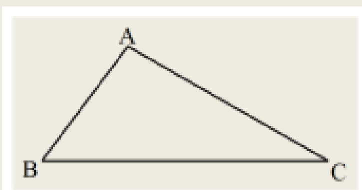
مثلث ABD متساوی الساقین است پس $\hat{D} = \cdots$

زاویه $\hat{D}$ زاویه خارجی مثلث ADC است پس $\hat{D} > \cdots$

از روابط قبل مشخص می شود $\cdots > \cdots$

عکس قضیه ۲ : در هر مثلث ضلع مقابل به زاویه بزرگتر از ضلع مقابل به زاویه کوچکتر ، بزرگ تر است .

$$\hat{A} > \hat{C} \Rightarrow BC > AB$$



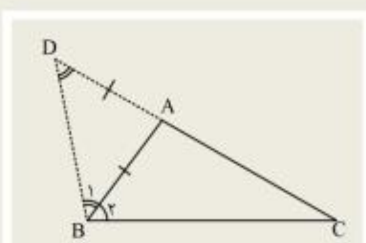
اثبات : فرض کنید $BC \not> AB$ پس .... :

اگر $BC = AB$ آنگاه مثلث .... است و $\cdots = \cdots$

اگر $BC < AB$ آنگاه طبق اصل قضیه $\cdots < \cdots$

پس در هر صورت به تناقض می رسیم لذا حکم نمی تواند غلط باشد .

قضیه ۳ : (قضیه نامساوی مثلثی) : مجموع هر دو ضلع مثلث از ضلع سوم بزرگ تر است .



$$AB + AC > BC$$

اثبات : ضلع AC را از راس A به اندازه ضلع AB امتداد می دهیم .

(دلیل این کار این است که سعی می کنیم دو ضلع AB, AC را تبدیل به یک ضلع کنیم

تا از قضیه های قبل برای اثبات بزرگ تر بودن یک ضلع از ضلع دیگر استفاده کنیم)

مثلث ABC متساوی الساقین است پس $\cdots = \cdots$ و این یعنی $\cdots > \cdots$

طبق قضیه اثبات شده ای $DC > \cdots$ بنابر این $\cdots + \cdots > \cdots$

چون $AD = AB$ پس $AB + AC > BC$.

تناسب : یک تساوی از نسبت ها را تناسب می گویند . $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

ویژگی های تناسب :

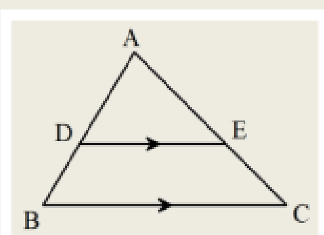
(طرفین وسطین کردن)	b و d $\neq$ ۰	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰}\Leftrightarrow ۳\times۱۰=۵\times۶$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$	۱
(معکوس کردن طرفین تناسب)	a و b و c و d $\neq$ ۰	$\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}\Rightarrow\frac{۵}{۲}=\frac{۱۰}{۴}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	۲
(تعویض جای طرفین یا وسطین)	a و b و c و d $\neq$ ۰	$\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{۹}\Rightarrow\frac{۹}{۳}=\frac{۶}{۲}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	۳
(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)	b و d $\neq$ ۰	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}\Rightarrow\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$	۴
(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)	b و d $\neq$ ۰	$\frac{۳۰}{۲۱}=\frac{۲۰}{۱۴}\Rightarrow\frac{۹}{۲۱}=\frac{۶}{۱۴}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$	۵
	b و d $\neq$ ۰	$\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲}\Rightarrow\frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۴}{۶}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	۶

واسطه هندسی دو عدد : اگر در یک تناسب دو عدد طرفین یا دو عدد وسطین برابر باشند خواهیم داشت : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\Rightarrow b^{۲}=ac$

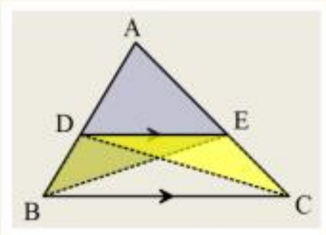
که b را واسطه هندسی دو عدد a,c می گویند .

