تمرینات کتاب هندسه ۳ : فصل ۱

۱ - اگر $A=\begin{bmatrix} ۵|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۲ \end{bmatrix}$ **در این صورت حاصل** $(|A|^۳-۲)$ **را بیابید.**

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix} ۵|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۲ \end{bmatrix}$$

$$|A|=۲۰|A|^۳-۵|A| \to ۲۰|A|^۳-۶|A|=۰ \to ۲|A|\,(۱۰|A|^۲-۳)=۰$$

$$\to \begin{cases} |A|=۰ \to |A|^۳-۲=-۲ \\ |A|=\pm\dfrac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{+} |A|^۳-۲=\dfrac{۳}{۱۰}\sqrt{\dfrac{۳}{۱۰}}-۲ \\ \xrightarrow{-} |A|^۳-۲=-\dfrac{۳}{۱۰}\sqrt{\dfrac{۳}{۱۰}}-۲ \end{cases} \end{cases}$$

۲ - فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ ۱ & -۵ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ **, یک ماتریس ۲ × ۳ مانند** C **را طوری پیدا کنید که** $A+B-C=O_{۳\times۲}$

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ ۱ & -۵ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

$$A+B-C=O_{۳\times۲} \Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۴ & -۱ \\ ۹ & ۹ \end{bmatrix} \Rightarrow A+B=C$$

$$\Rightarrow C=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۴ & -۱ \\ ۹ & ۹ \end{bmatrix}$$

۳ - قضیه ی ۱ را ثابت کنید.

پاسخ:

اثبات ۱ :

اگر $A=[\,a_{ij}\,]_{m\times n}, B=[\,b_{ij}\,]_{m\times n}$ **باشند داریم:**

$$\begin{cases} A+B=[\,d_{ij}\,]_{m\times n}, d_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \\ B+A=[\,d'_{ij}\,]_{m\times n}, d'_{ij}=b_{ij}+a_{ij} \end{cases} \Rightarrow d_{ij}=d'_{ij} \Rightarrow [\,d_{ij}\,]_{m\times n}=[\,d'_{ij}\,]_{m\times n} \Rightarrow A+B=B+A$$

اثبات ۲ : اگر $A=[\,a_{ij}\,]_{m\times n}, B=[\,b_{ij}\,]_{m\times n}, C=[\,c_{ij}\,]_{m\times n}$ **باشند داریم:**

$$A+B=[\,d_{ij}\,]_{m\times n}=D \qquad d_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

$$B+C=[\,d'_{ij}\,]_{m\times n}=D' \qquad d'_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$$

$$A+(B+C)=A+D'=[\,a_{ij}\,]_{m\times n}+[\,d'_{ij}\,]_{m\times n}=[\,a_{ij}+d'_{ij}\,]=[\,a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}]$$

$$(A+B)+C=D+C=[\,d_{ij}\,]_{m\times n}+[\,c_{ij}\,]_{m\times n}=[\,a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}]_{m\times n}$$

با مقایسه روابط فوق می یابیم:

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

اثبات ۳: اگر $A=[\,a_{ij}\,]_{m\times n}, \bar{O}=[\,e_{ij}\,]_{m\times n}$ **باشد می دانیم** $e_{ij}=۰$ **است.**

$$A+\bar{O}=[\,a_{ij}\,]_{m\times n}+[\,e_{ij}\,]_{m\times n}=[\,a_{ij}+e_{ij}\,]_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}=A$$

اثبات ۴: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ باشد می دانیم $-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$ است.

$$A+(-A)=[a_{ij}]_{m\times n}+[-a_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+(-a_{ij})]_{m\times n}=[۰]_{m\times n}=\bar{O}$$

اثبات ۵:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\Rightarrow rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

$$B=[b_{ij}]_{m\times n}\Rightarrow rB=[rb_{ij}]_{m\times n}$$

$$rA+rB=[ra_{ij}+rb_{ij}]_{m\times n}=[r(a_{ij}+b_{ij})]_{m\times n}$$

از طرفی

$$A+B=[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$
$$\Rightarrow r(A+B)=r[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}=[r(a_{ij}+b_{ij})]_{m\times n}$$

با مقایسه روابط فوق می توان فهمید $r(A+B)=rA+rB$

اثبات ۶:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\Rightarrow (r+s)A=(r+s)[a_{ij}]_{m\times n}$$

$$=[\,(r+s)a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}+sa_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}+[sa_{ij}]_{m\times n}$$

$$=r[a_{ij}]_{m\times n}+s[a_{ij}]_{m\times n}=rA+sA$$

اثبات ۷:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\Rightarrow (rs)A=(rs)[a_{ij}]_{m\times n}$$

$$=[\,(rs)a_{ij}]_{m\times n}=[r(sa_{ij})]_{m\times n}=r[sa_{ij}]_{m\times n}=r(sA)$$

