مقدمه

خداوند منّان را شاکریم که بار دیگر توان و توفیق نوشتن کتابی در مورد هندسه را به ما عنایت فرمود.

پس از تألیف کتاب هندسهٔ یازدهم، بر آن شدیم تا کتابی تحت عنوان هندسهٔ جامع (هندسه ۱، ۲ و ۳) تألیف نماییم، که دربرگیرندهٔ کلیهٔ نیازهای داوطلبان کنکور رشتهٔ ریاضی باشد. تغییرات بنیادین و بسیار بجا در کتاب‌های هندسه نظام جدید آموزشی و اهمیت این درس، در بین تمام محافل آموزشی و داوطلبان کنکور مشهود است. همچنین تعداد تست‌های موجود در کنکور سراسری که از کتاب‌های هندسه ۱، ۲ و ۳ مطرح می‌شود، جای خالی کتابی جامع در این زمینه را به خوبی نشان می‌دهد.

اما در مورد ویژگی‌های کتاب حاضر مطالبی در ادامه مطرح می‌شود:

۱) در قسمت درسنامه، سعی کرده‌ایم تا حد ممکن مطالب مربوط به هر درس به صورت جامع و موجز ارائه گردد و از آوردن اثبات‌ها خودداری شده است. مگر در معدود مواردی که ارائهٔ اثبات در فهم بهتر مطلب کمک نماید، به اثبات پرداخته‌ایم.

۲) تست‌های مطرح شده در درسنامه‌ها، دربرگیرندهٔ تمام مثال‌ها و تمرین‌های کتاب‌های درسی می‌باشند، پس از آن‌ها، تست‌هایی شبیه‌سازی شده ارائه گردیده است تا مهارت داوطلبان در زمینهٔ پاسخ‌گویی به این‌گونه تست‌ها بیشتر شود.

۳) پرسش‌های چهار گزینه‌ای ارائه شده در انتهای هر فصل، شامل تست‌های مهم و هماهنگ با کتاب‌های درسی جدید در مقاطع دهم، یازدهم و دوازدهم رشتهٔ ریاضی هستند. این تست‌ها دربرگیرندهٔ کلیهٔ پرسش‌های کنکورهای سراسری، آزمون‌های مختلف و تست‌های تألیفی می‌باشند.

۴) پاسخ تشریحی ارائه شده برای پرسش‌های چهار گزینه‌ای، تا حد ممکن به صورت توضیحی و در بسیاری موارد، برحسب نیاز، به صورت تصویرهای مرحله‌ای می‌باشند.

۵) در انتهای پرسش‌های چهار گزینه‌ای هر فصل، تست‌هایی برای چالش بیشتر، تحت عنوان «برای ۱۰۰ درصد» ارائه شده است.

۶) آزمون‌های مطرح شده در انتهای هر فصل، جهت سنجش داوطلب، دربرگیرندهٔ تمام مطالب مربوط به درس یا فصل مربوطه است.

سپاس از

- در پدید آمدن این اثر افراد بسیاری سهیم هستند. بر خود لازم می‌دانیم سپاس بی‌انتهای خود را تقدیم افرادی کنیم که به‌طور مستقیم و غیرمستقیم ما را در به ثمر رساندن این مجموعه یاری نموده‌اند:
- **جناب آقای احمد اختیاری**، مدیریت محترم انتشارات مهروماه که همواره پشتیبانی خود را از ما دریغ نکرده‌اند و در تمام مشکلات با روحیه‌ای وصف‌ناپذیر همراه ما بوده‌اند.
- **جناب آقای محمدحسین انوشه** مدیر شورای تألیف که زحمات زیادی را متقبل می‌شوند.

- **جناب آقای مهندس عباس اشرفی**، مدیر محترم گروه ریاضی که در تمام مراحل یار و یاور ما بوده‌اند و افتخار دوستی و همکاری با ایشان برایمان بسیار مغتنم است.
- دوست گرامی **جناب آقای مهندس محمد خندان**، که در تألیف این کتاب همراه ما بودند و به ویژه در آماده‌سازی فصل چهارم و نیز تعدادی از تست‌ها زحمات زیادی را متقبل شدند.
- **سرکار خانم سنور حریری**، مسئول محترم ویراستاری، **خانم‌ها جمیله صادقی**، **الهام جعفری**، **فاطمه زارع** و **آقایان حامد شفیعی**، **احسان لعل** و **علی شهبازی** که زحمت ویراستاری و نمونه‌خوانی متن‌ها را به عهده داشتند.
- **سرکار خانم سمیه جباری**، مدیر توانمند واحد تولید، به همراه گروه بسیار حرفه‌ای و مسلط در امر تایپ، رسم شکل‌ها و صفحه‌آرایی تمام همت خود را به کار بسته‌اند؛ به ویژه **خانم‌ها الهام پیلوایه** و **رؤیا طبسی** (در قسمت صفحه‌آرایی با دستان توانمندشان)، **خانم‌ها مینا محمدلو**، **فرحناز قاسمی** و **جناب آقای صمد ذوالفقاری** (تایپیست‌های مسلط و شکیبا) **سرکار خانم هستی فرهادپور** و **جناب آقای مرتضی ضیایی** (رسام‌های هنرمند) و **سرکار خانم زهرا فریدونی** (هماهنگ کنندهٔ امر تولید با پشتکار ستودنی).
- **جناب آقای محسن فرهادی** مدیر محترم واحد هنری و همکاران خوبشان که دستی توانمند در تهیهٔ تصاویر داخل کتاب و طراحی جلد دارند و همواره ما را رهین منّت خویش نموده‌اند.
- **جناب آقای امیر انوشه** مسئول محترم واحد سایت و همکاران محترمشان به جهت سعی وافر در شناساندن کتاب در فضای مجازی
- **خانم‌ها فرزانه قنبری** مدیر روابط عمومی و **ساره کفاش‌زاده** به‌خاطر هماهنگی‌های لازمه و زحمات فراوانشان

و اما

هرچه هست از قامت ناساز بی‌اندام ماست

- در انتها از تمام کسانی که این کتاب را مورد مطالعه قرار می‌دهند صمیمانه درخواست می‌کنیم که کاستی‌های این کتاب را، چه در صورت و چه در محتوا، به ما گوشزد نمایند و نظرات سازندهٔ خود را آشکار سازند تا بتوانیم در چاپ(های) بعدی آن‌ها را برطرف نماییم. اهل دانش نیک می‌دانند که راه پویش علمی، نیازمند اصلاح و تغییر همیشگی است.

در آخر کتاب را در سهم خود به جوانان عزیز این مرز و بوم تقدیم می‌کنیم و تمام تلاشمان بر آن بوده است که نیازهای علمی این عزیزان برطرف گردد و هر آینه اگر این سعی‌مان هوده باشد، خوشا...

زمانه قرعهٔ نو می‌زند به نام شما   خوشا شما که جهان می‌رود به کام شما

تابستان ۹۷

مقدمه / ویرایش جدید

آفریدگار دانا را سپاسگزاریم که فرصت ارائه ویراستی نو از کتاب حاضر را به مؤلفین عطا فرمود. در این ویراست، تغییرات زیر، اعمال شده است.

- درسنامه‌های کتاب تا حد ممکن مطابق نظام جدید آموزشی گردیده و مطالب حشو حذف شده است.
- مجموعهٔ سؤال‌های چهارگزینه‌ای، با حذف سؤال‌های ضعیف‌تر و قدیمی و افزودن تعدادی سؤال جدید و مفهومی، از غنای بیشتری برخوردار شده است.
- اشتباهات چاپی و علمی کتاب، هر آن‌چه که توسط خوانندگان تیزبین، ویراستاران با دقت و همکاران گرانقدر و دلسوز گوشزد شده و تا جایی که به چشم مؤلفین آمده، برطرف گردیده است.
- سؤال‌های کنکور سال ۱۳۹۸ رشتهٔ ریاضی داخل و خارج از کشور، همراه با پاسخ تشریحی در کتاب درج شده است.

در به ثمر رسیدن این ویراست بر خود لازم می‌دانیم از افرادی که به‌طور مستقیم و غیرمستقیم ما را یاری کرده‌اند، قدردانی کنیم، سپاس ویژهٔ خود را تقدیم می‌کنیم به:

- جناب آقای **احسان لعل**، که مسئولیت ویراستاری گروه ریاضی را بر عهده دارند.
- آقایان **وحید جعفری و امیرحسین عباسی**، که با صبر و پشتکار ستودنی، زحمت ویراستاری صوری و محتوایی این کتاب را برعهده گرفتند و تمام هماهنگی‌های لازم را با بخش تولید، به خوبی انجام دادند.
- مدیر محترم واحد تولید سرکار خانم **مریم تاجداری**، همکار محترم‌شان جناب **آقای میلاد صفایی** و صفحه‌آرای توانا خانم **رویا طبسی** و رسام‌های پرتلاش، سرکار خانم **مریم صابری‌برون**، **میترا میرمصطفی** که زحمات وصف‌ناپذیری را متحمل شدند.

در انتها از تمامی کسانی که این کتاب را مورد مطالعه قرار می‌دهند، تقاضا داریم که ما را از انتقادها و پیشنهادهای سازنده و به‌جای خود برخوردار نمایند و ارائه خدمتی هرچند ناچیز به جوانان این مرز و بوم، چراغ راه مؤلفین باشند.

تابستان ۱۴۰۰

استادان مشاور کتاب که از نظرات ارزندهٔ آن‌ها در ویرایش جدید کتاب استفاده نموده‌ایم: (به ترتیب حروف الفبا)

حسین بسطام، سید مسعود طایفه، مهدی عبدالهی، مجید محمدی و رضا مهربانی

فهرست

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

ماتریس

ماتریس یک جدول مستطیل شکل از اعداد حقیقی است، (ماتریس را آرایهٔ مستطیل‌شکل نیز می‌نامند.) که اگر دارای m سطر و n ستون باشد، آن را ماتریس از مرتبهٔ $m\times n$ (m در n) می‌گوییم.

برای نمونه:

$B=\begin{bmatrix} ۵ & \sqrt{۲} \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس ۲×۲ است. (زیرا دو سطر و دو ستون دارد)

$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۱ \\ ۴ & ۰ & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس ۲×۳ است. (زیرا دو سطر و سه ستون دارد)

$D=\begin{bmatrix} ۱/۲ & ۵ \\ -۱ & ۴ \\ ۷ & ۱۰۰ \end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس ۳×۲ است. (زیرا سه سطر و دو ستون دارد)

$C=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -\frac{۴}{۳} \end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس ۱×۳ است. (زیرا یک سطر و سه ستون دارد)

$E=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس ۳×۱ است. (زیرا سه سطر و یک ستون دارد)

تذکر: معمولاً مرتبهٔ ماتریس را در کنار آن می‌نویسند.