قضیه تالس : هرگاه خطی موازی با یکی از اضلاع مثلث ، دو ضلع دیگر را قطع کند روی آن دو ضلع پاره خط های متناسب ایجاد می کند .

(رابطه جزء به جزء) $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$



اثبات : پاره خط های DC, BE را رسم می کنیم :



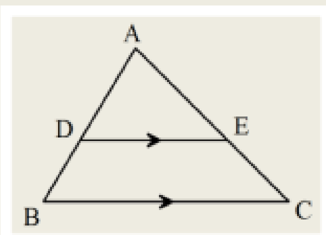
درمثلث ADC به دلیل .... داریم : $\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{DEC}}} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

درمثلث ABE به دلیل .... داریم : $\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{DEB}}} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

از طرفی به دلیل .... داریم : $S_{\overset{\Delta}{DEC}} = \cdots\cdots$

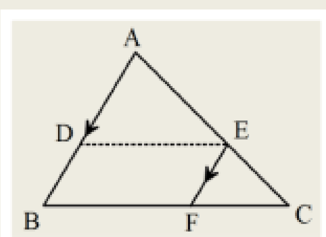
از سه رابطه قبل نتیجه می شود : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

تعمیم قضیه تالس : اگر خطی موازی یکی اط اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند ، اضلاع مثلث بوجود آمده با اضلاع مثلث اصلی متناسب است .



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

اثبات : پاره خط EF را موازی AB رسم می کنیم :



از $DE \parallel BC$ طبق رابطه جز به جز داریم : $\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$

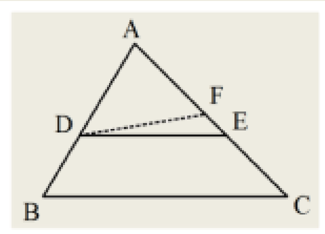
از $EF \parallel AB$ طبق رابطه جز به جز داریم : $\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$

از دو تناسب قبل نتیجه می شود : $\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$

از آنجایی که چهار ضلعی $BDEF$ متوازی الاضلاع است پس $BF = \cdots$ در نتیجه تناسب قبل تبدیل می شود به : $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

و طبق رابطه جز به کل و این تناسب خواهیم داشت : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

عکس قضیه تالس : اگر خطی دو ضلع مثلث را طوری قطع کند که روی آنها پاره خط های متناسب ایجاد کند ، این خط با ضلع سوم مثلث موازی است .



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow DE\parallel BC$$

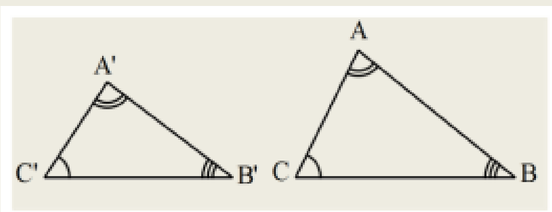
اثبات : فرض کنید $DE\nparallel BC$ پس می توان از نقطه D پاره خط DF را موازی BC

رسم کرد بنابر این طبق رابطه جز به کل داریم : $\frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\cdots}{\cdots}$

از رابطه جز به کل فرض قضیه نیز داریم : $\frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\cdots}{\cdots}$

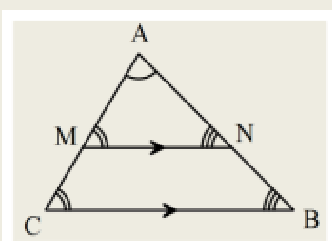
از رابطه های قبل نتیجه می شود که $\cdots=\cdots$ و این یعنی نقاط F,E یکی هستند پس $DE\parallel BC$

دو مثلث متشابه : دو مثلث متشابه هستند اگر و تنها اگر زاویه های آنها برابر و اضلاع آنها متناسب باشند .



$$\widehat{A}=\widehat{A'},\widehat{B}=\widehat{B'},\widehat{C}=\widehat{C'}\quad,\quad\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

قضیه اساسی تشابه : اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند ، مثلث بوجود امده با مثلث اصلی متشابه است .