اثبات ۸:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\Rightarrow ۱\times A=۱\times[a_{ij}]_{m\times n}$$

$$=[\,۱\times a_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}=A$$

۴- اگر $A=\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\-۱&۴&۵\\۱&-۳&-۴\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-۱&۳&۵\\۱&-۳&-۵\\-۱&۳&۵\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}۲&-۲&-۴\\-۱&۳&۴\\۱&-۲&-۳\end{bmatrix}$ **نشان دهید** $CA=C, AC=A, AB=BA=O$

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\-۱&۴&۵\\۱&-۳&-۴\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}-۱&۳&۵\\۱&-۳&-۵\\-۱&۳&۵\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}۲&-۲&-۴\\-۱&۳&۴\\۱&-۲&-۳\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\-۱&۴&۵\\۱&-۳&-۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۳&۵\\۱&-۳&-۵\\-۱&۳&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\bar{O}$$

$$AB=BA=O\Longrightarrow$$

$$BA=\begin{bmatrix}-۱&۳&۵\\۱&-۳&-۵\\-۱&۳&۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\-۱&۴&۵\\۱&-۳&-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\bar{O}$$

$$\Rightarrow AB=BA=\bar{O}$$

$$AC=A\Rightarrow AC=\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\-۱&۴&۵\\۱&-۳&-۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۲&-۴\\-۱&۳&۴\\۱&-۲&-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\-۱&۴&۵\\۱&-۳&-۴\end{bmatrix}\Rightarrow AC=A$$

$$CA=C\Rightarrow CA=\begin{bmatrix}۲&-۲&-۴\\-۱&۳&۴\\۱&-۲&-۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\-۱&۴&۵\\۱&-۳&-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&-۲&-۴\\-۱&۳&۴\\۱&-۲&-۳\end{bmatrix}\Rightarrow CA=C$$

۵ - فرض کنید d,c,b,a چهار واحد طول باشد. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است

$$A=\begin{array}{c}\\ a\\ b\\ c\\ d\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}a & b & c & d\end{array}\\ \begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۶ & ۲۴\\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸\\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴\\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱\end{bmatrix}\end{array}$$

بنابراین، یک واحد از a، شش واحد از c است، یک واحد از b هشت واحد از d است، و یک واحد از c نصف واحد از b است. این جدول را به عنوان یک ماتریس در نظر بگیرید و شرح دهید که چرا $a_{ik}a_{kj}=a_{ij}$. آیا می توانید بدون محاسبه ی مستقیم $A^۲$ را پیدا کنید؟

پاسخ:

می د انیم اگر هر واحد از a مساوی m واحد از b باشد پس $a=mb$ ضمناً اگر هر واحد از b مساوی n واحد از c باشد پس $b=nc$ حال از ترکیب روابط فوق می توان فهمید هر واحد از a مساوی mn واحد از c است

$$\begin{cases}a=mb\\ b=nc\end{cases}\Rightarrow a=(mn)c$$

حال در ماتریس داده شده به طور مثال $a_{۱۲}$ یعنی هر واحد از a مساوی چند واحد از b است. و $a_{۲۴}$ یعنی هر واحد از b چند واحد از d است بنابراین $a_{۱۲}\times a_{۲۴}$ یعنی هر واحد از a از چند واحد از d است که این همان مقدار $a_{۱۴}$ می باشد.

پس در حالت کلی می توان گفت $a_{ik}\times a_{kj}=a_{ij}$ حال با توجه به رابطه فوق اگر $A^۲=[m_{ij}]_{۴\times۴}$ باشد

$$m_{ij}=\sum_{k=۱}^{۴}a_{ik}a_{kj}=\sum_{k=۱}^{۴}a_{ij}=۴a_{ij}$$

بنابراین کافی است تک تک درایه های A را در ۴ ضرب کنیم تا درایه های A ایجاد شوند.

۶ - کارخانه ای سه محصول c,b,a را به دو بازار n,m می فروشد. تعداد واحدهای فروخته شده هر محصول در هر بازار در یک سال معین با ماتریس

$$A=\begin{array}{c}\\ m\\ n\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}a & b & c\end{array}\\ \begin{bmatrix}۵۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۵۰۰\\ ۲۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۰۰۰\end{bmatrix}\end{array}$$

نمایش داده شده است. ماتریس های $B=\begin{bmatrix}۲\\ ۴\\ ۳\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}۱/۸\\ ۳/۵\\ ۲/۵\end{bmatrix}$ به ترتیب، قیمت فروش و قیمت تمام شده هر واحد از c,b,a را نشان می دهند. درآیه های هر یک از ماتریس های $AB-AC,AC,AB$ را تعبیر کنید.

