فرمول های کتاب حسابان ۱:

نام فرمول	فرمول
دنباله حسابی	$a_n = a + (n-1)d$ $d = a_n - a_{n-1}$ a,b,c سه جمله متوالی $2b = a + c$ $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a + a_n)$
دنباله هندسی	$a_n = aq^{n-1}$ $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ $b^2 = ac$ a,b,c سه جمله متوالی $S_n = \frac{a(q^n - 1)}{a_n - 1}$
تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری ها	P() = q(x) Q(x) + R(x)
بسط دو جمله ای	$(a+b)^n = a_n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n$
جمله (k+1) ام	$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

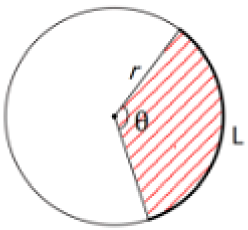
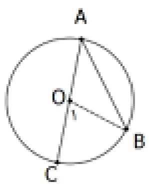
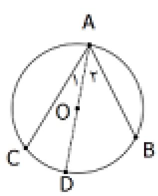
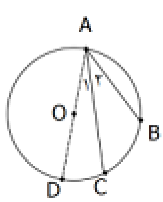
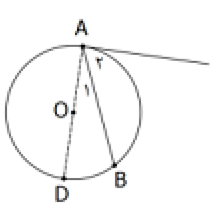
$ax^2 + bx + c = 0$ $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	معادله درجه دوم **دوجواب** $\boldsymbol{\Delta > 0}$ ریشه مضاعف $\boldsymbol{\Delta = 0}$
$\rightarrow x = 1 , x = \frac{c}{a}$ a +b + c = 0 $\rightarrow x = 1 , x = -\frac{c}{a}$ a + c = b $\alpha + \beta = s = -\frac{b}{a}$ $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ $\alpha\beta = p = \frac{c}{a}$	
Sin (α ± β) = sin α cos β ± cos α sin β cos (α ± β) = cos α cos β ± sin α sin β Sin (α ± β) = $\frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1+ \tan\alpha \pm \tan\beta}$	فرمول های بسط $\boldsymbol{\alpha \pm \beta}$
Sin 2α = 2sin α cos β = $\frac{2\tan\alpha}{1+ tan^2\,\alpha}$ cos 2α = $cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha = 2\,cos^2\,\alpha - 1 = 1 - 2\,sin^2\,\alpha = \frac{1- tan^2\,\alpha}{1+ tan^2\,\alpha}$ tan 2α = $\frac{2\tan\alpha}{1- tan^2\,\alpha}$	فرمول های بسط $\boldsymbol{2\alpha}$

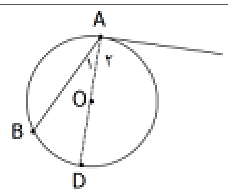
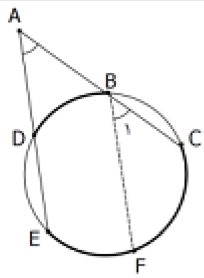
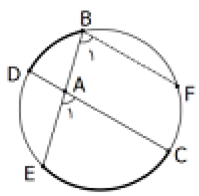
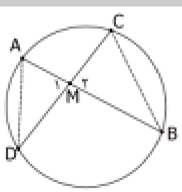
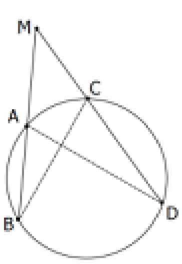
$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$ $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$	
$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ sin x + cos x = $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ sin x - cos x =	فرمول های کمان $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$
$\sin p \pm \sin q = 2\sin\frac{p\mp q}{2}\cos\frac{p\mp q}{2}$ $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$	فرمول های تبدیل جمع به ضرب
$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$ $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ $\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$	فرمول های تبدیل ضربه به جمع
$M_{AT} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	مشتق

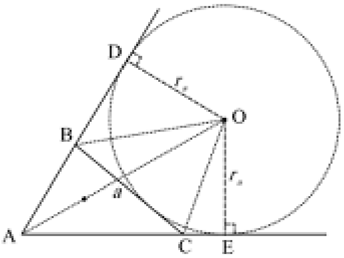
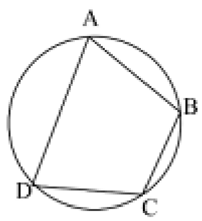
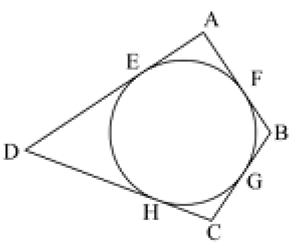
جدول فرمول های آمار و احتمالی یازدهم:

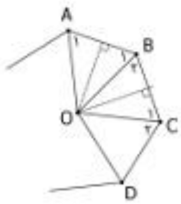
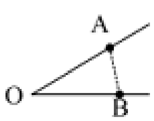
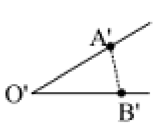
نام فرمول	فرمول
احتمال شرطی	$P(A\|B) = \frac{n[A\cap B]}{n(B)} = \frac{P[A\cap B]}{P(B)}$
پیشامدهای مستقل	$P(A\|B) = P(A\|B`) = P(A)$ $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
میانگین	$X = = \frac{x_{1}+\ x_{2}+x_{3}+\cdots+x_{n}}{n}$
دامنه تغییرات	$R = R_1 - R_2$
واریانس	$\sigma^2 = \frac{(x_1 - X)^2 + (x_2 - X)^2 + \cdots + (x_n - X)^2}{n}$
ضریب تغییرات	$CV = \frac{\sigma}{x}$

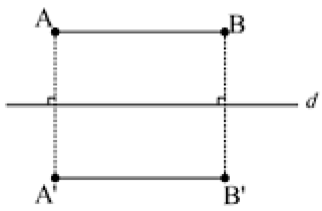
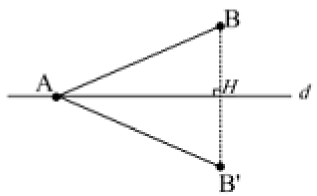
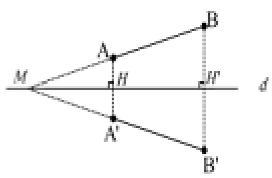
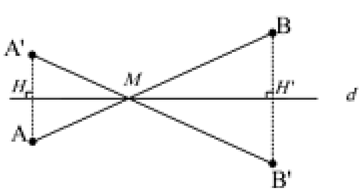
جدول فرمول ها و اثبات فرمول های هندسه یازدهم:

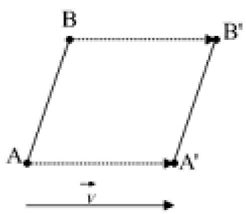
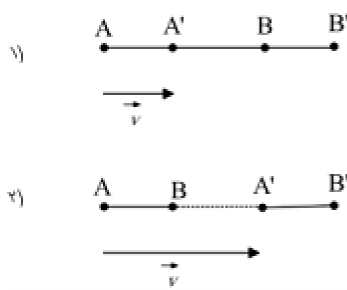
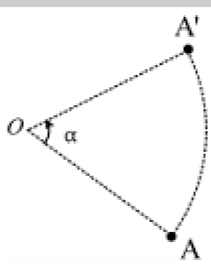
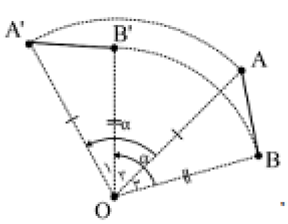
قضیه	اثبات
اثبات قضیه: طول کمان و مساحت قطاع	 $\frac{L}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow L = r\theta$ $\frac{S}{\pi r^{2}} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow S = \frac{1}{2} r^{2}\theta$
اثبات قطیه: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل آن (وقتی یکی از اضلاع زاویه از مرکز می گذرد)	 $\left.\begin{matrix} O_1 = A + B \\ A = B \end{matrix}\right\} \Rightarrow O_1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2} O_1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} BC$
اثبات قضیه: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل آن (وقتی زاویه اطراف مرکز دایره باشد)	 $\left.\begin{matrix} A_1 = \frac{1}{2} CD \\ A_2 = \frac{1}{2} BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_1 + A_2 = \frac{1}{2}(CD + BD) \Rightarrow A = \frac{1}{2} BC$
اثبات قضیه: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل آن (وقتی اضلاع زاویه در یک طرف مرکز دایره باشد)	 $\left.\begin{matrix} A = \frac{1}{2} BD \\ A_1 = \frac{1}{2} DC \end{matrix}\right\} \Rightarrow A - A_1 = \frac{1}{2}(BD - DC) \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} BC$
اثبات قضیه: اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان مقابل آن (در صورتی که زاویه ظلی حاده باشد)	 $\left.\begin{matrix} A = 90^\circ \Rightarrow A = \frac{1}{2} AD \\ A_1 = \frac{1}{2} BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow A - A_1 = \frac{1}{2}(AD - BD) \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} AB$