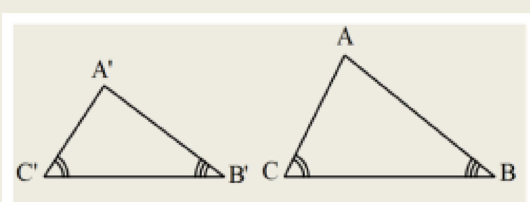


اثبات : زاویه A مشترک و زاویه های دیگر نیز طبق قضیه خطوط موازی برابرند .

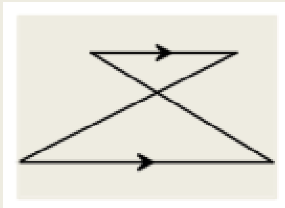
از طرفی طبق رابطه تعمیم قضیه تالس نسبت اضلاع نیز برابرند .

حالت های تشابه دو مثلث :

قضیه ۱ : هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند ، دو مثلث متشابه هستند .

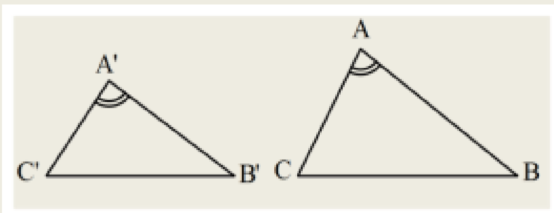


$$\widehat{B}=\widehat{B'},\widehat{C}=\widehat{C'}\Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C\sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$$



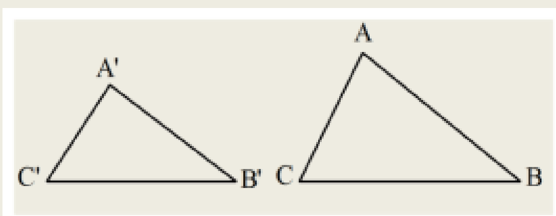
نتیجه : در شکلی به صورت مقابل همیشه دو مثلث متشابه هستند .

قضیه ۲ : هرگاه دوضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه بین آنها برابر باشند ، دو مثلث همنهشتند .



$$\widehat{A}=\widehat{A'},\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

قضیه ۳ : هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشد ، دو مثلث متشابه هستند .

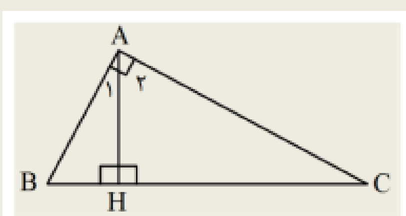


$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

قضیه : اگر در مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم روابط زیر حاکم است .

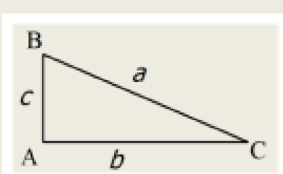
الف) $AH^{۲}=BH\times CH$

اثبات :



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{B}+\widehat{A}_{۱}=۹۰\\ \widehat{A}_{۲}+\widehat{A}_{۱}=۹۰\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{B}+\widehat{A}_{۱}=\widehat{A}_{۲}+\widehat{A}_{۱}\Rightarrow \widehat{B}=\widehat{A}_{۲}$$

عکس قضیه فیثاغورس: اگر در مثلثی رابطه طول اضلاع $a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}$ باشد ، آن مثلث در قائم الزاویه است .



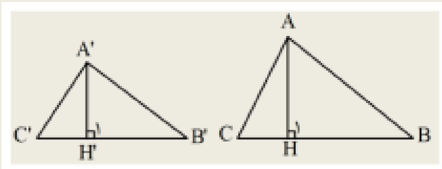
$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow \widehat{A}=۹۰^{\circ}$$

۱) قضیه نیمساز ها : در هر مثلث هر نیمساز زاویه داخلی ، ضلع قابل را به نسبت اضلاع زاویه قطع می کند .

$$\widehat{A}_{۱}=\widehat{A}_{۲}\Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

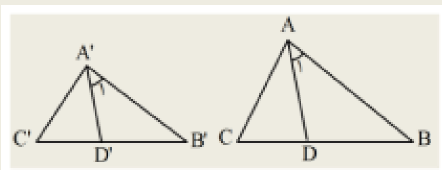
قضیه : در دو مثلث متشابه نسبت اجزای فرعی متناظر(ارتفاع ، نیمساز، میانه) برابر با نسبت تشابه است .