پاسخ:

$$AB=\begin{bmatrix}۵۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۵۰۰\\ ۲۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۰۰۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲\\ ۴\\ ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۲۵۰۰\\ ۱۵۰۰۰\end{bmatrix}$$

عدد ۲۲۵۰۰ میزان فروش کل محصولات در بازار m را نشان می دهد و عدد ۱۵۰۰۰ میزان فروش کل محصولات در بازار n را نشان می دهد.

$$AC=\begin{bmatrix}۵۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۵۰۰\\ ۲۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۰۰۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱/۸\\ ۳/۵\\ ۲/۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۹۷۵۰\\ ۱۳۱۰۰\end{bmatrix}$$

عدد ۱۹۷۵۰ میزان قیمت تمام شده محصولات در بازار m و عدد ۱۳۱۰۰ میزان قیمت تمام شده محصولات در بازار n می باشد.

$$AB-AC=\begin{bmatrix}۲۲۵۰\\ ۱۹۰۰\end{bmatrix}$$

می دانیم سود یعنی از قیمت فروش تمام شده را کم می کنیم پس ۲۲۵۰ میزان سود فروش محصولات در بازار m و عدد ۱۹۰۰ میزان سود فروش محصولات در بازار n را نشان می دهد.

۷ - اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$ نشان دهید $A^۲-۴A-۵I_۳=O$،

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\qquad A^۲-۴A-۵I_۳=۰$$

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹ & ۸ & ۸\\ ۸ & ۹ & ۸\\ ۸ & ۸ & ۹\end{bmatrix}$$

$$۴A=\begin{bmatrix}۴&۸&۸\\۸&۴&۸\\۸&۸&۴\end{bmatrix}\qquad ۵I_۳=\begin{bmatrix}۵&۰&۰\\۰&۵&۰\\۰&۰&۵\end{bmatrix}$$

$$A^۲-۴A-۵I_۳=\begin{bmatrix}۹&۸&۸\\۸&۹&۸\\۸&۸&۹\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴&۸&۸\\۸&۴&۸\\۸&۸&۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۵&۰&۰\\۰&۵&۰\\۰&۰&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\bar{O}$$

۸ - اگر $A=\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه ی $A^{۱۰}$.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$
$$A^۲=I\Rightarrow (A^۲)^۵=I^۵\Rightarrow A^{۱۰}=I$$

۹ - اگر $A=\begin{bmatrix}۰&۱&۳\\۰&۰&۴\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$، به کمک محاسبه ی توان های مختلف A، نشان دهید عدد طبیعی n موجود است که $A^n=O$.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۰&۱&۳\\۰&۰&۴\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۰&۱&۳\\۰&۰&۴\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&۳\\۰&۰&۴\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۴\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix}۰&۰&۴\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&۳\\۰&۰&۴\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\Rightarrow A^۳=۰\Rightarrow n=۳$$

در اینجاست ماتریس A را پوچ توان از مرتبه ۳ می گوئیم.

۱۰ - به کمک تمرین قبل $\begin{bmatrix}\sqrt{۳}&-۱\\۱&\sqrt{۳}\end{bmatrix}^{۶۰۰}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}\sqrt{۳}&-۱\\۱&\sqrt{۳}\end{bmatrix}$$
$$A=۲\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲}&-\frac{۱}{۲}\\\frac{۱}{۲}&\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}\cos(\frac{\pi}{۶})&-\sin(\frac{\pi}{۶})\\\sin(\frac{\pi}{۶})&\cos(\frac{\pi}{۶})\end{bmatrix}\Rightarrow A=۲R\frac{\pi}{۶}$$
$$R_\theta^n=R_{n\theta}\Rightarrow A^{۶۰۰}=۲^{۶۰۰}\times R_{۶۰۰\times\frac{\pi}{۶}}=۲^{۶۰۰}\times\underbrace{R_{۱۰۰\pi}}_{R_{۲\pi}}=۲^{۶۰۰}\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=۲^{۶۰۰}I=\begin{bmatrix}۲^{۶۰۰}&۰\\۰&۲^{۶۰۰}\end{bmatrix}$$

۱۱ - فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱&۵&۷\\۲&-۱&۳\\۴&۵&-۲\end{bmatrix}$ مقدار $|A|$ را با بسط دادن نسبت به هر یک از سطرها و ستون ها پیدا کنید. همچنین $|A|$ را به کمک روش ساروس محاسبه کنید.