درایه

هر عضو ماتریس را یک درایه می‌نامند. هر درایه در یک سطر و در یک ستون مشخص قرار گرفته است، که این دو عدد (عدد سطر و عدد ستون)، در کنار هم آدرس درایه را مشخص می‌سازند. درایهٔ واقع در سطر iام و ستون j ام ماتریس A را به‌صورت a_{ij} نشان می‌دهیم.

درایهٔ واقع در سطر i و ستون j: a_{ij} (سطر، ستون)

برای نمونه: در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۵ \\ \sqrt{۳} & ۷ & ۰ \end{bmatrix}$، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول برابر با $\sqrt{۳}$ است، بنابراین $a_{۲۱}=\sqrt{۳}$.

نتیجه: معمولاً اگر بخواهیم یک ماتریس را به‌صورت یک آرایه مستطیل شکل در حالت کلی نشان دهیم، از آدرس درایه‌ها کمک می‌گیریم.

برای نمونه:

$C=[c_{۱۱} \quad c_{۱۲} \quad \underset{}{\overset{\text{درایهٔ واقع در سطر ۱ و ستون ۳}}{c_{۱۳}}}]_{۱\times۳}$

$B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{bmatrix}_{۲\times۲}$ ($b_{۲۱}$: درایهٔ واقع در سطر ۲ و ستون ۱)

$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}_{۲\times۳}$ ($a_{۱۲}$: درایهٔ واقع در سطر ۱ و ستون ۲)

نمایش فشردهٔ ماتریس

ماتریس A را به‌طور کلی می‌توان به‌صورت فشردهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش داد، که در آن a_{ij} نمایندهٔ تمام درایه‌های ماتریس A است و مرتبهٔ ماتریس $m\times n$ می‌باشد. بنابراین $۱\leq i\leq m$ و $۱\leq j\leq n$ است. به عبارت دیگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون می‌باشد.

برای نمونه: ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix}_{۳\times۲}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، ماتریس A دارای سه سطر و دو ستون است.

تذکر: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر است، ماتریس صفر نامیده می‌شود و با نماد $\bar{O}$ نشان داده می‌شود. گاهی اوقات ماتریس صفر مرتبهٔ $m\times n$ به‌صورت $\bar{O}_{m\times n}$ نمایش داده می‌شود، پس: $\bar{O}_{m\times n}=[۰]_{m\times n}$

تست: اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$، با $a_{ij}=i+j^۲$ تعریف شده باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰

۳) ۱۶ ۴) ۱۴

پاسخ گزینه ۳ واضح است که ماتریس A از مرتبهٔ ۲×۲ است، یعنی دو سطر و دو ستون دارد، پس $۱\le i\le ۲$ و $۱\le j\le ۲$ می‌باشد، پس:

	ستون اول $\downarrow j=۱$	ستون دوم $\downarrow j=۲$
سطر اول $\xrightarrow{i=۱}$	$a_{۱۱}=۱+۱^۲=۲$	$a_{۱۲}=۱+۲^۲=۵$
سطر دوم $\xrightarrow{i=۲}$	$a_{۲۱}=۲+۱^۲=۳$	$a_{۲۲}=۲+۲^۲=۶$

بنابراین ماتریس A عبارت است از $A=\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}$ و جمع درایه‌های آن ۱۶ است.

تساوی دو ماتریس

۱ دو ماتریس باید هم‌مرتبه باشند. ۲ درایه‌ها نظیر به نظیر مساوی باشند.

بنابراین اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ دو ماتریس $m\times n$ با نمایش فشرده باشند، آن‌گاه:
$A=B\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$
$(\forall i,j;۱\le i\le m\wedge ۱\le j\le n)$

تست: اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۶ & ۵x-y\\ -x^۲+x & ۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x^۲-۵x & ۲x+y\\ -۲ & ۵\end{bmatrix}$ مساوی باشند، آن‌گاه $x+y$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ گزینه ۱ درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر مساوی قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{cases}x^۲-۵x=-۶\Rightarrow x^۲-۵x+۶=۰\Rightarrow (x-۲)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۲,۳\\ -۲=-x^۲+x\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\Rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۲,-۱\end{cases}$$

بنابراین اشتراک جواب‌ها، $x=۲$ است. همچنین داریم:
$$۲x+y=۵x-y\xrightarrow{\text{ساده‌سازی}}۳x=۲y\xrightarrow{x=۲}y=۳$$
پس $x+y=۵$ است.

ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

عدد در تک‌تک درایه‌های ماتریس ضرب می‌شود.

به عبارت دیگر اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش فشرده ماتریس دلخواه A باشد و $r\in\mathbb{R}$، آن‌گاه $rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$. یعنی عدد حقیقی r در تک‌تک درایه‌های ماتریس A ضرب می‌شود. پس rA ماتریسی هم‌مرتبه با ماتریس A است.

برای نمونه:
$$A=\begin{bmatrix}۵ & -۱ & ۴\\ ۰ & ۳ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow ۳A=\begin{bmatrix}۳\times۵ & ۳\times(-۱) & ۳\times۴\\ ۳\times۰ & ۳\times۳ & ۳\times۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۵ & -۳ & ۱۲\\ ۰ & ۹ & ۶\end{bmatrix}$$

تذکر:

۱ همان‌طور که می‌توان یک عدد حقیقی را در ماتریس دلخواه A ضرب کرد، به همان ترتیب می‌توان یک عدد را از تمام درایه‌های ماتریس A فاکتور گرفت.

برای نمونه:
$$A=\begin{bmatrix}۲ & -۶\\ ۸ & ۱۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\times۱ & ۲\times(-۳)\\ ۲\times۴ & ۲\times۶\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۴ & ۶\end{bmatrix}$$

۲ اگر یک ماتریس را در عدد (۱−) ضرب کنیم، تمام درایه‌های آن قرینه می‌شوند و ماتریس حاصل، **ماتریس قرینه** نامیده می‌شود.

به عبارت دیگر قرینهٔ ماتریس A، که با $-A$ نشان داده می‌شود، ماتریسی است هم‌مرتبه با A که تمام درایه‌های آن نظیر به نظیر قرینهٔ درایه‌های ماتریس A هستند.

بنابراین:
$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\Leftrightarrow -A=[-a_{ij}]_{m\times n}$$

برای نمونه:
$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۴ & -۱\\ ۰ & -۵ & ۳\\ ۱ & ۶ & ۷\end{bmatrix}\Rightarrow -A=\begin{bmatrix}-۲ & -۴ & +۱\\ ۰ & +۵ & -۳\\ -۱ & -۶ & -۷\end{bmatrix}$$

ویژگی‌های ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r، s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه ویژگی‌های زیر برقرار است:

۱) $r(sA)=s(rA)=(rs)A$ ۲) $(r\pm s)A=rA\pm sA$ ۳) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

۴) $rA=rB \xleftrightarrow{r\neq ۰} A=B$ ۵) $rA=\bar{O} \Leftrightarrow (r=۰ \ \vee \ A=\bar{O})$

جمع (تفریق) دو ماتریس

۱) دو ماتریس باید هم‌مرتبه باشند. ۲) درایه‌ها نظیر به نظیر جمع (تفریق) می‌شوند.

بنابراین اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ دو ماتریس $m\times n$ با نمایش فشرده باشند، آن‌گاه:

$$A\pm B=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}$$
$$(\forall i,j;\ ۱\leq i\leq m \ \wedge \ ۱\leq j\leq n)$$

برای نمونه:

$$\begin{cases} A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \\ B=\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۷ & ۱ \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} \overset{a_{۱۱}\ \ b_{۱۱}}{۳+۵} & \overset{a_{۱۲}\ \ b_{۱۲}}{(-۵)+(-۳)} \\ \underset{a_{۲۱}\ \ b_{۲۱}}{۱+(-۷)} & \underset{a_{۲۲}\ \ b_{۲۲}}{۲+۱} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & -۸ \\ -۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۰ & -۳ \\ -۲ & ۱ & ۶ & -۲ \end{bmatrix} \\ B=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ & -۲ & ۱ \\ ۵ & -۳ & ۱ & ۷ \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A-B=\begin{bmatrix} ۱-۴ & ۷-۳ & ۰-(-۲) & (-۳)-۱ \\ -۲-۵ & ۱-(-۳) & ۶-۱ & -۲-۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳ & ۴ & ۲ & -۴ \\ -۷ & ۴ & ۵ & -۹ \end{bmatrix}$$

ویژگی‌های جمع دو ماتریس

اگر A، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه ویژگی‌های زیر در جمع ماتریس‌ها برقرار است:

۱) جابه‌جایی	$A+B=B+A$
۲) وجود عضو بی‌اثر (ماتریس صفر)	$A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$
۳) وجود عضو قرینه	$A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$
۴) شرکت‌پذیری	$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$
۵) حذف‌پذیری	$A+B=A+C \Rightarrow B=C$

چند ماتریس خاص

۱) ماتریس سطری

ماتریسی است که یک سطر و تعدادی ستون دارد. شکل کلی آن عبارت است از:

$$A=[a_{۱۱} \ \ a_{۱۲} \ \ \dots \ \ a_{۱n}]_{۱\times n}$$

برای نمونه: $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ یک ماتریس سطری (از مرتبهٔ ۳×۱) است.

۲) ماتریس ستونی

ماتریسی است که تعدادی سطر و یک ستون دارد. شکل کلی آن عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ \vdots \\ a_{m۱} \end{bmatrix}_{m\times ۱}$$

برای نمونه: $A=\begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس ستونی (از مرتبهٔ ۱×۲) است.