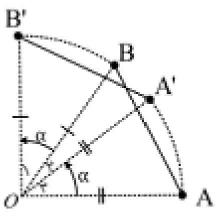
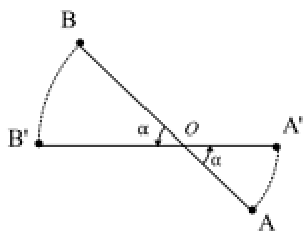
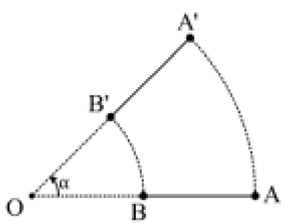
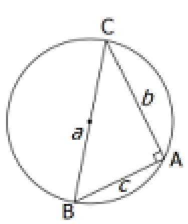
اثبات قضیه: اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان مقابل آن (در صورتی که زاویه ظلی منفجره باشد)	 $\left.\begin{array}{l} A_{2} = 90^\circ \Rightarrow A = \frac{1}{2}AD \\ A_{1} = \frac{1}{2}BD \end{array}\right\} \Rightarrow A_{2} + A_{1} = \frac{1}{2}(AD + BD) \Rightarrow A = \frac{1}{2}AB$
اثبات قضیه: زاویه حاصل از برخورد ۲ وتر از بیرون از دایره برابر با نصف تفاضل اندازه کمان هایی بوده که در بین اضلاع زاویه محصورند.	 $A = B_{1} = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2}\left(EC - EF\right) \xrightarrow{EF=BD} A = \frac{EC - BD}{2}$
اثبات قضیه: زاویه حاصل از برخورد دو وتر در درون دایره برابر با نصف مجموع اندازه کمان هایی بوده که بین اضلاع زاویه محصورند.	 $A_{1} = B_{1} = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}\left(EC + FC\right) \xrightarrow{FC=BD} A = \frac{EC + BD}{2}$
هرگاه خط هایی شامل ۲ وتر AB و CD در نقطه ای مانند M درون یا بیرون دایره همیدگر را قطع کنند. (در صورت تقاطع درون دایره): MA.MB = MS.MD	 $\left.\begin{array}{l} B = \frac{AC}{2} = D \\ M_{1} = M_{2} \end{array}\right\} \longrightarrow \overset{\Delta}{ADM} \sim \overset{\Delta}{MBC} \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA.MB = MC.MD$
هرگاه خط هایی شامل ۲ وتر AB و CD در نقطه ای مانند M درون یا بیرون دایره همیدگر را قطع کنند. (در صورت تقاطع بیرون از دایره): MA.MB = MS.MD	 $\left.\begin{array}{l} B = \frac{AC}{2} = D \\ M = M \end{array}\right\} \longrightarrow \overset{\Delta}{ADM} \sim \overset{\Delta}{MBC} \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA.MB = MC.MD$

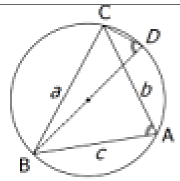
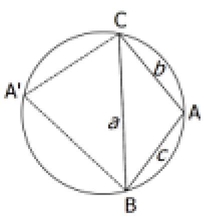
اثبات قضیه: عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیط مثلث قطع می کنند.	 $S_{ABC}=S_{ABO}+S_{ACO}-S_{BCO}=\frac{۱}{۲}r_a(b+c-a)$ $۲p=a+b+c\Rightarrow ۲p-۲a=b+c-a$ $S=r_a(p-a)\Rightarrow r_a=\frac{S}{p-a}$ $r_c=\frac{S}{p-c}$ و $r_b=\frac{S}{p-b}$
اثبات قضیه: چهارضلعی محاطی است، اگر و تنها اگر دو زاویه مقابل آن محاطی باشند.	 $A=\frac{BCD}{۲}$, $C=\frac{BAD}{۲}$ $\Rightarrow$ $A+C=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$
اثبات قضیه: چهار ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل برابر با مجموع اندازه دو ضله دیگر باشد.	 $AB+DC=AF+BF+DH+CH$ $=\underline{AE}+\underline{BG}+\underline{DE}+\underline{CG}$ $=AD+BC$
اثبات قضیه: هر چند ضلعی منتظم هم محاطی است هم محیطی	