پاسخ:

سطر اول:

$$۱\times(۲-۱۵)-۵(-۴-۱۲)+۷(۱۰+۴)=-۱۳+۸۰+۹۸=۱۶۵$$

سطر دوم:

$$-۲(-۱۰-۳۵)+(-۱)(-۲-۲۸)-۳(۵-۲۰)=۹۰+۳۰+۴۵=۱۶۵$$

سطر سوم:

$$+۴(۱۵+۷)-۵(۳-۱۴)+(-۲)(-۱-۱۰)=۱۶۵$$

ستون اول:

$$+۱(۲-۱۵)-۲(-۱۰-۳۵)+۴(۱۵+۷)=۱۶۵$$

ستون دوم:

$$-۵(-۴-۱۲)+(-۱)(-۲-۲۸)-۵(۳-۱۴)=۱۶۵$$

ستون سوم:

$$+۷(۱۰+۴)-۳(۵-۲۰)-۲(-۱-۱۰)=۱۶۵$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۵ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۵ & -۲ \end{vmatrix}\begin{vmatrix} ۱ & ۵ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۵ & -۲ \end{vmatrix} = (۲+۶۰+۷۰)-(-۲۸-۲۰+۱۵) = ۱۳۲+۳۳ = ۱۶۵$$

۱۲ – قضیه ی ۲ را ثابت کنید.

پاسخ:

باید $A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳} \end{bmatrix}$ قرار دهیم $|A|, |B|$ را با بسط بیابیم و در یکدیگر ضرب کنیم سپس ماتریس AB را تشکیل دهیم و دترمینان آن را نیز با بسط بیابیم پس از مقایسه آنها خواهیم داشت $|AB| = |A| \times |B|$

۱۳ – فرض کنید بتوان یک ماتریس ۳ × ۳ مانند A را به صورت حاصلضرب یک ماتریس ۲ × ۳ در یک ماتریس ۳ × ۲ نوشت. ثابت کنید $|A| = ۰$.

پاسخ:

فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

$$A = B \times C \Rightarrow |A| = |BC| = \left|\begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} x & y & ۰ \\ p & q & ۰ \\ r & s & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{bmatrix} x & y & ۰ \\ p & q & ۰ \\ r & s & ۰ \end{bmatrix}\right| \left|\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\right| = ۰ \times ۰ = ۰$$

۱۴ – فرض کنید λ, μ دو عدد حقیقی باشند. به کمک ویژگی های دترمینان ها، مقدار دترمینان ماتریس $A = [\lambda i + \mu j]_{۳\times۳}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda+\mu & \lambda+۲\mu & \lambda+۳\mu \\ ۲\lambda+\mu & ۲\lambda+۲\mu & ۲\lambda+۳\mu \\ ۳\lambda+\mu & ۳\lambda+۲\mu & ۳\lambda+۳\mu \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{اضافه می کنیم}]{\text{سطر اول را به سطر سوم}} \begin{vmatrix} \lambda+\mu & \lambda+۲\mu & \lambda+۳\mu \\ ۲\lambda+\mu & ۲\lambda+۲\mu & ۲\lambda+۳\mu \\ ۴\lambda+۲\mu & ۴\lambda+۴\mu & ۴\lambda+۶\mu \end{vmatrix} = ۰$$

اگر در یک ماتریس، دو سطر مساوی داشته باشیم دترمینان آن ماتریس مساوی صفر است.

۱۵ – اگر $A = (a_۱, a_۲), B = (b_۱, b_۲), C = (c_۱, c_۲)$ رووس یک مثلث از صفحه ی $\mathbb{R}^۲$ باشند، ثابت کنید مساحت مثلث ABC برابر است با قدر مطلق مقدار زیر

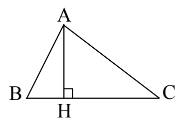
$$\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

پاسخ:

برای پیدا کردن مساحت مثلث ABC باید اندازه قاعده و ارتفاع مثلث را داشته باشیم:

اندازه ارتفاع AH یعنی فاصله A از خط BC

ابتدا معادله خط BC را می نویسیم.



$$\begin{cases} B(b_۱, b_۲) \\ C(c_۱, c_۲) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{c_۲ - b_۲}{c_۱ - b_۱} \\ y - b_۲ = \dfrac{c_۲ - b_۲}{c_۱ - b_۱}(x - b_۱) \Rightarrow (y - b_۲)(c_۱ - b_۱) = (c_۲ - b_۲)(x - b_۱) \end{cases}$$

$$|AH| = \frac{|(a_۲ - b_۲)(c_۱ - b_۱) - (c_۲ - b_۲)(a_۱ - b_۱)|}{\sqrt{(c_۱ - b_۱)^۲ + (c_۲ - b_۲)^۲}} = \frac{|a_۱(b_۲ - c_۲) - b_۱(a_۲ - c_۲) + c_۱(a_۲ - b_۲)|}{\sqrt{(c_۱ - b_۱)^۲ + (c_۲ - b_۲)^۲}}$$

از طرفی $|BC| = \sqrt{(c_۱ - b_۱)^۲ + (c_۲ - b_۲)^۲}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|AH| \times |BC| = \frac{1}{2}|a_1(b_2 - c_2) - b_1(a_2 - c_2) + c_1(a_2 - b_2)|$$

از طرفی حاصل دترمینان داده شده به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_1(b_2 - c_2) - b_1(a_2 - c_2) + c_1(a_2 - b_2)$$

بنابراین نصف این دترمینان با مساحت مثلث برابر است.