۳) ماتریس مربعی

ماتریسی است که تعداد سطرها و تعداد ستون‌های آن برابر است. شکل کلی آن عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & & & \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

برای نمونه: $A=\begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$، یک ماتریس مربعی (از مرتبهٔ ۲×۲) است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

—۵—

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

۱. ماتریس A از مرتبهٔ n مفروض است. اگر تمام درایه‌های این ماتریس برابر ۱ باشد، نسبت مجموع درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی این ماتریس، به مجموع درایه‌های قطر اصلی آن کدام است؟

۱) n ۲) $\frac{n}{2}$ ۳) $\frac{n+1}{2}$ ۴) $\frac{n-1}{2}$

۲. ماتریس $A=[a_{ij}]_{5\times5}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases}2i-j & ; \ i=j \\ \dfrac{2x^2-9x+4}{2x^2-12x+4} & ; \ i\neq j\end{cases}$ مفروض است. اگر این ماتریس، قطری باشد، چند مقدار برای x موجود است؟

۱) یک ۲) دو ۳) بی‌شمار ۴) هیچ

۳. اگر $\begin{bmatrix}x^2+2 & 4\\ 2x-y & -y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x & -x^2+5x\\ 2x+y & -y\end{bmatrix}$ باشد. $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۴. اگر $A=[j^2+2i]_{2\times3}$ ، $B=[i^3-j]_{2\times3}$ باشد، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $-B+2A$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۲۳ ۴) ۲۱

۵. اگر $A=\begin{bmatrix}5 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 6\\ 0 & 5 & -2 & 4\\ -2 & 1 & 1 & -6\end{bmatrix}$ و $C=A\cdot B$ باشند، آن‌گاه درایهٔ c_{24} کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) صفر

۶. اگر $A=\begin{bmatrix}5 & -1\\ 2 & 6\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 5 & -6 & 7 & 10\end{bmatrix}$ و $C=AB$ باشند، آن‌گاه مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس C کدام است؟

۱) ۴۷ ۲) ۸۳ ۳) ۱۰۲ ۴) ۱۳۱

۷. اگر $M=\begin{bmatrix}5 & -1 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}$ و $N=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 0 & 7\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ باشند، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس $N\cdot M$ کدام ست؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۸. حاصل‌ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 2\\ -7\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $[-20]$ ۲) $\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ ۳) I_3 ۴) $\begin{bmatrix}10 & -5 & 20\\ 4 & -2 & 8\\ -14 & 7 & -28\end{bmatrix}$

۹. اگر $A=\begin{bmatrix}c & 5\\ 3 & a\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ b & 7\end{bmatrix}$ و $AB=BA$ باشد. آن‌گاه $c-a$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۵- ۳) ۲۰- ۴) ۲۰

۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ a & b\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند. در این‌صورت $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۲-

۱۱. اگر حاصل‌ضرب $\begin{bmatrix}-2a & -2\\ 2 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & -2\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، در این‌صورت $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲. به ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{bmatrix}x & -1 & 4\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\\ y & 1\end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $x=1 , y=-7$ ۲) $x=2 , y=-7$ ۳) $x=2 , y=-5$ ۴) $x=1 , y=-5$

۱۳. ماتریس‌های $B=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر ماتریس A در رابطهٔ $C=AB$ صدق کند، مجموع درایه‌های این ماتریس کدام است؟

۱) -7 ۲) 8 ۳) هر مقدار حقیقی ۴) ماتریسی مثل A وجود ندارد.

۱۴. بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A از معادلهٔ $A\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) $\frac{9}{5}$ ۳) $\frac{7}{10}$ ۴) $-\frac{1}{5}$

۱۵. از رابطهٔ ماتریسی $[x\ \ 2x\ \ -1]\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2x\\ -1\end{bmatrix}=0$، عدد غیرصفر x، کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۱۶. در معادلهٔ ماتریسی $[x\ \ 2\ \ 1]\begin{bmatrix}x & -1 & 1\\ 2 & x & 2\\ -1 & 1 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ x\\ -1\end{bmatrix}=\bar{o}$، مجموع جواب‌های x کدام است؟ $(x\in\mathbb{R})$

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) -1

۱۷. اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\times A\times\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}d & c\\ b & a\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}c & d\\ b & a\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-d & -c\\ -b & -a\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-c & -d\\ -b & -a\end{bmatrix}$

۱۸. ماتریس‌های مربع A و B از مرتبهٔ ۳ مفروض‌اند. اگر حاصل جمع درایه‌های واقع در ستون‌های هریک از آن‌ها برابر ۱ باشد، مجموع درایه‌های واقع در ماتریس AB کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۲۷

۱۹. ماتریس‌های مربعی A و B مفروض‌اند. اگر $A^2=A$, $B^2=B$ باشند و داشته باشیم $AB=BA$، در آن‌صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $(A+B-AB)^2=A^2+B^2+A^2B^2$ ۲) $(A+B-AB)^2=-A-B+AB$

۳) $(A+B-AB)^2=A-B-AB$ ۴) $(A+B-AB)^2=A+B-AB$

۲۰. ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبهٔ A و B مفروض‌اند. اگر $AB=A$ و $BA=B$ باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) $A^2-B^2=A+B$ ۲) $A^2=B^2$ ۳) $A^2+B^2=A+B$ ۴) $A^3=B^3$

۲۱. مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 & 100\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۵۰۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۹۹ ۴) ۱۰۱

۲۲. اگر $A^2=A$ و $B=2A-I$، در این‌صورت A^3+B^3 کدام است؟

۱) $2A+B$ ۲) $A+2B$ ۳) $A+B$ ۴) $A-B$

۲۳. اگر $\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 2\end{bmatrix}\times A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ 3 & 1 & -1\\ d & e & f\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) -3 ۴) -6

۲۴. اگر $A^2=5A-2I$، آن‌گاه A^3 کدام است؟

۱) $23A-10I$ ۲) $25A-10I$ ۳) $27A-10I$ ۴) $25A-12I$

۲۵. اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و $AB^2=B^2A$، آن‌گاه به‌ازای کدام مقدار حقیقی k رابطهٔ $AB=kBA$ برقرار است؟

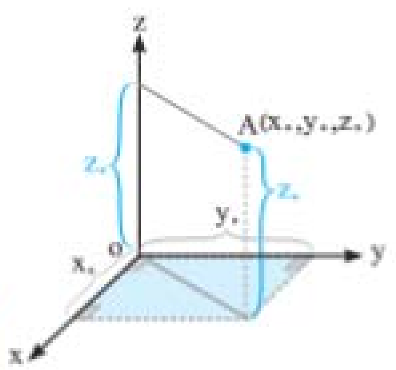
۱) فقط -1 ۲) ± 1 ۳) فقط ۱ ۴) هر مقدار دلخواه مخالف صفر

۲۶. ماتریس‌های مربعی A و B مفروض‌اند. اگر $BA=-AB$ باشد، ماتریس A^2B-BA^2 کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) AB ۲) BA ۳) $\bar{O}$ ۴) I

۲۷. اگر برای دو ماتریس A و B بدانیم $AB-BA=I$ آن‌گاه حاصل AB^2-B^2A برابر کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) $2I$ ۳) $2A$ ۴) $2B$



نکته:

۱) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$:

الف) از صفحهٔ xoy برابر است با $|z_0|$.

ب) از صفحهٔ xoz برابر است با $|y_0|$.

پ) از صفحهٔ yoz برابر است با $|x_0|$.

فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ xoy، زیرا طول عمود رسم شده از نقطهٔ A بر صفحهٔ xoy را نشان می‌دهد.

ترفند محاسباتی: فاصلهٔ یک نقطه در فضا، از هر صفحهٔ مختصات با قدرمطلق مؤلفهٔ غایبِ آن صفحه برابر است.

برای نمونه: فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,۵,-۴)$ از صفحهٔ xoy برابر است با $۴=|-۴|$.

تست: **چند نقطه در فضا وجود دارد که فاصله‌اش از صفحه‌های yoz ، xoz و xoy به‌ترتیب ۵ ، ۲ و ۳ باشد؟**

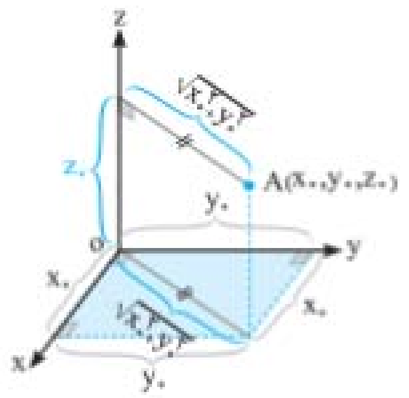
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ **گزینه ۴** اگر نقطهٔ موردنظر را (x_0, y_0, z_0) در نظر بگیریم، با توجه به فرض داده‌شده، از آن‌جایی که فاصلهٔ این نقطه از صفحه‌های yoz ، xoz و xoy به‌ترتیب ۵ ، ۲ و ۳ است، پس:

$$\begin{cases} |x|=۵ \Rightarrow x=\pm ۵ \\ |y|=۲ \Rightarrow y=\pm ۲ \\ |z|=۳ \Rightarrow z=\pm ۳ \end{cases}$$

بنابراین برای هر مؤلفهٔ این نقطه دو مقدار (دو حالت) وجود دارد و لذا طبق اصل ضرب، برای این نقطه، $۲\times۲\times۲=۸$ حالت مختلف می‌توان یافت. این ۸ حالت عبارت‌اند از:

$$(۵,۲,۳) \ , \ (۵,۲,-۳) \ , \ (۵,-۲,۳) \ , \ (۵,-۲,-۳)$$
$$(-۵,۲,۳) \ , \ (-۵,۲,-۳) \ , \ (-۵,-۲,۳) \ , \ (-۵,-۲,-۳)$$



۲) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$:

الف) از محور zها برابر است با $\sqrt{x_0^۲+y_0^۲}$.

ب) از محور yها برابر است با $\sqrt{x_0^۲+z_0^۲}$.

پ) از محور xها برابر است با $\sqrt{y_0^۲+z_0^۲}$.

- در شکل، فاصلهٔ نقطهٔ A از محور zها، همان طول عمود رسم شده از نقطهٔ A بر محور zهاست، که با قطر مستطیل به ضلع‌های x_0 و y_0، واقع در صفحه xoy (مستطیل رنگی) برابر است.

ترفند محاسباتی: فاصلهٔ یک نقطه در فضا، از هر محور مختصات با جذر مجموع مربع‌های مؤلفه‌های غایبِ آن محور برابر است.

برای نمونه: فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,۵,-۴)$ از محور yها برابر است با $\sqrt{۲^۲+(-۴)^۲}=۲\sqrt{۵}$.