الف) ارتفاع ها :



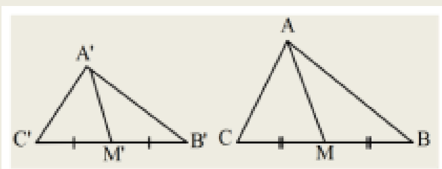
$$A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C', \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = k$$

ب) نیمساز ها :



$$A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C', \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{AD}{A'D'} = k$$

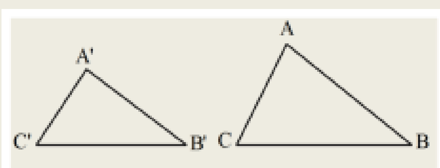
ج) میانه ها :



$$A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C', \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = k$$

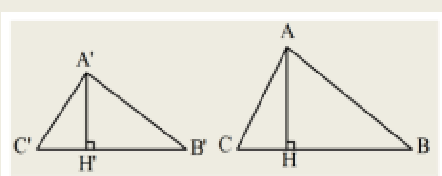
قضیه : در دو مثلث متشابه نسبت محیط ها برابر با نسبت تشابه و نسبت مساحت ها برابر با مجذور نسبت تشابه است .

الف) محیط ها :



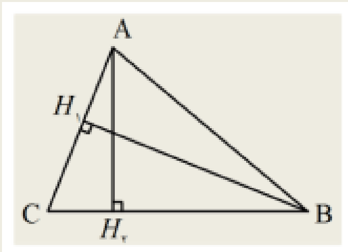
$$A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C', \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = k$$

ب) مساحت ها :



$$A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C', \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k$$

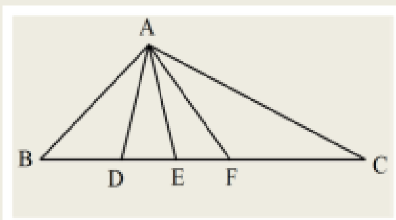
قضیه : در هر مثلث نسبت طول دو ضلع با عکس نسبت ارتفاع های وارد شده بر آنها برابر است .



اثبات

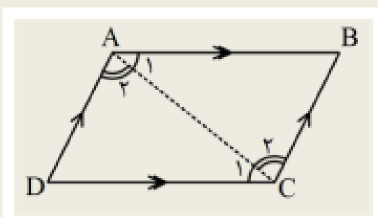
$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC} = \cdots \times AH_2 \times \cdots \\ S_{ABC} = \cdots \times BH_1 \times \cdots \end{array}\right\} \Rightarrow \cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots \Rightarrow \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

قضیه : نسبت مساحت دو مثلث با ارتفاع های برابر ، مساوی با نسبت قاعده ها است .



$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} \qquad \frac{S_{AEB}}{S_{AEF}} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

ویژگی های متوازی الاضلاع :



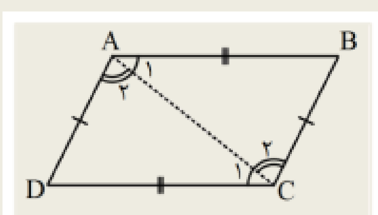
قضیه ۱ : در متوازی الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم اندازه هستند .

اثبات : قطر AC را رسم می کنیم :

اگر AC را مورب دو خط موازی AB و DC در نظر بگیریم : $\cdots = \cdots$

اگر AC را مورب دو خط موازی AD و BC در نظر بگیریم : $\cdots = \cdots$

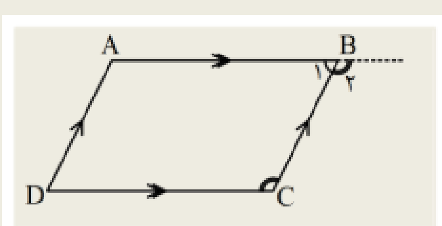
عکس قضیه ۱ : اگر در یک چهار ضلعی هر دو ضلع مقابل هم اندازه باشند ، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است .