۱۶ – نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$ معادله ی خطی است که از نقاط $(c,d),(a,b)$ در $\mathbb{R}^2$ می گذرد.

پاسخ:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow +x(b-d) - y(a-c) + 1(ad - bc) = 0$$
$$\Rightarrow AX + By + C = 0$$

پس معادله داده شده معادله یک خط راست است.

حال وضعیت دو نقطه را در معادله چک می کنیم

$A(a,b) \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$ برقرار است

$B(c,d) \Rightarrow \begin{vmatrix} c & d & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$ برقرار است

پس معادله داده شده معادله یک خط راست است که از دو نقطه $B(c,d), A(a,b)$ عبور می کند.

۱۷ – اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض باشد، حاصل A^3 را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پاسخ:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم اگر $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ آنگاه داریم: $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$

۱۸ – دترمینان ماتریس زیر را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow |A| = \underbrace{(4 - 9 - 8)}_{-13} - \underbrace{(3 - 12 - 8)}_{-17} = 4$$

۱۹ – دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را برحسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پاسخ:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}=d\underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix}}_{\circ}-e\underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix}}_{\circ}+f\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}}_{\circ}=\circ$$

نتیجه: هرگاه دو سطر (یا ستون) در یک ماتریس مانند هم (یا مضربی از هم) باشند حاصل دترمینان صفر است.

۲۰ - اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ به‌طوری‌که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^۲$ در این‌صورت ماتریس A را مشخص کنید.

پاسخ:

$$a_{ij}=\begin{cases} ۷ & i=j \\ i+j & i>j \\ i^۲ & i<j \end{cases}$$

$$A=[a_{ij}]_{۳\times۴}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۴} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۴} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & a_{۳۴} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$$

۲۱ - اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این‌صورت حاصل $x+y+z$ را بیابید.

پاسخ:

$$A=B\to\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{cases} ۲x-y=۳ \\ ۲x+y=۵ \end{cases}\to\begin{matrix} x=۲ \\ y=۱ \end{matrix}$$

$$z=-۲$$

$$\to x+y+z=۲+۱+(-۲)=۱$$

۲۲ - اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

پاسخ:

$$AB=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix}$$

می‌دانیم در ماتریس قطری درایه‌های بیرون قطر اصلی همگی صفر هستند. بنابراین داریم:

$$-۸+۲a=\circ\to a=۴$$

$$b-۳=\circ\to b=۳$$

۲۳ - اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل $A^۳$ و $A^۷$ را بیابید.

پاسخ:

$$A^۲=AA=\begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

$$A^۲=I\xrightarrow{\times A}A^۳=A$$

$$A^۲=I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}}A^۶=I\xrightarrow{\times A}A^۷=A$$

۲۴ - اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$ ثابت کنید.

الف) $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$

ب) $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$

پاسخ:

الف) $(A+B)^۲=(A+B)(A+B)=A^۲+AB+BA+B^۲$

$\xrightarrow{AB=BA}A^۲+۲AB+B^۲$

ب) $(A-B)(A+B)=A^۲+AB-BA-B^۲\xrightarrow{AB=BA}A^۲-B^۲$

۲۵ - با یک مثال نقص نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد. به عبارت دیگر نشان دهید در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

پاسخ:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۸ \end{bmatrix}}_{C}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}\ ,\ AC = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید $AB = AC$ اما $B \neq C$ می‌باشد.

۲۶ – دوماتریس ۳ × ۳ مانند A و B مثال برنید که $A \neq \overline{O}$ و $B \neq \overline{O}$ ولی $AB = \overline{O}$.

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & a & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & c & ۰ \end{bmatrix}\ ,\ B = \begin{bmatrix} d & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ c & f & g \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ۰ & a & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & c & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ c & f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲۷ – وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۲ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

می‌دانیم اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این‌صورت وارون $A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ از رابطهٔ روبه‌رو به‌دست می‌آید. بنابراین:

$$A = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۲ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix} \to A^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۴ & ۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -۱ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

۲۸ – نشان دهید ماتریس $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ است.

پاسخ:

کافیست نشان دهیم: $AB = BA = I$.

$$AB = \begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

۲۹ – قضیهٔ یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود، منحصر به فرد است.

پاسخ:

فرض می‌کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند؛ ثابت می‌کنیم: $B = C$.