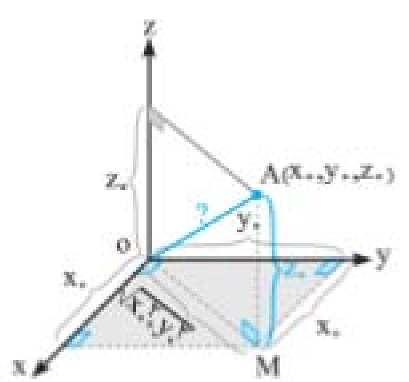
تست: **اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲m+۲,-۲\sqrt{۲},۲n+۳)$ از محور xها برابر با $۲\sqrt{۶}$ باشد، آن‌گاه n کدام است؟**

۱) $-۲/۵ , ۰/۵$ ۲) $-۲/۵ , ۱/۵$ ۳) $۳/۵ , ۰/۵$ ۴) $-۳/۵ , ۰/۵$

پاسخ **گزینه ۴** فاصلهٔ نقطهٔ A از محور xها برابر با $\sqrt{(-۲\sqrt{۲})^۲+(۲n+۳)^۲}$ می‌باشد. پس طبق فرض داده‌شده داریم:

$$\sqrt{(-۲\sqrt{۲})^۲+(۲n+۳)^۲}=۲\sqrt{۶} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (-۲\sqrt{۲})^۲+(۲n+۳)^۲=۲۴$$

$$\Rightarrow ۸+۴n^۲+۱۲n+۹=۲۴ \Rightarrow ۴n^۲+۱۲n-۷=۰ \xrightarrow{\div ۴} n^۲+۳n-\frac{۷}{۴}=۰ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} n=۰/۵ , -۳/۵$$



۳) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$ از مبدأ مختصات برابر است با: $\sqrt{x_0^۲+y_0^۲+z_0^۲}$

- برای اثبات، کافی است در مثلث قائم‌الزاویه OAM (شکل مقابل)، قضیهٔ فیثاغورس را به کار ببرید.

واضح است که: $|OA|=\sqrt{(\sqrt{x_0^۲+y_0^۲})^۲+z_0^۲} \Rightarrow |OA|=\sqrt{x_0^۲+y_0^۲+z_0^۲}$

برای نمونه: فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵,-۲,۴)$ از مبدأ مختصات برابر با $\sqrt{۵^۲+(-۲)^۲+۴^۲}=۳\sqrt{۵}$ است.

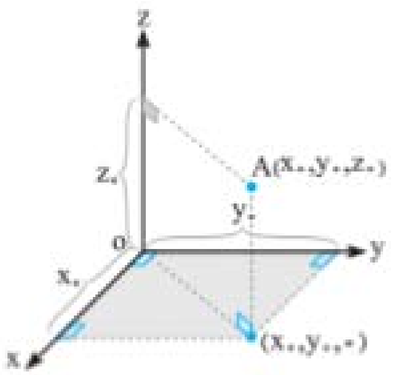
تست: فاصلهٔ یک نقطه در فضا، از محور xها، yها و zها به‌ترتیب $\sqrt{۵}$، ۵ و $۲\sqrt{۵}$ می‌باشد. فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۵ ۳) ۵/۵ ۴) ۷

پاسخ گزینه ۲ اگر نقطهٔ موردنظر را $A(x_۰,y_۰,z_۰)$ در نظر بگیریم، فاصلهٔ آن را از محور xها، yها و zها به‌ترتیب $\sqrt{y_۰^۲+z_۰^۲}$، $\sqrt{x_۰^۲+z_۰^۲}$ و $\sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲}$ است. پس طبق فرض داده‌شده داریم:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\sqrt{y_۰^۲+z_۰^۲}=\sqrt{۵} & \xrightarrow{\text{توان ۲}} & y_۰^۲+z_۰^۲=۵\\ \sqrt{x_۰^۲+z_۰^۲}=۵ & \xrightarrow{\text{توان ۲}} & x_۰^۲+z_۰^۲=۲۵\\ \sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲}=۲\sqrt{۵} & \xrightarrow{\text{توان ۲}} & x_۰^۲+y_۰^۲=۲۰\end{array}\right\}\xrightarrow{+}۲(x_۰^۲+y_۰^۲+z_۰^۲)=۵۰\xrightarrow{\div ۲}x_۰^۲+y_۰^۲+z_۰^۲=۲۵$$

پس فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات برابر است با: $\sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲+z_۰^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$



۴) مختصات تصویر قائم (پای عمود) نقطهٔ $A(x_۰,y_۰,z_۰)$:

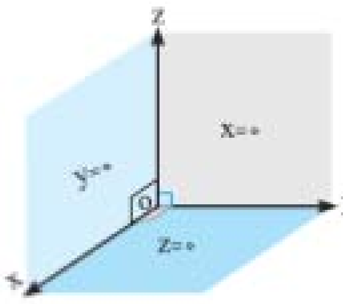
الف) روی صفحهٔ xoy عبارت است از $(x_۰,y_۰,۰)$.

ب) روی صفحهٔ xoz عبارت است از $(x_۰,۰,z_۰)$.

پ) روی صفحهٔ yoz عبارت است از $(۰,y_۰,z_۰)$.

ترفند محاسباتی: در مختصات تصویر قائم (پای عمود) هر نقطه در فضا، روی هر صفحهٔ مختصات، مؤلفهٔ غایبِ همان صفحه، برابر با صفر می‌شود و مؤلفه‌های هم‌نام با آن صفحه تغییر نمی‌کنند.

برای نمونه: مختصات تصویر قائم نقطهٔ $A(۵,-۱,۴)$ روی صفحهٔ yoz عبارت است از $(۰,-۱,۴)$.



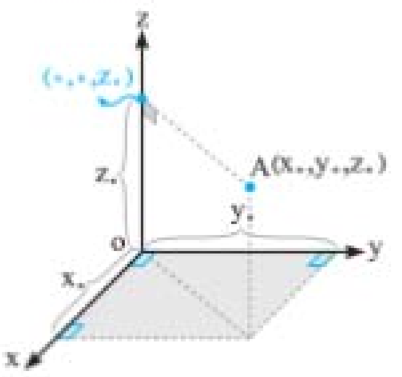
نتیجه: **الف)** معادلهٔ صفحهٔ xoy عبارت است از $z=۰$.

ب) معادلهٔ صفحهٔ xoz عبارت است از $y=۰$.

پ) معادلهٔ صفحهٔ yoz عبارت است از $x=۰$.

- برای اثبات درستی نتیجهٔ بالا، کافی است به این نکته توجه کنید.

برای نمونه: مختصات تمام نقطه‌های واقع در صفحهٔ xoy، دارای $z=۰$ هستند و هر نقطه‌ای که در مختصات آن، $z=۰$ باشد، واقع در صفحهٔ xoy است.



۵) مختصات تصویر قائم (پای عمود) نقطهٔ $A(x_۰,y_۰,z_۰)$:

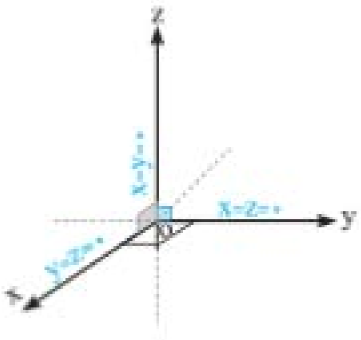
الف) روی محور zها عبارت است از $(۰,۰,z_۰)$.

ب) روی محور yها عبارت است از $(۰,y_۰,۰)$.

پ) روی محور xها عبارت است از $(x_۰,۰,۰)$.

ترفند محاسباتی: در مختصات تصویر قائم (پای عمود) هر نقطه در فضا، روی هر محور مختصات، مؤلفه‌های غایبِ همان محور، برابر با صفر می‌شود و مؤلفهٔ هم‌نام با آن محور تغییر نمی‌کند.

برای نمونه: مختصات تصویر قائم نقطهٔ $A(۲,۳,-۱)$ روی محور xها عبارت است از $(۲,۰,۰)$.

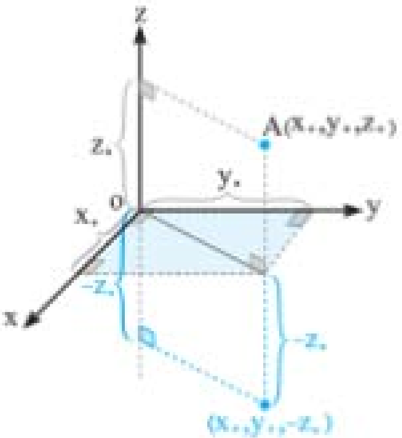


نتیجه: الف) معادلهٔ محور zها عبارت است از $x=y=۰$.

ب) معادلهٔ محور yها عبارت است از $x=z=۰$.

پ) معادلهٔ محور xها عبارت است از $y=z=۰$.

- برای اثبات درستی نتیجهٔ بالا، کافی است به این نکته توجه کنید که به عنوان مثال، مختصات تمام نقطه‌های واقع بر محور zها، دارای $x=۰$ و $y=۰$ هستند و هر نقطه‌ای که در مختصات آن $x=y=۰$ باشد، روی محور zها واقع است.



۶) مختصات قرینهٔ (بازتاب) نقطهٔ $A(x_۰,y_۰,z_۰)$:

الف) نسبت به صفحهٔ xoy عبارت است از $(x_۰,y_۰,-z_۰)$.

ب) نسبت به صفحهٔ xoz عبارت است از $(x_۰,-y_۰,z_۰)$.

پ) نسبت به صفحهٔ yoz عبارت است از $(-x_۰,y_۰,z_۰)$.

ترفند محاسباتی: در مختصات قرینهٔ (بازتاب) هر نقطه در فضا، نسبت به هر صفحهٔ مختصات، مؤلفه غایبِ همان صفحه، قرینه می‌شود و مؤلفه‌های هم‌نام با آن صفحه تغییر نمی‌کنند.

برای نمونه: مختصات قرینهٔ نقطهٔ $A(۵,-۲,-۴)$ نسبت به صفحهٔ yoz، عبارت است از $(-۵,-۲,-۴)$.

تست: **وجه‌های مکعب‌مستطیل توسط شش صفحه به معادلات $x=۱$، $x=۳$، $y=۱$، $y=۴$، $z=-۲$ و $z=۲$ مشخص شده‌اند. حجم این مکعب‌مستطیل کدام است؟**

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

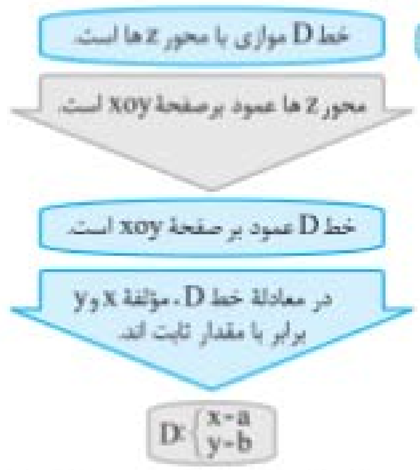
پاسخ گزینه ۱ از آن‌جایی که فاصلهٔ دو صفحهٔ $x=۱$، $x=۳$ برابر با $۲=۱-۳$، فاصلهٔ دو صفحهٔ $y=۱$ و $y=۴$ برابر با $۳=۱-۴$ و فاصلهٔ دو صفحهٔ $z=-۲$ و $z=۲$ برابر با $۴=(-۲)-۲$ است، پس طول، عرض و ارتفاع این مکعب‌مستطیل به‌ترتیب ۲، ۳ و ۴ می‌باشد. در نتیجه حجم آن $۲۴=۴×۳×۲$ است.