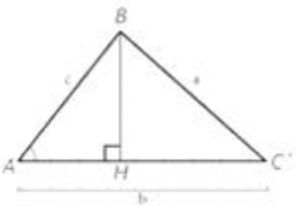
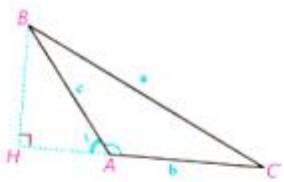
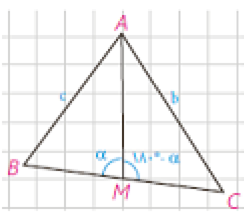
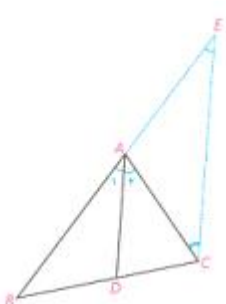
	 عمود منصف های اضلاع AB و BC را رسم می کنیم تا در O همدیگر را قطع کنند اگر O را به A,B,C وصل کنیم $OA = OB = OC = k$ و بنا به حالت (ض ض ض) مثلث های OAB و BOC همنهشت هستند و $A_1 = B_1 = B_2 = C_1 = \alpha$ در نتیجه $C_2 = \alpha$. حال اگر O را به D وصل کنیم بنا به حالت (ض ز ض) دو مثلث OBC و OCD همنهشتند و $OD = k$. به همین ترتیب فاصله O از بقیه رئوس نیز برابر K است و این یعنی O مرکز دایره ای است که از رئوس چند ضلعی می گذرد و از آنجایی که فاصله O از تمام ضلع ها نیز برابر است مرکز دایره ای است که بر اضلاع مماس است و این یعنی چند ضلعی منتظم هم محیطی و هم محاطی است .
تبدیل: تبدیل T در صفحه P تابعی بوده که به هر نقطه A از صفحه P دقیقا یک نقطه به مانند `A را از صفحه P نظیر می کند و برعکس: هر نقطه از `A در صفحه P تصوی دقیقا یک نقطه A از صفحه P می باشد.	$T : P \to P$ $T(A) = A'$
تبدیل طولپا یا ایزومتری	$T(A) = A', T(B) = B'$ که $AB = A'B'$.
اثبات قضیه: در هر تبدیل طولپا تبدیل یافته هر زاویه، زاویه ای هم اندازه می باشد. (تبدیل طولپا اندازه زاویه را حفظ می کند.)	فرض کنید زاویه AOB تحت تبدیل طولپای T به زاویه $A'O'B'$ تصویر شده باشد . به طوری که $T(A) = A', T(O) = O', T(B) = B'$. چون تبدیل طولپاست : $OA = O'A', OB = O'B', AB = A'B'$ در نتیجه بنا به حالت (ض ض ض) دو مثلث $OAB, O'A'B'$ همنهشتند و $O = O'$.  