طبق فرض : $AB = BA = I$

طبق فرض : $AC = CA = I$

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

۳۰ – دستگاه $\begin{cases} ۳x - ۴y = ۱ \\ -x + ۲y = ۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} ۳x - ۴y = ۱ \\ -x + ۲y = ۱ \end{cases} \to \underbrace{\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}}_{B}$$

$$X = A^{-۱}B$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۶-۴}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \begin{matrix} \to x = ۳ \\ \to y = ۲ \end{matrix}$$

۳۱ – اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $۲A^{-۱} - ۳B^{-۱}$ را بیابید.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۴&۳\\۲&۵\end{bmatrix}\rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix}۵&-۳\\-۲&۴\end{bmatrix}\rightarrow ۲A^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۵}{۷}&-\frac{۳}{۷}\\-\frac{۲}{۷}&\frac{۴}{۷}\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-۲&-۳\\۵&-۱\end{bmatrix}\rightarrow B^{-۱}=\frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix}-۱&۳\\-۵&-۲\end{bmatrix}\rightarrow ۳B^{-۱}=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۱۷}&\frac{۹}{۱۷}\\-\frac{۱۵}{۱۷}&-\frac{۶}{۱۷}\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow ۲A^{-۱}-۳B^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۵}{۷}+\frac{۳}{۱۷}&-\frac{۳}{۷}-\frac{۹}{۱۷}\\-\frac{۲}{۷}+\frac{۱۵}{۱۷}&\frac{۴}{۷}+\frac{۶}{۱۷}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱۰۶}{۱۱۹}&-\frac{۱۱۴}{۱۱۹}\\\frac{۷۱}{۱۱۹}&\frac{۱۱۰}{۱۱۹}\end{bmatrix}$$

۳۲ - دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix}۳&-۵\\۴&۲\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix}۱\\۱۰\end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۳&-۵\\۴&۲\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}۱\\۱۰\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}۳x-۵y=۱\\۴x+۲y=۱۰\end{cases}$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix}۲&۵\\-۴&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۳}&\frac{۵}{۲۶}\\-\frac{۲}{۱۳}&\frac{۳}{۲۶}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}B\rightarrow X=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۳}&\frac{۵}{۲۶}\\-\frac{۲}{۱۳}&\frac{۳}{۲۶}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۳}+\frac{۵۰}{۲۶}\\-\frac{۲}{۱۳}+\frac{۳۰}{۲۶}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۵۲}{۲۶}\\\frac{۲۶}{۲۶}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}\rightarrow\begin{matrix}x=۲\\y=۱\end{matrix}$$

۳۳ - اگر $A=\begin{bmatrix}۵&۲\\۳&۲\end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به‌دست آورده و $|A|$ را با $\left|A^{-۱}\right|$ مقایسه کنید.

پاسخ:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۲&-۲\\-۳&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&-\frac{۱}{۲}\\-\frac{۳}{۴}&\frac{۵}{۴}\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\left|A^{-۱}\right|=(\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۴})-(\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴})\rightarrow\left|A^{-۱}\right|=\frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۴}\ \ (۱)$$

$$|A|=(۵\times ۲)-(۳\times ۲)=۱۰-۶=۴\ \ (۲)$$

$$(۱),(۲)\rightarrow\left|A^{-۱}\right|=\frac{۱}{|A|}$$

۳۴ - روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های دستگاه زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

$$\begin{cases}۳x-۵y=-۱\\۲x+y=۸\end{cases}$$

پاسخ:

$$\begin{cases}۳x-۵y=-۱\\۲x+y=۸\end{cases}\qquad\frac{۳}{۲}\neq-\frac{۵}{۱}$$

پس دستگاه یک جواب منحصربه فرد دارد.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}۳&-۵\\۲&۱\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}-۱\\۸\end{bmatrix}}_{B}\rightarrow\ X=A^{-۱}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} + \frac{40}{13} \\ \frac{2}{13} + \frac{24}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{13} \\ \frac{26}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 \end{matrix}$$

۳۵- به‌ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد؟

پاسخ:

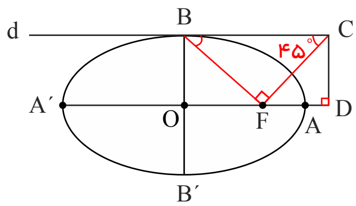
شرط اینکه دستگاه یک جواب داشته باشد این است که ۲ خط متقاطع باشند.

$$\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{k}{1} \neq \frac{3}{-2} \to \boxed{k \neq -\frac{3}{2}}$$

۱ - در بیضی مقابل AA' و BB' در قطراند. خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = ۴۵^\circ$، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به‌دست آورید.



۲ - دو نقطهٔ A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید:

الف) در حالتی که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند باهم موازی‌اند.

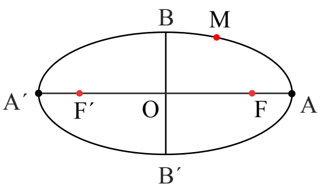
ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.

۳ - نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

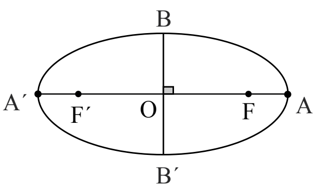
ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ت) طول‌های MF و MF' را به‌دست آورید.