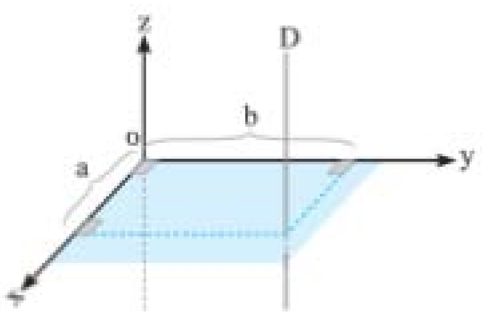
خط‌های موازی با محورهای مختصات (عمود بر صفحات مختصات)

- اگر خطی موازی با یکی از محورهای مختصات باشد، آن‌گاه عمود بر صفحهٔ مختصاتی است که بر آن محور عمود می‌باشد.
- اگر خطی عمود بر یک صفحهٔ مختصات باشد، در معادلهٔ آن خط مؤلفه‌های هم‌نام با آن صفحه برابر با مقدار ثابت هستند.

به‌طور کلی سه حالت وجود دارد:

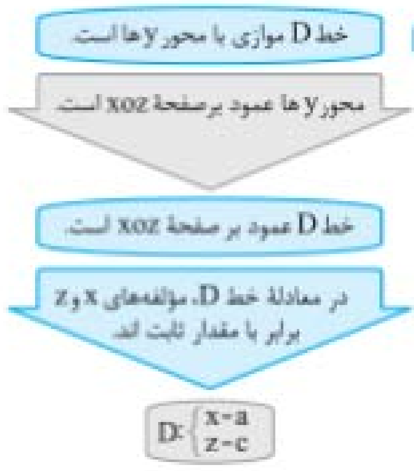
۱

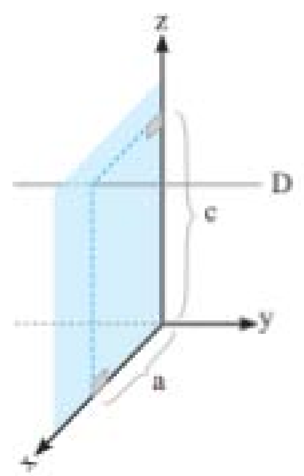




- توجه کنید در خط D، مؤلفهٔ z هر مقدار دلخواه می‌تواند باشد، اما مؤلفه‌های x و y همواره ثابت‌اند.

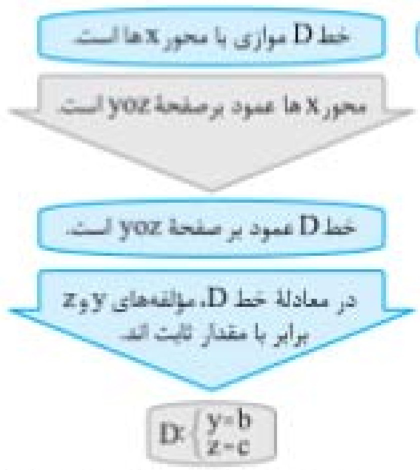
۲

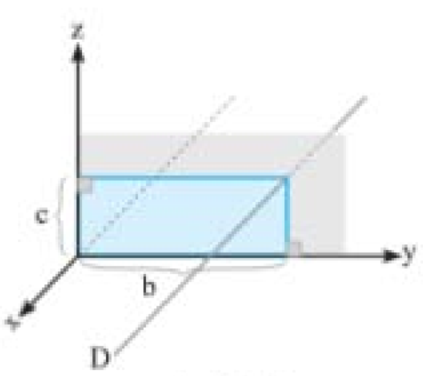




- توجه کنید در خط D، مؤلفهٔ y هر مقدار دلخواه می‌تواند باشد، اما مؤلفه‌های x و z همواره ثابت‌اند.

۳

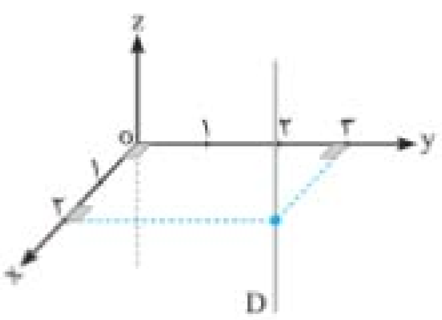




- توجه کنید در خط D، مؤلفهٔ x هر مقدار دلخواه می‌تواند باشد، اما مؤلفه‌های y و z همواره ثابت‌اند.

برای نمونه:

◄ رسم خط $D:\begin{cases}x=۲\\y=۳\end{cases}$



- خط D در نقطه‌ای به طول ۲ و عرض ۳ بر صفحهٔ xoy ها عمود است (موازی با محور zها می‌باشد).
- تمام نقطه‌های واقع بر خط D دارای $x=۲$ و $y=۳$ هستند، یعنی مؤلفه‌های x و y تمام نقاط آن ثابت‌اند.
- تمام نقطه‌های واقع بر خط D دارای z متغیرند.

ضرب مختلط سه بردار

۵۲۵. دو بردار با تصاویر $\vec{a}=(1,1,2)$ و $\vec{b}=(-1,0,1)$ مفروض‌اند. حجم متوازی‌السطوحی که با بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}\times\vec{i}$ و $\vec{a}\times\vec{k}$ ساخته می‌شود کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۲۶. دو بردار با تصاویر $\vec{a}=(1,-2,2)$ و $\vec{b}=(2,1,-1)$ مفروض هستند. حجم متوازی‌السطوح که بر روی سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ ساخته شود، کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) ۵۴ ۲) ۷۲ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۵۲۷. بر روی سه بردار $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$، $\vec{b}=\vec{j}+2\vec{k}$ و $\vec{c}=4\vec{i}-\vec{k}$ یک متوازی‌السطوح ساخته شده است. اگر قاعدهٔ این متوازی‌السطوح را بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تشکیل دهند، ارتفاع متوازی‌السطوح کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

۵۲۸. بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مفروض‌اند. اگر دو بردار $\vec{a}\times\vec{c}$ و $\vec{b}$ هم‌راستا باشند و اندازهٔ هر کدام مساوی ۴ باشد، حاصل $\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۱۶

۵۲۹. اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیرصفر و غیرواقع در یک صفحه باشند، مقدار کدام گزینه با سایرین متفاوت است؟

۱) $\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})$ ۲) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ۳) $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$ ۴) $(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$

۵۳۰. چند بردار با طول ۲ وجود دارد که بر هر سه بردار $\vec{a}=(2,1,-1)$، $\vec{b}=(1,2,2)$ و $\vec{c}=(0,-2,-5)$ عمود باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) بی‌شمار

۵۳۱. سه بردار $\vec{a}=(-1,1,1)$، $\vec{b}=(1,0,-1)$ و $\vec{c}=(-1,2,m)$ مفروض‌اند. اگر $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{o}$ باشد، m کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -2

۵۳۲. به ازای چند مقدار m چهار نقطهٔ $A(0,1,2)$، $B(2,2,4)$، $C(1,1,1)$ و $D(m,m,m)$ در یک صفحه قرار دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۵۳۳. به ازای کدام مقدار m، سه بردار $\vec{a}=(-1,2,2)$، $\vec{b}=(2,0,1)$ و $\vec{c}=(-4,m,5)$ در یک صفحه‌اند؟ (ریاضی ۹۸)

۱) -2 ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۳۴. اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیرصفر باشند، خلاصه شدهٔ $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot((\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}-\vec{a}))$ کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ۲) $2\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ۳) $3\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ۴) صفر

۵۳۵. بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ با شرط $(\vec{a}-\vec{c})\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ مفروض‌اند. الزاماً کدام نتیجه حاصل می‌شود؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})=0$ ۲) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$ ۳) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{0}$ ۴) هر سه بردار موازی‌اند.

۵۳۶. حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر ۲ است. اگر بردارهای $2\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}+2\vec{c}$ با هم موازی باشند، حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر بردارهای $\vec{a}+2\vec{b}$، $\vec{b}-6\vec{c}$ و $\vec{a}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) ۳ ۴) ۸۱

آزمون فصل

۱ آزمون اول

۱. اگر $\vec{a}=(1,1,0)$ و $\vec{b}=(1,-1,1)$ باشد، اندازهٔ بردار $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۴ ۴) صفر

۲. اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ چهار بردار دلخواه باشند، آن‌گاه سه بردار $\vec{a}\times\vec{d}$، $\vec{b}\times\vec{d}$ و $\vec{c}\times\vec{d}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) موازی یک صفحه‌اند. ۲) موازی هم‌اند. ۳) دوبه‌دو عمود برهم‌اند. ۴) مجموع آن‌ها بردارصفر است.

۱. **گزینه ۴** تعداد درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A برابر با n است. پس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی این ماتریس n است.
برای پیدا کردن تعداد درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی این ماتریس، باید تعداد درایه‌های روی قطر اصلی آن را از کل درایه‌ها کم کنیم و در نهایت عدد حاصل را نصف کنیم: $\frac{n^۲-n}{۲}$

پس مجموع درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی برابر $\frac{n^۲-n}{۲}$ است.
در نهایت برای خواستهٔ مسئله می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\text{مجموع درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی}}{\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی}}=\frac{\frac{n^۲-n}{۲}}{n}=\frac{n-۱}{۲}$$

۲. **گزینه ۱** در ماتریس قطری، همهٔ درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی باید صفر باشند. در این سؤال یعنی درایه‌های به شکل $\frac{۲x^۲-۹x+۴}{۳x^۲-۱۳x+۴}$ باید برابر صفر شوند. بنابراین:

$$۲x^۲-۹x+۴=۰\xrightarrow{\text{تجزیه}}(۲x-۱)(x-۴)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲},x=۴$$

با امتحان ریشه‌های این معادله در عبارت مخرج کسر، مشاهده می‌شود که $x=۴$، مخرج را صفر می‌کند. پس فقط $x=\frac{۱}{۲}$ قابل قبول است.