اثبات : قطر AC را رسم می کنیم :

بنا به حالت .... دو مثلث ایجاد شده هم نهشت هستند پس : $\cdots = \cdots$ و $\cdots = \cdots$

و طبق عکس قضیه خطوط موازی .... و ....



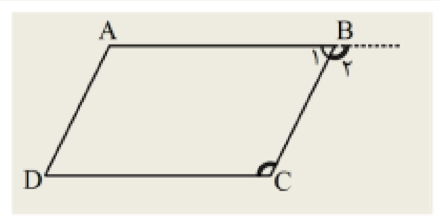
قضیه ۲ : در متوازی الاضلاع هر دو زاویه مجاور مکمل هستند .

اثبات : اگر BC مورب در نظر بگیریم داریم : $\cdots = \cdots$

از طرفی در رأس B یک نیم صفحه داریم پس : ....

از دو رابطه قبل نتیجه می شود که : ....

عکس قضیه ۲ : اگر در یک چهار ضلعی هر دو زاویه مجاور مکمل باشند ، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است .



اثبات : از مکمل بودن زاویه های B و C نتیجه می شود : ....

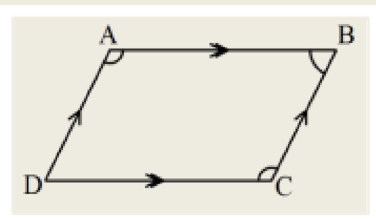
از نیم صفحه راس B هم داریم : ....

از دو رابطه قبل نتیجه می شود : ....

پس $DC \parallel AB$ و به همین ترتیب از مکمل بودن زاویه های A و B نتیجه

می شود که $AD \parallel BC$.

قضیه ۳ : در متوازی الاضلاع هر دو زاویه مقابل هم اندازه هستند .

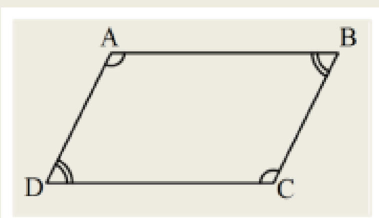


اثبات : زاویه های B و C مکمل هستند پس : ....

زاویه های B و A مکمل هستند پس : ....

از دو رابطه قبل نتیجه می شود : ....

عکس قضیه ۳ : اگر در چهار ضلعی هر دو زاویه مقابل برابر باشند ، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است .



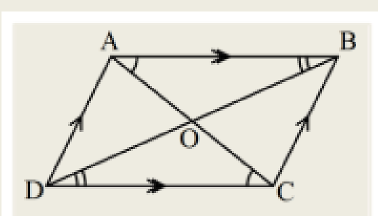
اثبات : مجموع زاویه های هر چهار ضلعی .... درجه است .

از طرفی $\widehat{A}=\widehat{C}=a$ و $\widehat{B}=\widehat{D}=b$ پس : ....

در نتیجه هر دو زاویه مجاور مکمل هستند و طبق عکس قضیه قبل

چهار ضلعی متوازی الاضلاع است .

قضیه ۴ : در متوازی الاضلاع قطر ها منصف یکدیگر هستند .



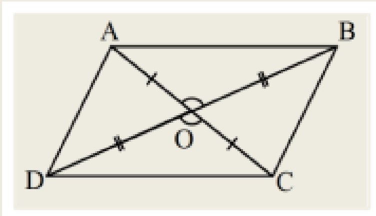
اثبات :

با توجه به موازی بودن AB و DC و مورب بودن قطر ها داریم : ....

و چون AB=DC نیز است پس بنا به حالت .... دو مثلث ....و.................

همنهشت هستند و در نتیجه ...=... و ...=...

عکس قضیه ۴ : اگر در چهار ضلعی قطر ها همدیگر را نصف کنند ، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است .



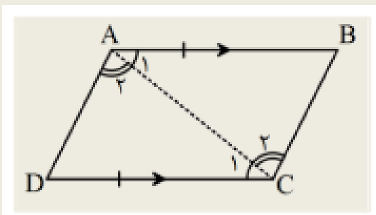
اثبات : از آنجایی که AO=CO و BO=DO و $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}$ پس بنا به حالت

دو ضلع و زاویه بین دو مثلث ABO و DCO هم نهشت هستند و $\cdots=\cdots$

پس $\cdots \| \cdots$.