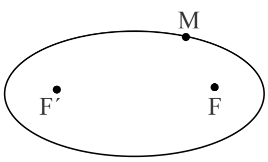


$OA = ۵\,, OB = ۳\,, OF = ۴$

۴ - در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ FBF' چند درجه است؟



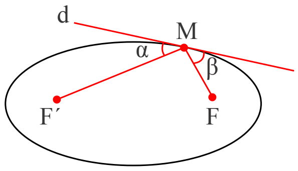
۵ - در شکل مقابل نقطهٔ M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $MF' = MF'$



۶ - ثابت کنید اگر M نقطه‌ای درون بیضی باشد آن‌گاه مجموع فواصل M از دو کانون کمتر از $۲a$ است.

۷ - ثابت کنید اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد آن‌گاه مجموع فواصل M از دو کانون بیشتر از $۲a$ است.

۸ - فرض کنیم خط d مانند شکل مقابل در نقطهٔ M بر بیضی مماس است.



۱ - مجموع فواصل کدام‌یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

۲- دو زاویهٔ α و β نسبت به‌هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۳- اگر بدنهٔ داخلی بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعهٔ نوری بر بدنه داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟

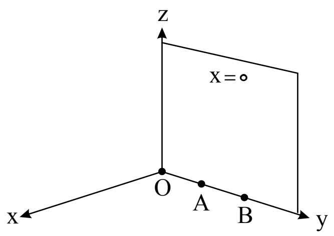
تمرینات کتاب هندسه۳: فصل ۳

۱ - الف) مختصات چند نقطه را مشخص کنید که در رابطهٔ $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ صدق کنند و مکان آن‌ها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

ب) نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادلهٔ $x=۰$ دارد؟

پاسخ:

الف) مختصات چند نقطه که در رابطهٔ $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ صدق کنند عبارتند از: $O(۰,۰,۰), A(۰,۱,۰), B(۰,۲,۰)$ و مکان آن نقاط طبق شکل مقابل روی محور yهاست.



ب) نمودار معادلهٔ $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ یک خط (همان محور yها) است.

$x=۰$ معادلهٔ صفحه‌ای شامل محور yها است. (صفحهٔ $x=۰$ همان صفحهٔ yoz است).

۲ - چهار نقطهٔ $A(۲,۱,۳)$ و $B(-۱,۱,۳)$ و $C(۲,-۱,۳)$ و $D(-۱,-۱,۳)$ مفروضند.

الف) معادلات مشخص‌کنندهٔ سطح محدود به چهارضلعی $ABCD$ را بنویسید.

ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح $ABCD$ هم‌مساحت و موازی هستند را بنویسید.

پاسخ:

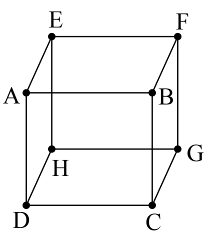
الف) $A(۲,۱,۳)\,, B(-۱,۱,۳)\,, C(۲,-۱,۳)\,, D(-۱,-۱,۳)$

حدود تغییرات طول نقاط، بین ۱− و ۲ و حدود تغییرات عرض نقاط، بین ۱− و ۱ بوده و چهارضلعی $ABCD$ به ارتفاع ۳ قرار دارد. بنابراین:

$$\begin{cases} -۱ \leq x \leq ۲ \\ -۱ \leq y \leq ۱ \\ z=۳ \end{cases}$$

ب) $\begin{cases} -۱ \leq x \leq ۲ \\ -۱ \leq y \leq ۱ \\ z=۱ \end{cases}$ این صفحه، ۲ واحد پایین‌تر از چهارضلعی $ABCD$ است.

۳ - اگر معادلات وجه‌های یک مکعب مستطیل به‌صورت $x=۱$، $x=۳$، $y=۱$، $y=۴$، $z=۲$ و $z=-۲$ باشد،



الف) مختصات رأس‌های این مکعب مستطیل را بنویسید.

ب) در هر یک از شش وجه، مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

پ) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه‌ها قرار گرفته باشند.

ت) معادلات مربوط به یال‌های AB و BF را بنویسید. (دقت کنید یال‌ها پاره‌خط‌اند.)

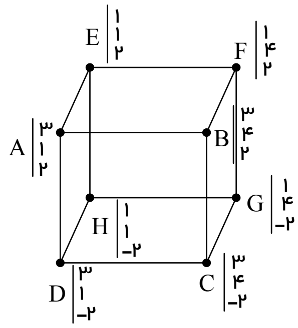
ث) روابط مشخص‌کنندهٔ دو وجه $ADHE$ و $EFGH$ را بنویسید.

ج) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد.

چ) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که روی یکی از وجه‌های آن و غیرواقع بر یال‌ها باشد.