۳. **گزینه ۳** طبق خاصیت تساوی در ماتریس‌ها، درایه‌ها نظیر به نظیر با هم برابرند. پس می‌توانیم چهار معادله داشته باشیم.

$$\begin{cases}x^۲+۳=۴x\Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰\Rightarrow x=۱,۳\\ ۴=-x^۲+۵x\Rightarrow x^۲-۵x+۴=۰\Rightarrow x=۱,۴\end{cases}$$

از اشتراک جواب‌ها، $x=۱$ به‌دست می‌آید. داریم:

$$۳x-y=۲x+y\Rightarrow x=۲y\Rightarrow ۱=۲y\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}$$

پس: $x+y=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$

۴. **گزینه ۴** از آن‌جایی که ماتریس‌های A و B دارای تعداد سطر و ستون برابر هستند، می‌توان عملیات خواسته شده را انجام داد. در این‌جا نیازی به پیدا کردن همهٔ درایه‌های ماتریس‌های A و B نداریم. در عملیات خواسته‌شده، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم خواسته شده است، پس محاسبهٔ درایهٔ سطر دوم و ستون سوم از ماتریس‌های A و B کافی می‌باشد:

$$a_{۲۳}=(۳)^۲+۲\times(۲)=۱۳,\ b_{۲۳}=(۲)^۳-۳=۵$$

حالا با توجه به خواص ضرب عدد در ماتریس درایهٔ $۲a_{۲۳}$ برابر با $۲۶=۲\times۱۳$ و درایهٔ $-b_{۲۳}$ برابر -۵ می‌باشد و در نهایت درایهٔ سطر دوم و ستون سوم از ماتریس خواسته‌شده برابر با $۲۱=۲۶+(-۵)$ است.

۵. **گزینه ۴** توجه کنید که $c_{۲۴}$، درایهٔ سطر دوم و ستون چهارم از ماتریس C می‌باشد، اما $C=A.B$ است، پس:

$$c_{۲۴}=(\text{سطر دوم ماتریس }A)(\text{ستون چهارم ماتریس }B)$$

$$=\begin{bmatrix}۰&۳&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۶\\۴\\-۶\end{bmatrix}=(۰)(۶)+(۳)(۴)+(۲)(-۶)=۰$$

۶. **گزینه ۳**

راهبرد: اگر A و B دو ماتریس ضرب‌پذیر باشند، آن‌گاه:

$$(\text{سطر }i\text{ام ماتریس }A)\cdot B=\text{سطر }i\text{ام ماتریس }(A\cdot B)$$

(وقتی از ماتریس دوم، ستون خاصی ذکر نشده است، کل آن را در نظر می‌گیریم.)
حال داریم:

$$(\text{سطر دوم ماتریس }A)\cdot B=\text{سطر دوم ماتریس }(AB)=\text{سطر دوم ماتریس }C$$

$$=\begin{bmatrix}۲&۶\end{bmatrix}_{۱\times۲}\begin{bmatrix}۱&۳&-۱&۰\\۵&-۶&۷&۱۰\end{bmatrix}_{۲\times۴}=\begin{bmatrix}۳۲&-۳۰&۴۰&۶۰\end{bmatrix}_{۱\times۴}$$

پس مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس C برابر با $۱۰۲=۶۰+۴۰+(-۳۰)+۳۲$ است.

۷. **گزینه ۱**

راهبرد: اگر A و B دو ماتریس ضرب‌پذیر باشند، آن‌گاه:

$$A\cdot(\text{ستون }j\text{ام }B)=\text{ستون }j\text{ام ماتریس }(AB)$$

(وقتی از ماتریس اول، سطر خاصی ذکر نشده است، کل آن را در نظر می‌گیریم.) حال داریم:

$$N\cdot(\text{ستون سوم }M)=\text{ستون سوم ماتریس }(N\cdot M)$$

$$=\begin{bmatrix}۴&-۲\\۰&۷\\۵&۱\end{bmatrix}_{۳\times۲}\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}_{۲\times۱}=\begin{bmatrix}-۲\\۷\\۱\end{bmatrix}_{۳\times۱}$$

پس مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس $N\cdot M$ برابر با ۶ است.

۸. **گزینه ۴**

اگر فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}۵\\۲\\-۷\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲&-۱&۴\end{bmatrix}$ باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب AB موردنظر است که یک ماتریس ۳×۳ است. زیرا: $A_{۳\times۱}\cdot B_{۱\times۳}=C_{۳\times۳}$ ok

برای یافتن آن داریم:

$$\begin{bmatrix}۵\\۲\\-۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۱&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵\times۲&۵\times(-۱)&۵\times۴\\۲\times۲&۲\times(-۱)&۲\times۴\\(-۷)\times۲&(-۷)\times(-۱)&(-۷)\times۴\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱۰&-۵&۲۰\\۴&-۲&۸\\-۱۴&۷&-۲۸\end{bmatrix}$$

۹. **گزینه ۳** حاصل‌ضرب‌های AB و BA را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}c&۵\\۳&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&۱\\b&۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳c+۵b&c+۳۵\\۹+ab&۳+۷a\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}۳&۱\\b&۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c&۵\\۳&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳c+۳&۱۵+a\\bc+۲۱&۵b+۷a\end{bmatrix}$$

با مساوی قرار دادن یک درایهٔ متناظر در هر دو ماتریس حاصل داریم:

$$(AB)_{۱۲}=(BA)_{۱۲}\Rightarrow c+۳۵=۱۵+a\Rightarrow c-a=-۲۰$$

۱۰. **گزینه ۲** اگر ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر باشند، تساوی $AB=BA$ برقرار می‌شود.

$$AB=BA\Rightarrow\begin{bmatrix}-۲&-۳\\۳&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۲\\a&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۲\\a&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲&-۳\\۳&-۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-۲-۳a&۴-۳b\\۳-۲a&-۶-۲b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸&۱\\-۲a+۳b&-۳a-۲b\end{bmatrix}$$

در ماتریس‌های مساوی، درایه‌های متناظر با هم برابرند. از تساوی درایه‌های ۱×۱ یعنی $-۸=-۲-۳a$، مقدار a مساوی ۲ می‌شود. از تساوی درایه‌های ۲×۱ داریم:

$$۳-۲a=-۲a+۳b\Rightarrow b=۱\xrightarrow{a=۲}a+b=۲+۱=۳$$

۱۱. **گزینه ۱** از آن‌جایی که حاصل‌ضرب ماتریسی، یک ماتریس قطری است، پس درایه‌هایی که روی قطر اصلی قرار نگرفته‌اند، باید صفر باشند.
یعنی درایه‌های $x_{۱۲}$ و $x_{۲۱}$ از ماتریس حاصل باید صفر باشند.

$$\begin{bmatrix}-۲a&-۲\\۲&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۱\\-۲&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dots&۲a+۴\\۶-۲b&\dots\end{bmatrix}$$

از معادلات $2a+4=0$ و $6-2b=0$ مقادیر a و b به‌ترتیب برابر ۲− و ۳ به‌دست می‌آیند. در نتیجه حاصل $a+b$ برابر با ۱ است.

۱۲. گزینه ۲ می‌دانیم ماتریس حاصل، یک ماتریس ۲×۲ است. (چرا؟) پس برای آنکه یک ماتریس قطری ۲×۲ داشته باشیم، باید درایه‌های a_{12} و a_{21} برابر صفر باشند. پس:

$$a_{12}=0 \Rightarrow [x \quad -1 \quad 4]\cdot\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}=0 \Rightarrow -2x+4=0 \Rightarrow x=2$$

$$a_{21}=0 \Rightarrow [2 \quad 3 \quad 1]\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\y\end{bmatrix}=0 \Rightarrow 4+3+y=0 \Rightarrow y=-7$$

۱۳. گزینه ۴ ماتریس‌های B و C از مرتبهٔ ۳×۲ هستند. می‌دانیم در ضرب ماتریسی AB تعداد سطرها، با تعداد سطرهای ماتریس A برابر است. پس ماتریس A حتماً دارای ۲ سطر است. از طرفی ضرب ماتریسی AB وقتی ممکن است که تعداد ستون ماتریس A با تعداد سطر ماتریس B برابر باشد، پس ماتریس A دارای ۲ ستون می‌باشد. $A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$

$$C=AB \Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\1 & 3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\1 & 3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3a+b & a-b & 2a+b\\-3c+d & c-d & 2c+d\end{bmatrix}$$

از تساوی درایه‌های متناظر سطر اول از هر دو ماتریس مساوی داریم:

$$-3a+b=-1 \ , \ a-b=2 \ , \ 2a+b=1$$

از حل معادلات $-3a+b=-1$, $a-b=2$ مقادیر a و b به‌ترتیب برابر $-\frac{1}{2}$ و $-\frac{5}{2}$ به‌دست می‌آیند. که این مقادیر در رابطهٔ $2a+b=1$ صادق نیستند، زیرا $2(\frac{-1}{2})-\frac{5}{2}=-\frac{7}{2}\neq 1$. پس ماتریسی مانند A وجود ندارد.

۱۴. گزینه ۲ ماتریس سمت راست دارای سه سطر است. بنابراین ماتریس A سه سطر دارد. از طرفی برای اینکه ماتریس A را در ماتریس $B=\begin{bmatrix}3 & -1\\4 & 2\end{bmatrix}$ ضرب کرد، باید تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد. پس ماتریس A از مرتبهٔ ۲×۳ می‌باشد.

$$A\begin{bmatrix}3 & -1\\4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & 0\\3 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}a & d\\c & d\\e & f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & 0\\3 & 5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3a+4b & -a+2b\\3c+4d & -c+2d\\3e+4f & -e+2f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & 0\\3 & 5\end{bmatrix}$$

از برابر قرار دادن درایه‌های متناظر، پس از حل دستگاه‌های دو معادله دومجهولی، به‌ترتیب مقادیر دوتایی‌های (a,b)، (c,d) و (e,f) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases}3a+4b=1\\-a+2b=2\end{cases} \Rightarrow a=\frac{-3}{5} \ , \ b=\frac{7}{10}$$

$$\begin{cases}3c+4d=-1\\-c+2d=0\end{cases} \Rightarrow c=-\frac{1}{5} , d=-\frac{1}{10}$$

$$\begin{cases}3e+4f=3\\-e+2f=5\end{cases} \Rightarrow e=-\frac{7}{5} , f=\frac{9}{5}$$

بنابراین بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A برابر $f=\frac{9}{5}$ است.