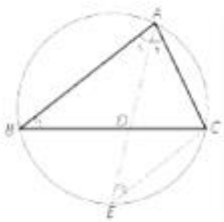
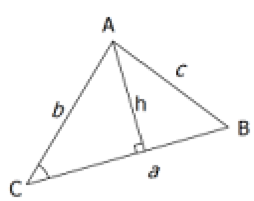
بازتاب تبدیلی طولپا است (در صورتی که پاره خط AB موازی خط d باشد.)	 تصویر آن خط موازی d در طرف دیگر آن است و چهار ضلعی $ABB'A'$ مستطیل خواهد بود پس $AB=A'B'$.
بازتاب تبدیلی طولپا است (در صورتی که یک سر پاره خط روی خط d باشد.)	 (اگر هر دو سر پاره خط روی d باشد حکم بدیهی است.) تصویر A خودش است و تصویر B ، B' است . و چون d عمود منصف BB' است پس $AB=A'B'$.
بازتاب تبدیلی طولپا است (در صورتی که پاره خط با d نه موازی است نه متقاطع)	 پاره خط AB را امتداد می دهیم تا d را در M قطع کند . سپس تصویر B یعنی B' را نیز مشخص می کنیم و پاره خط MB' را نیز می کشیم .حال از نقطه A عمودی بر d رسم می کنیم تا خط MB' را در A' قطع کند ، این نقطه همان تصویر A است زیرا بنا به حالت (ز ض ز) دو مثلث $MAH, MA'H$ همنهشتند و $AH=A'H$.از آنجایی که d عمود منصف AA', BB' است پس $MB=MB', MA=MA'$ در نتیجه $MB-MA=MB'-MA'$ یعنی $AB=A'B'$.
بازتاب تبدیلی طولپا است (در صورتی که پاره خط با d در دو جایی به غیر از دو سر پاره خط متقاطع باشد.)	 فرض کنید پاره خط و خط d در نقطه M متقاطع باشند . تصویر B یعنی B' را مشخص کرده و پاره خط MB' را رسم می کنیم حال از نقطه A عمودی بر d رسم می کنیم تا امتداد MB' را در A' قطع کند ، این نقطه همان تصویر A است زیرا بنا به حالت (ز ض ز) دو مثلث $MAH, MA'H$ همنهشتند و $AH=A'H$.از آنجایی که d عمود منصف AA', BB' است پس $MB=MB', MA=MA'$ در نتیجه $MB+MA=MB'+MA'$ یعنی $AB=A'B'$.

انتقال تبدیل طولپا است(با فرض اینکه پاره خط AB با بردار v موازی نباشد.)	 انتقال یافته AB تحت این بردار را رسم می کنیم . در چهار ضلعی AA'B'B دو ضلع AA' و BB' موازی و مساویند پس چهار ضلعی متوازی الاضلاع است در نتیجه AB=A'B'.
انتقال تبدیل طولپا است(با فرض اینکه پاره خط AB با بردار v موازی باشد.)	 $\left.\begin{array}{l} AB = AA' + A'B \\ A'B' = A'B + BB' \\ \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$ $\left.\begin{array}{l} AB = AA' - BA' \\ A'B' = BB' - BA' \\ \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$
دوران: دوران به مرکز O و زاویه **α** تبدیلی بوده که هر نقطه مانند A در صفحه را به مانند نقطه A` نظیر می کند. به طوری که:	 $. OA = OA', AOA' = \alpha$
اثبات قضیه دوران تبدیل طولپا (مرکز دوران بر پاره خط AB واقع نباشد و زاویه دوران از زاویه AOB بیشتر باشد.)	 $\left.\begin{array}{l} AOA' = BOB' = \alpha \\ AOB = \alpha - O_{۲} \\ A'OB' = \alpha - O_{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow AOB = A'OB'$ در نتیجه دو مثلث AOB و A'OB' بنا به حالت (ض ز ض) همنهشتند پس AB=A'B' .

 $\left.\begin{array}{l} AOA' = BOB' = \alpha \\ AOB = \alpha + O_2 \\ A'OB' = \alpha + O_2 \end{array}\right\} \Rightarrow AOB = A'OB'$ در نتیجه دو مثلث AOB و A'OB' بنا به حالت (ض ز ض) همنهشتند پس AB=A'B' .	اثبات قضیه دوران تبدیل طولپا (مرکز دوران بر پاره خط AB واقع نباشد و زاویه دوران از زاویه AOB کمتر باشد.)
 بنا به تعریف دوران $OA = OA', OB = OB'$ و از مجموع طرفین تساوی داریم : $OA + OB = OA' + OB'$ پس $AB = A'B'$	اثبات قضیه دوران تبدیل طولپا (مرکز دوران بر پاره خط AB واقع باشد.)
 بنا به تعریف دوران $OA = OA', OB = OB'$ و از تفاضل طرفین تساوی داریم : $OA - OB = OA' - OB'$ پس $AB = A'B'$	اثبات قضیه دوران تبدیل طولپا (مرکز دوران در امتداد پاره خط AB باشد.)
 $\left.\begin{array}{l} \sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = a \\ \sin C = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = a \\ \sin A = 1 \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = a \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = a = 2R$	اثبات قضیه سینوس ها (زمانی که مثلث دارای زاویه قائمه باشد، وتر از مرکز دایره محیطی عبور می کند)
	اثبات قضیه سینوس ها (زمانی که زاویه های مثلث حاده باشند.)