پاسخ: الف)

$$\begin{cases} ABCD \ \text{وجه} \ : x = ۳ \ , \ EFGH \ \text{وجه} \ : \ x = ۱ \\ ADHE \ \text{وجه} \ : y = ۱ \ , \ BCGF \ \text{وجه} \ : \ y = ۴ \\ CDHG \ \text{وجه} \ : z = -۲ \ , \ ABFE \ \text{وجه} \ : \ z = ۲ \end{cases}$$



نقطهٔ A بر سه وجه $ABCD$ و $ADHE$ و $ABEF$ قرار دارد پس مختصات A برابر است با: $A \left| \begin{matrix} ۳ \\ ۱ \\ ۲ \end{matrix} \right.$

به همین ترتیب مختصات بقیه رأس‌ها به‌دست آمده است.

ب)

$$\begin{cases} x = \underline{\underline{۱}} \to (\underline{\underline{۱}}, ۲, ۱) \ , \ x = \underline{\underline{۳}} \to (\underline{\underline{۳}}, ۲, ۰) \ , \ y = \underline{\underline{۱}} \to (۲, \underline{\underline{۱}}, -۱) \\ y = \underline{\underline{۴}} \to (۲, \underline{\underline{۴}}, ۱) \ , \ z = \underline{\underline{۲}} \to (۲, ۳, \underline{\underline{۲}}) \ , \ z = \underline{\underline{\underline{-۲}}} \to (۲, ۲, \underline{\underline{\underline{-۲}}}) \end{cases}$$

پ) نقطهٔ $(\underline{\underline{۱}}, \underline{\underline{۴}}, ۱)$ فقط بر دو وجه $x = \underline{\underline{۱}}$ و $y = \underline{\underline{۴}}$ قرار دارد یعنی روی فصل مشترک آن‌ها یعنی روی یال FG قرار دارد.

و نقطهٔ $(\underline{\underline{۳}}, ۲, \underline{\underline{۲}})$ فقط بر دو وجه $x = ۳$ و $z = ۲$ قرار دارد و نقطهٔ $(۲, \underline{\underline{۴}}, \underline{\underline{\underline{-۲}}})$ بر دو وجه $y = \underline{\underline{۴}}$ و $z = \underline{\underline{\underline{-۲}}}$ قرار دارد.

ت)

$$AB \ \text{معادلهٔ خط} : \begin{cases} x = ۳ \\ z = ۲ \end{cases} \Rightarrow (AB \ \text{پاره‌خط}) \ AB \ \text{یال} : \begin{cases} x = ۳ \\ z = ۲ \\ ۱ \leq y \leq ۴ \end{cases} \qquad BF \ \text{خط} : \begin{cases} y = ۴ \\ z = ۲ \end{cases} \Rightarrow BF \ \text{یال} : \begin{cases} y = ۴ \\ z = ۲ \\ ۱ \leq x \leq ۳ \end{cases}$$

ث)

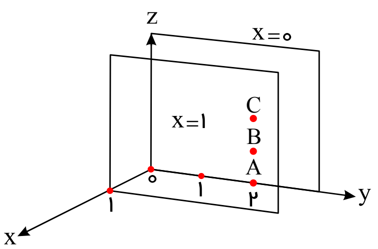
$$\begin{cases} ۱ \leq y \leq ۴ \\ -۲ \leq z \leq ۲ \\ x = ۱ \end{cases} : EFGH \ \text{و وجه} \ \begin{cases} ۱ \leq x \leq ۳ \\ -۲ \leq z \leq ۲ \\ y = ۱ \end{cases} : ADHE \ \text{وجه}$$

ج) $(۲, ۳, ۱)$ درون مکعب قرار دارد.

چ) $(۲, ۲, ۲)$ روی وجه $z = ۲$ قرار دارد که روی هیچ یالی قرار نگرفته است.

۴- بر روی صفحهٔ $x = ۱$ نقاطی را که مؤلفهٔ دوم آن‌ها ۲ است، مشخص نمایید و شکل حاصل از این نقاط را توصیف نمایید و معادلات مربوط به آن را بنویسید.

پاسخ: بر روی صفحهٔ $x = ۱$، سه نقطه مانند $A(۱, ۲, ۰)$، $B(۱, ۲, ۱)$ و $C(۱, ۲, ۲)$ که مؤلفهٔ دوم آن‌ها ۲ است، در نظر گرفتیم. بدیهی است این نقاط روی خطی به موازات محور zها قرار می‌گیرد و معادلات آن‌ها به‌صورت زیر است:



$$\begin{cases} x = ۱ \\ y = ۲ \end{cases}$$

در واقع اگر صفحهٔ $y = ۲$ که موازی صفحهٔ xoz (یا $y = ۰$) است، رسم شود، فصل مشترک آن با صفحهٔ $x = ۱$ همان خط مورد نظر می‌باشد.