۱۵. گزینه ۱

$$\underbrace{[x \quad 2x \quad -1]\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}3\\4\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-1\\0\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\-2\\0\end{matrix}}\end{bmatrix}}_{[11x-1 \quad -x-2 \quad -3x]}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow [11x-1 \quad -x-2 \quad -3x]\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (11x-1)\cdot x+(-x-2)\cdot(2x)+)-(-3x)(-1)=0$$

$$\Rightarrow 9x^2-2x=0 \Rightarrow x\cdot(9x-2)=0 \Rightarrow x=0 \ , \ \frac{2}{9}$$

۱۶. گزینه ۱

$$[x \quad 2 \quad 1]\begin{bmatrix}x & -1 & 1\\2 & x & 3\\-1 & 1 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\x\\-1\end{bmatrix}=\bar{o}$$

$$\Rightarrow [x^2+3 \quad x+1 \quad 2x+6]\begin{bmatrix}2\\x\\-1\end{bmatrix}=\bar{o}$$

$$\Rightarrow 2(x^2+3)+x(x+1)-(2x+6)=0$$
$$\Rightarrow 2x^2+6+x^2+x-2x-6=0 \Rightarrow 3x^2-x=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{3}\\x=0\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}= \text{مجموع جواب‌ها}$$

۱۷. گزینه ۱ ماتریس A را جای‌گذاری کرده و به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c & -d\\-a & -b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-c & -d\\-a & -b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d & c\\b & a\end{bmatrix}$$

۱۸. گزینه ۲ ماتریس‌های A و B را به‌صورت زیر می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix}a & b & c\\a' & b' & c'\\a'' & b'' & c''\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}d & e & f\\d' & e' & f'\\d'' & e'' & f''\end{bmatrix}$$

دقت داشته باشید که مجموع درایه‌های هر ستون برابر ۱ است:

$$a+a'+a''=b+b'+b''=c+c'+c''=d+d'+d''$$
$$=e+e'+e''=f+f'+f''=1$$

برای راحتی کار ابتدا ستون اول از ماتریس AB را پیدا می‌کنیم. برای این کار به سه سطر از ماتریس A و ستون اول ماتریس B نیاز داریم:

$$AB=\begin{bmatrix}a & b & c\\a' & b' & c'\\a'' & b'' & c''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d & \cdots & \cdots\\d' & \cdots & \cdots\\d'' & \cdots & \cdots\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}ad+bd'+cd'' & \cdots & \cdots\\a'd+b'd'+c'd'' & \cdots & \cdots\\a''d+b''d'+c''d'' & \cdots & \cdots\end{bmatrix}$$

حاصل جمع درایه‌های ستون اول از ماتریس AB برابر است با:

$$\begin{matrix}a\,d & +b\,d' & +c\,d''\\+a'\,d & +b'\,d' & +c'\,d''\\+a''\,d & +b''\,d' & +c''\,d''\end{matrix}$$

$$\underbrace{(a+a'+a'')}_{1}d+\underbrace{(b+b'+b'')}_{1}d'+\underbrace{(c+c'+c'')}_{1}d''$$

$$=d+d'+d''=1$$

۳۴۷. گزینه ۳ مکان‌هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ $A(0,4)$ و $B(-2,0)$ به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

برای یافتن معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB (خط d)، معادلهٔ خطی را می‌یابیم که از نقطهٔ M، وسط پاره‌خط AB بگذرد و شیب آن قرینه معکوس شیب پاره‌خط AB باشد.

$$\begin{cases} M\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) \Rightarrow M(-1,2) \in d \\ m_{AB} = \frac{4-0}{0-(-2)} = 2 \Rightarrow m_d = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین معادله، خط d عبارت است از:

$$d: (y-2) = -\frac{1}{2}(x+1) \Rightarrow 2y + x - 3 = 0 \quad (*)$$

برای پیدا کردن نقاط تلاقی این خط با سهمی مفروض، آن‌ها را قطع می‌دهیم. از معادلهٔ خط، $y = \frac{3-x}{2}$ به‌دست می‌آید و آن را در معادلهٔ سهمی جایگزین می‌کنیم. داریم:

$$y = x^2 - 2x - 3 \xrightarrow{y=\frac{3-x}{2}} \frac{3-x}{2} = x^2 - 2x - 3$$

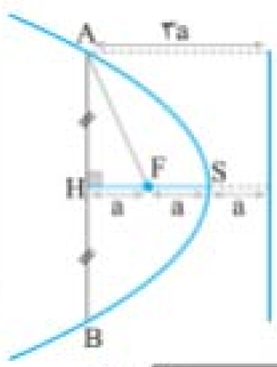
$$\xrightarrow{\text{مرتب}} 2x^2 - 3x - 9 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x = 3 \ , \ x = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \xrightarrow{(*)} y = 0 \Rightarrow P(3,0) \\ x = -\frac{3}{2} \xrightarrow{(*)} y = \frac{9}{4} \Rightarrow N\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) \end{cases}$$

پس نقاط مطلوب مسئله عبارت‌اند از $N\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ و $P(3,0)$، که مجموع مختصات‌های نقطهٔ P برابر ۳ است.

۳۴۸. گزینه ۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHF با کمک قضیه فیثاغورس داریم:

$$AH = \sqrt{AF^2 - FH^2}$$



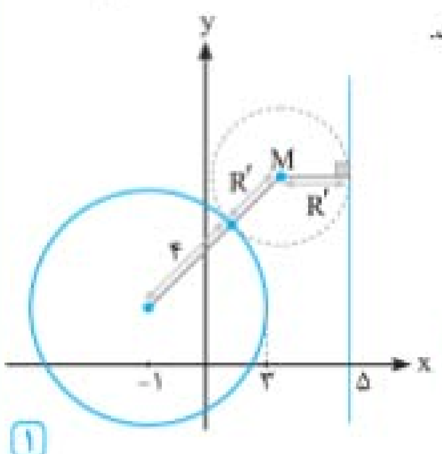
از آن‌جایی که نقطهٔ A روی سهمی قرار دارد، فاصلهٔ A تا کانون (F) برابر با فاصلهٔ A تا خط هادی یعنی ۳a است:

$$AH = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a$$

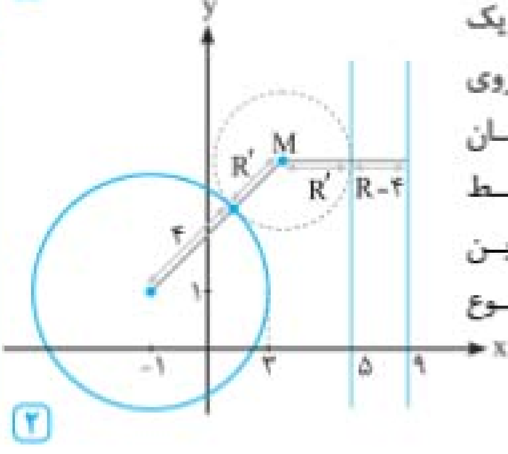
بنابراین:

$$\frac{AB}{SH} = \frac{2AH}{SH} = \frac{2 \times (2\sqrt{2}a)}{2a} = 2\sqrt{2}$$

۳۴۹. گزینه ۳ از معادلهٔ دایره $R = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (-2)^2 - 4(-14)} = 4$ و مختصات مرکز $(-1,1)$ به‌دست می‌آید.



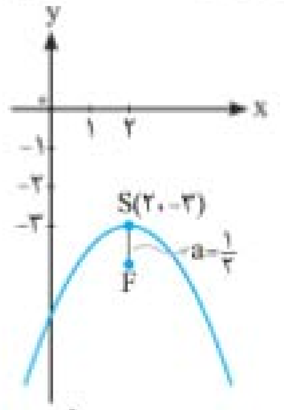
۱



۲

مطابق شکل ۱ نقطهٔ M روی سهمی به کانون F قرار دارد، زیرا از یک نقطهٔ ثابت و خط ثابت به یک فاصله است. اگر خط $x=5$ را به اندازهٔ شعاع دایرهٔ حاصل به طرف راست انتقال دهیم، به شکل ۲ می‌رسیم. در این حالت نقطهٔ M از مرکز دایرهٔ فوق و خط $x=9$ به یک فاصله می‌باشد. پس نقطهٔ M روی سهمی به کانون $F(-1,1)$ (همان مرکز دایرهٔ داده شده) و خط هادی $x=9$ قرار دارد. رأس این سهمی نقطهٔ $S(4,1)$ با مجموع مختصات ۵ می‌باشد.

۳۵۰. گزینه ۱ در ابتدا با توجه به مختصات داده شده برای رأس و کانون سهمی مقدار a، قائم یا افقی بودن سهمی و جهت دهانهٔ آن را مشخص می‌کنیم. با توجه به هم‌طول بودن دو نقطهٔ F و S، سهمی قائم است و $a = FS = \frac{1}{2}$. در ضمن چون سهمی از S می‌گذرد و جهت دهانهٔ آن رو به F است، پس دهانه رو به پایین می‌باشد.



حالا برای معادلهٔ سهمی می‌توانیم بنویسیم:

$$(x-2)^2 = -4 \times \frac{1}{2}(y+3)$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -2y - 6$$

$$\Rightarrow x^2 + 2y + 10 = 4x$$

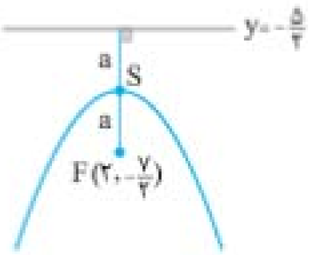
۳۵۱. گزینه ۱ با توجه به شکل، رأس سهمی $S(1,0)$ و فاصلهٔ رأس تا کانون یعنی a برابر ۱ است، پس معادلهٔ سهمی افقی (جهت دهانه رو به راست) عبارت است از: $(y-0)^2 = 4(x-1) \Rightarrow y^2 = 4x - 4$

حالا، معادلهٔ سهمی را با خط $y = x$ (نیمساز ربع اول) قطع می‌دهیم. برای این کار در معادلهٔ سهمی حاصل، به جای x، پارامتر y را قرار می‌دهیم:

$$y^2 = 4y - 4 \Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (y+2)^2 = 0 \Rightarrow y = -2$$

بنابراین نقطهٔ مطلوب، $M(-2,-2)$ با مجموع مختصات ۴− است.

۳۵۲. گزینه ۲ از آن‌جایی که خط هادی $y=$ است، سهمی قائم است. با توجه به اینکه کانون پایین خط هادی است، جهت دهانه به طرف پایین است.