به همین ترتیب ثابت می شود $AD \| BC$.

قضیه ۵ : هر چهار ضلعی که **دو ضلع مقابل** آن **موازی** و **مساوی** باشد ، متوازی الاضلاع است .

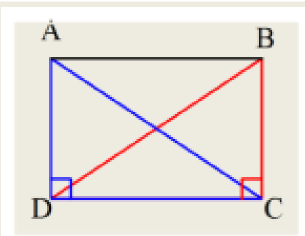


اثبات : قطر AC را رسم می کنیم :

با فرض AC به عنوان مورب داریم : ....

پس بنا به حالت .... دو مثلث همنهشت هستند و $\widehat{A_2}=\cdots$

و این یعنی $\cdots \| \cdots$

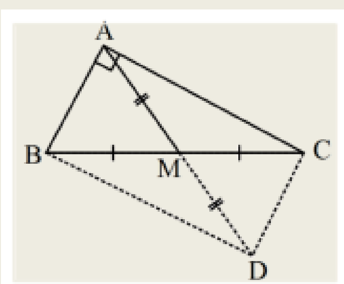


قضیه ۱ : در هر مستطیل قطر ها برابرند .

اثبات : دو مثلث ADC و BCD بنا به حالت .... همنهشت هستند

پس : ....

قضیه۲ : در مثلث قائم الزاویه ، اندازه میانه وارد بر وتر نصف اندازه وتر است .

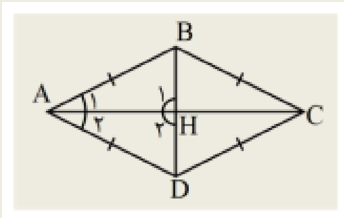


اثبات : میانه AM را به اندازه خودش امتداد می دهیم :

چهار ضلعی حاصل به دلیل ....متوازی الاضلاع است و

به دلیل .... مستطیل است .پس قطر ها برابرند و $AM=\frac{BC}{۲}$.

قضیه ۱ : در هر لوزی قطرها نیمساز زاویه ها و عمود بر هم هستند .



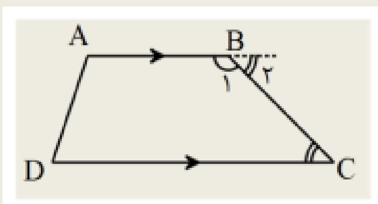
اثبات : مثلث های ABC و ADC بنا به حالت .... همنهشت هستند پس :

.... و این یعنی AC نیمساز است و به همین ترتیب BD نیز نیمساز است.

در نتیجه مثلث های ABH و ADH بنا به حالت .... همنهشت هستند

و $\widehat{H}_{۱}=\widehat{H}_{۲}=۹۰^\circ$

قضیه ۱ : در هر ذوزنقه زاویه های مجاور به یک ساق مکمل هستند .

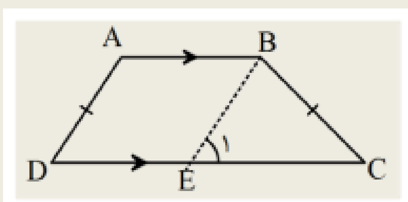


اثبات : با در نظر گرفتن مورب BC داریم : ....

و با توجه به نیم صفحه به راس B داریم : ....

در نتیجه :..............................

قضیه ۲ : در هر ذوزنقه متساوی الساقین زاویه های مجاور به یک قاعده برابر هستند .



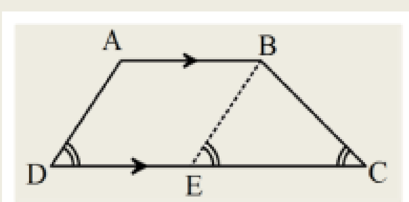
اثبات : پاره خط BE را موازی AD رسم می کنیم (یک ایده خوب) :

چهار ضلعی ABED .... است و ...... =BE و $\widehat{D}=\cdots$

BE=BC در نتیجه مثلث BCE متساوی الساقین است و $\widehat{E}_{۱}=\cdots$

از دو رابطه قبل نتیجه می شود : .... و به همین ترتیب ثابت می شود $\widehat{A}=\widehat{B}$

عکس قضیه ۲ : اگر در یک ذوزنقه دو زاویه مجاور به یک قاعده برابر باشند ، ذوزنقه متساوی الساقین است .