	 قطر BD را رسم می کنیم و D را به C وصل می کنیم زاویه A و D مقابل به یک کمان هستند پس $A = D$. مثلث BCD در راس C قائم الزاویه است بنابر این : $\frac{a}{\sin D} = 2R \xrightarrow{A=D} \frac{a}{\sin A} = 2R$ و به طور مشابه اثبات می شود : $\frac{b}{\sin B} = 2R , \frac{c}{\sin C} = 2R$.
اثبات قضیه سینوس ها (زمانی که مثلث دارای یک زاویه منفجره باشد.)	نقطه دلخواه A' را روی کمان BC در نظر گرفته و به B و C وصل می کنیم  برای زاویه های B وC می توان مانند مرحله قبل نشان داد رابطه مد نظر برقرار است از طرفی زاویه A و A' مکمل هم هستند (چرا؟) پس چون A منفرجه است A' حاده خواهد بود و طبق قسمت قبل : $\frac{a}{\sin A'} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\sin(180-A)} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$
قضیه کسینوس ها: در مثلث ABC که BC = a و AC = b و AB = c	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
اثبات: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ اگر زاویه A = 90 درجه .	اگر $A = 90°$ باشد مثلث قائم الزاویه است و طبق قضیه فیثاغورس داریم $a^2 = b^2 + c^2$ بیان شده است که $2bc\cos 90 = 0$

اثبات: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ اگر زاویه A کوچکتر از ۹۰ درجه باشد.	 $AH = c\times\cos A \Rightarrow \boxed{CH = b - c\times\cos A}$ $\boxed{BH = c\times\sin A}$ $\Rightarrow a^2 = BH^2 + CH^2$ $= c^2\sin^2 A + b^2 + c^2\cos^2 A - 2bc\cos A$ $= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
اثبات: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ اگر زاویه A بزرگتر از ۹۰ درجه باشد.	 $AH = c\times\cos A_1 \Rightarrow \boxed{CH = b + c\times\cos A_1}$ $\boxed{BH = c\times\sin A_1}$ $\Rightarrow a^2 = BH^2 + CH^2$ $= c^2\sin^2 A_1 + b^2 + c^2\cos^2 A_1 + 2bc\cos A_1$ $= b^2 + c^2 + 2bc\cos(\pi - A) = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
اثبات قضیه میانه ها: $2AM^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$	 $c^2 = (\frac{a}{2})^2 + AM^2 - a\times AM\cos\alpha$ $b^2 = (\frac{a}{2})^2 + AM^2 - a\times AM\underbrace{\cos(\pi-\alpha)}_{-\cos\alpha}$ $\Rightarrow b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2$ $\Rightarrow 2AM^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$
اثبات قضیه نیمسازها: حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$	 از نقطه C خطی موازی نیمساز AD رسم می کنیم تا امتداد AB را در E قطع کند طبق قضیه تالس در مثلث BCE داریم : $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD}$ حال کافیست نشان دهیم AE=AC . بنا بر قضیه خطوط موازی $A_1 = E, C = A_2$ در نتیجه $E = C$ و این یعنی مثلث AEC متساوی الساقین است و AE=AC .

قضیه طول نیم ساز	 نیمساز را امتداد می دهیم تا دایره محیطی را در E قطع کند سپس E را به C وصل می کنیم در این صورت $B=E$. دو مثلث ABD و ACE متشابه اند و : $\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AE} \Rightarrow AB.AC=AD.AE \xrightarrow{AE=AD+DE} AB.AC=AD^{۲}+AD.DE$ و به خاطر برخورد دو وتر BC و AE درون دایره داریم : $AD.DE=BD.DC$ از دو رابطه قبل نتیجه می شود : $AB.AC=AD^{۲}+BD.DC \Rightarrow \boxed{AD^{۲}=AB.AC-BD.DC}$
قضیه هرون	$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه هر ۲ ضلع در سینوس زاویه بین آن ها	$S=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}bc\sin A$
اثبات قضیه: مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه هر ۲ ضلع در سینوس زاویه بین آن ها	 ارتفاع وارد بر BC را رسم می کنیم در این صورت $h=b\sin C$ پس : $S=\frac{۱}{۲}ha=\frac{۱}{۲}ab\sin C$