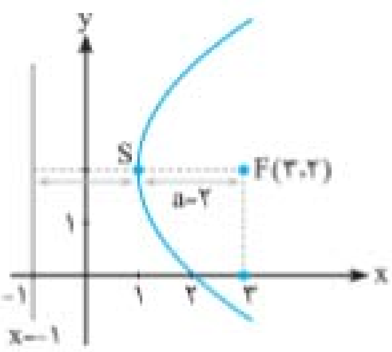


فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر ۱ می‌باشد. پس $2a = 1$ و لذا $a = \frac{1}{2}$. رأس سهمی، وسط فاصله بین کانون و خط هادی است، پس $S(2,-3)$ می‌باشد. اکنون معادلهٔ سهمی را می‌نویسیم:

$$(x-2)^2 = -4 \times \frac{1}{2}(y+3) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -2y - 6$$

$$\Rightarrow x^2 = 4x - 2y - 10$$

۳۵۳. گزینه ۲ از آن‌جایی که خط هادی سهمی، $x=$ است، سهمی افقی می‌باشد. کانون در سمت راست خط هادی واقع شده، پس جهت دهانهٔ سهمی به سمت راست است.



رأس سهمی وسط فاصله کانون تا خط هادی قرار دارد. پس نقطهٔ $S(1,2)$ رأس می‌باشد. فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر $2a = 4$ است، پس مقدار a برابر ۲ می باشد. معادلهٔ سهمی عبارت است از:

$$(y-2)^2 = 4 \times 2(x-1) \xrightarrow[y=0]{\text{تلاقی با محور xها}} (0-2)^2 = 8(x-1)$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} = 1.5$$

فاصلهٔ نقطهٔ $(1.5, 0)$ تا نقطهٔ $F(3,2)$ برابر با ۲/۵ است.

۳۵۴. گزینه ۴ ابتدا معادلهٔ سهمی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$y^2 = 4x - 4 \Rightarrow y^2 = 4(x-1) \Rightarrow \begin{cases} 4a = 4 \Rightarrow a = 1 \\ S(1,0) \end{cases}$$

از آن‌جایی که سهمی افقی و جهت دهانه رو به راست است، پس مختصات کانون آن $F(2,0)$ می‌باشد (توجه کنید F و S هم عرض‌اند). بنابراین معادلهٔ دایره به مرکز $(2,0)$ و شعاع $R = 3$ عبارت است از:

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 9 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 9$$

اکنون منحنی سهمی و دایره را در یک دستگاه قطع می‌دهیم. داریم:

$$\begin{cases} y^2 = 4(x-1) \\ (x-2)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 9-(x-2)^2 \end{cases}$$

پس $9-(x-2)^2 = 4(x-1)$، داریم:

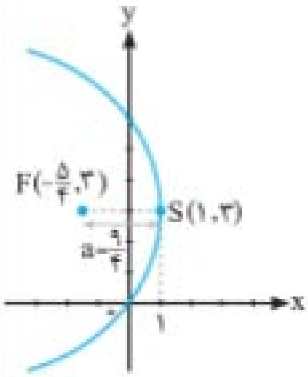
$$9-(x^2-4x+4) = 4x-4 \Rightarrow 9-x^2+\cancel{4x}-4 = \cancel{4x}-4$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

حال $x = \pm 3$ را در معادلهٔ سهمی قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{cases} y^2 = 4(-3-1) = -16 \quad \text{غیرقابل قبول} \\ y^2 = 4(3-1) = 8 \xrightarrow{\text{جذر}} y = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

پس دو نقطهٔ تقاطع دایره و سهمی، $A(3, 2\sqrt{2})$ و $B(3, -2\sqrt{2})$ است، که فاصلهٔ بین آن‌ها برابر با $4\sqrt{2}$ است.



۳۵۵. گزینه ۳ مختصات رأس سهمی $S(1,3)$ است. از آن‌جایی که سهمی افقی و جهت دهانهٔ آن رو به چپ است، پس معادلهٔ آن عبارت است از:

$$(y-3)^2 = -4a(x-1)$$

اما این سهمی از مبدأ مختصات می‌گذرد. پس مختصات نقطهٔ $O(0,0)$ در آن صدق می‌کند:

$$(0-3)^2 = -4a(0-1) \Rightarrow a = \frac{9}{4}$$

از طرفی می‌دانیم در سهمی افقی، رأس و کانون، عرض‌های برابر دارند. در نتیجه از رأس سهمی به اندازهٔ $a = \frac{9}{4}$ به طرف چپ (موازی با محور x ها) حرکت می‌کنیم تا به نقطهٔ $F(1-\frac{9}{4}, 3)$ برسیم.

پس طول کانون سهمی $-\frac{5}{4}$ است.

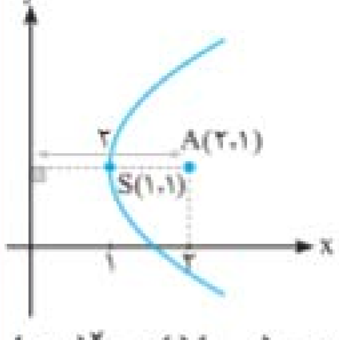
۳۵۶. گزینه ۱

$$2y^2 + 15 = 3x + 12y \Rightarrow 2y^2 - 12y - 3x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow a = -\xrightarrow[\text{چهار برابر ضریب متغیر درجه دو}]{\text{ضریب متغیر درجه اول}} = -\frac{-3}{4\times 2} = \frac{3}{8}$$

فاصلهٔ کانون از خط هادی هر سهمی برابر با $2a$ است، که در این سؤال $2a = \frac{3}{4}$ می‌باشد.

۳۵۷. گزینه ۴ از آن‌جایی که دایره بر محور y ها مماس و از نقطهٔ $A(2,1)$ می‌گذرد، فاصلهٔ مرکز آن از خط $x = 0$ و نقطهٔ $A(2,1)$ برابر مقدار ثابت شعاع دایره است، پس مکان‌هندسی نقاط موردنظر یک سهمی به کانون $A(2,1)$ و خط هادی $x = 0$ می‌باشد.



با توجه به شکل، فاصلهٔ کانون تا خط هادی $2a = 2$ می‌باشد، پس $a = 1$. چون خط هادی $x =$ است، سهمی افقی با جهت دهانهٔ رو به راست (رو به F) و رأس $S(1,1)$ است، پس معادلهٔ آن عبارت است از:

$$(y-1)^2 = 4(1)(x-1) \Rightarrow y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$$

۳۵۸. گزینه ۲ برای اینکه اشتباه نشود، به جای پارامتر a در معادلهٔ سهمی، پارامتر k را قرار می‌دهیم:

$$y^2 + k(x-y) = 0 \Rightarrow (y^2 - ky) + kx = 0$$

توجه کنید طبق فرض مسئله، $2a = 2$ و در نتیجه $a = 1$ است. از طرفی:

$$a = -\frac{k}{4\times 1} = -\frac{k}{4} \Rightarrow 1 = -\frac{k}{4} \Rightarrow k = -4$$

پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $y^2 + 4y - 4x = 0$ درمی‌آید. داریم:

$$f'_y = 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ سهمی}} (-2)^2 + 4(-2) - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow S(-1, -2)$$

و چون $a = 1$ است، پس کانون سهمی، $F(0, -2)$ می‌باشد.

۳۵۹. گزینه ۳ برای پیدا کردن کانون سهمی، معادلهٔ داده شده را به شکل استاندارد تبدیل می‌کنیم: $2y^2 + 4y - x + b = 0 \Rightarrow 2y^2 + 4y = x - b$

$$\Rightarrow 2(y^2 + 2y) = x - b$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل به مربع}} 2[(y+1)^2 - 1] = x - b$$

$$\Rightarrow 2(y+1)^2 = x - b + 2$$

$$\Rightarrow (y+1)^2 = \frac{1}{2}(x - b + 2)$$

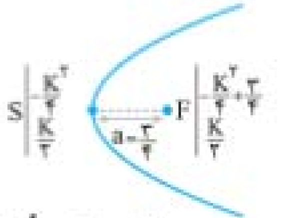
با توجه به معادلهٔ استاندارد سهمی، سهمی افقی و جهت دهانهٔ آن به سمت راست و رأس سهمی $S(b-2, -1)$ می‌باشد و $4a = \frac{1}{2}$ و لذا $a = \frac{1}{8}$. با توجه به اطلاعات بالا کانون سهمی نقطهٔ $F(b-2+\frac{1}{8}, -1)$ می‌باشد.

پس: $b - 2 + \frac{1}{8} = \frac{17}{8} \Rightarrow b = 4$

۳۶۰. گزینه ۲ در این مسئله هم برای اجتناب از اشتباه، به جای a در معادلهٔ سهمی، از k استفاده می‌کنیم و به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y^2 - ky - 3x - \frac{k^2}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{-3}{4\times 1} = \frac{3}{4}$$

سهمی افقی و دهانهٔ آن رو به راست است (چرا؟). اکنون برای یافتن رأس سهمی داریم:



$$f'_y = 2y - k = 0 \Rightarrow y = \frac{k}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادلهٔ سهمی}} (\frac{k}{2})^2 - k(\frac{k}{2}) - 3x - \frac{k^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{k^2}{4} \Rightarrow S(-\frac{k^2}{4}, \frac{k}{2})$$

در نتیجه کانون سهمی $F(-\frac{k^2}{4} + \frac{3}{4}, \frac{k}{2})$ است. این نقطه روی نیمساز ناحیه اول، یعنی خط $y = x$ قرار دارد. پس در این معادله صدق می‌کند:

$$-\frac{k^2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{3-k^2}{4} = \frac{2k}{4} \Rightarrow 3 - k^2 = 2k$$

$$\Rightarrow k^2 + 2k - 3 = 0 \Rightarrow (k+3)(k-1) = 0 \Rightarrow k = 1, -3$$

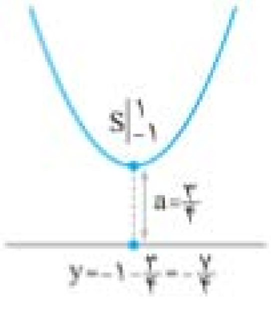
۳۶۱. گزینه ۴ می‌دانیم سهمی مکان‌هندسی مرکز دایره‌هایی است که همگی از یک نقطهٔ ثابت F (کانون) می‌گذرد و بر خط ثابتی در صفحه (خط هادی) مماس هستند. پس کافی است معادلهٔ خط هادی سهمی را بیابیم.

$$x^2 - 2x - 3y - 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{-3}{4\times 1} = \frac{3}{4}$$

سهمی قائم و دهانهٔ آن رو به بالا است (چرا؟). اکنون برای یافتن رأس سهمی داریم:

$$f'_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ سهمی}}$$

$$(1)^2 - 2(1) - 3y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1$$



رأس سهمی به مختصات $S(1, -1)$ می‌باشد. پس برای معادلهٔ خط هادی آن به اندازهٔ a روی عرض رأس سهمی پایین می‌رویم و خط هادی عبارت است از:

$$y = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$$