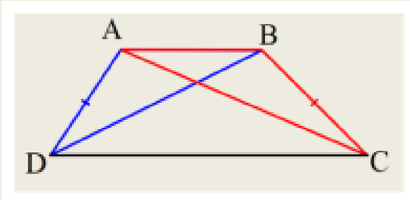
اثبات : پاره خط BE را موازی AD رسم می کنیم :

چهار ضلعی ABED .... است و $\widehat{D}=\cdots$ و ....=AD

و چون $\widehat{D}=\widehat{C}$ پس .... و مثلث BEC متساوی الساقین است

بنابر این BE=BC و چون AD=BE داریم : AD=BC

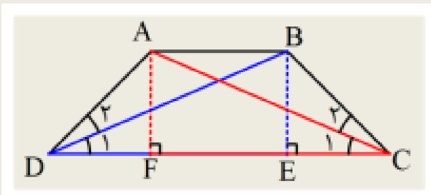
قضیه ۳ : در ذوزنقه متساوی الساقین اندازه قطر ها با هم برابر است .



اثبات : از آنجایی که $\widehat{A}=\widehat{B}$ دو مثلثABC و ABD بنا به حالت ....

همنهشت هستند و AC=BD

عکس قضیه ۳ : اگر در ذوزنقه ای اندازه قطر ها برابر باشند ، ذوزنقه متساوی الساقین است .



اثبات : ارتفاع های AF و BE را رسم می کنیم دو مثلث AFC و BED

بنا به حالت .... همنهشت هستند پس : $\widehat{D}_۱=\cdots$

از آنجا که $\widehat{D}=\widehat{C}$ پس $\widehat{D}_۲=\cdots$ در نتیجه مثلث های ABD و ABC

بنا به حالت .... همنهشت هستند و AD=BC .

مساحت مستطیل : اگر طول و عرض آن a,b باشد : $S=ab$

مساحت مربع : اگر طول ضلع آن a باشد : $S=a^۲$

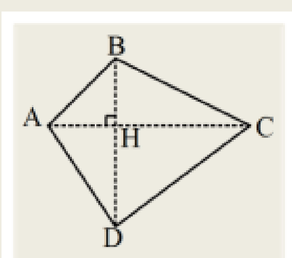
مساحت مثلث : اگر اندازه یک ضلع a و اندازه ارتفاع نظیر آن h باشد : $S=\frac{۱}{۲}ha$

متوازی الاضلاع : اگر اندازه یک ضلع a و اندازه ارتفاع نظیر آن h باشد : $S=ha$

مساحت لوزی : اگر اندازه دو قطر آن m وn باشد : $S=\frac{۱}{۲}mn$

مساحت ذوزنقه : اگر اندازه دو قاعده aوb و اندازه ارتفاع آن h باشد : $S=\frac{۱}{۲}(a+b)h$

قضیه : مساحت هر چهار ضلعی که قطر های آن عمود باشند ، برابر با نصف حاصل ضرب اندازه قطر ها است .

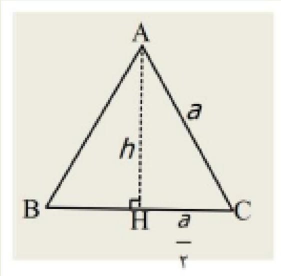


اثبات : مساحت مثلث ABC برابر :..............................

مساحت مثلث ADC برابر : ....

از جمع دو رابطه قبل مساحت کل برابر است با : ....

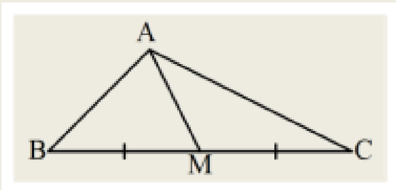
قضیه: مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a برابر $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ است .



اثبات : با رابطه فیثاغورس داریم :... $h=$

پس طبق فرمول مساحت مثلث داریم : .... $S=$

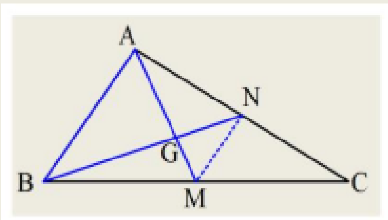
قضیه : ثابت کنید یک میانه در هر مثلث آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند .



اثبات : دو مثلث ایجاد شده دارای ارتفاع مشترک با قاعده های هم اندازه هستند

پس ....

قضیه : هر سه میانه یک مثلث در نقطه ای درون مثلث همرسند. و فاصله این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{۱}{۳}$ اندازه میانه نظیر این ضلع است و فاصله آن تا هر رأس $\frac{۲}{۳}$ اندازه میانه نظیر آن رأس است .



اثبات : با رسم دو میانه AM وBN و رسم پاره خط MN

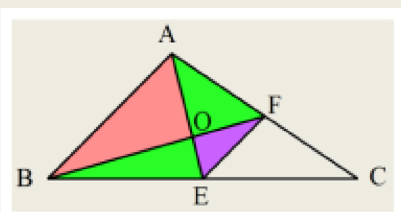
دو مثلث GMNو .... بنا به حالت .... متشابه هستند

و چون $AB=۲MN$ پس $BG=\cdots$ و $AM=\cdots$.

در نتیجه برای هر دو میانه دلخواه این نسبت برقرار است و لذا میانه ها همرسند و

قاصله نقطه همرسی تا وسط هر ضلع $\frac{۱}{۳}$ اندازه میانه نظیر این ضلع و فاصله آن تا هر رأس $\frac{۲}{۳}$ اندازه میانه نظیر آن رأس است .

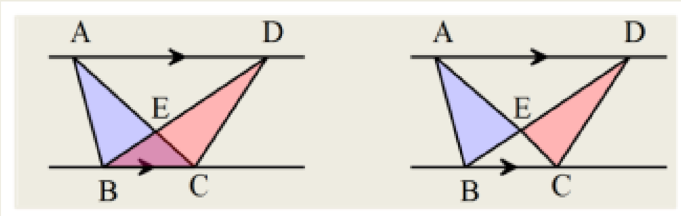
نتیجه : اگر مساحت مثلث ABC را S بنامیم ، از برخورد دو میانه مثلث داریم :



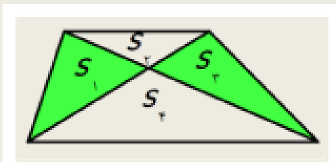
$$S_{OFE}=\frac{۱}{۱۲}S \quad , \quad S_{ABO}=\frac{۱}{۳}S$$

$$S_{AOF}=S_{BEO}=\frac{۱}{۶}S \quad , \quad S_{FEC}=\frac{۱}{۴}S$$

توجه : می دانیم دو مثلث هم قاعده بین دو خط موازی هم مساحت هستند (در ذوزنقه همینطور) پس با حذف مثلث مشترک از هر دوی آنها مثلث های باقی مانده نیز هم مساحت هستند .

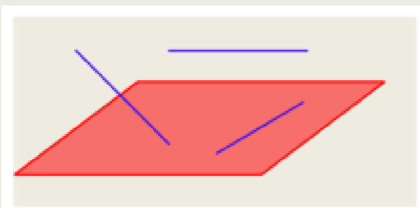


در هر چهار ضلعی از رسم قطر ها ۴ مثلث پدید می آید که حاصل ضرب مساحت دو مثلث مقابل با حاصل ضرب دو مثلث مقابل دیگر برابر است پس در ذوزنقه داریم :



$$S_1 \times S_3 = S_2 \times S_4 \xrightarrow{S_1=S_3} S_1^2 = S_2 \times S_4$$

حالت های مختلف خط و صفحه در فضا : (منطبق ، متقاطع، موازی)



حالت های مختلف دو صفحه در فضا : (منطبق، موازی ، متقاطع)