



# مشاوره تحصیلی هیوا

تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

مشاوره تخصصی ثبت نام مدارس ، برنامه ریزی درسی و آمادگی  
برای امتحانات مدارس

برای ورود به صفحه مشاوره مدارس کلیک کنید

برای ورود به صفحه نمونه سوالات امتحانی کلیک کنید

تماس با مشاور تحصیلی مدارس

۹۰۹۹۰۷۱۷۸۹



تماس از تلفن ثابت

# هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۴

روز اول

۱.  $n$  عددی طبیعی بزرگ‌تر از یک و  $p$  عددی اول است که  $n \mid p - 1$  و  $n \mid n^3 - 1$ . نشان دهید  $4p - 3$  مربع کامل است.

۲. در مثلث  $ABC$ ،  $\angle A = 6^\circ$ . نقطه‌ی متغیر  $D$  روی پاره‌خط  $BC$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $O_1$  مرکز دایره‌ی محیطی مثلث  $ABD$  و  $O_2$  مرکز دایره‌ی محیطی مثلث  $ACD$  باشد. محل تقاطع  $BO_1$  و  $CO_2$  را  $M$  و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث  $DO_1O_2$  را  $N$  می‌نامیم. ثابت کنید خط  $MN$  از نقطه‌ی ثابتی در صفحه می‌گذرد.

۳. کهکشان راه دوغی (!) بیش از یک میلیون ستاره دارد. نشان دهید، هر لحظه، فاصله‌های دویزه‌دوی این ستاره‌ها شامل دست کم ۷۹ عدد متمایز است. (هر ستاره را یک نقطه فرض کنید.)



## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

به نام او

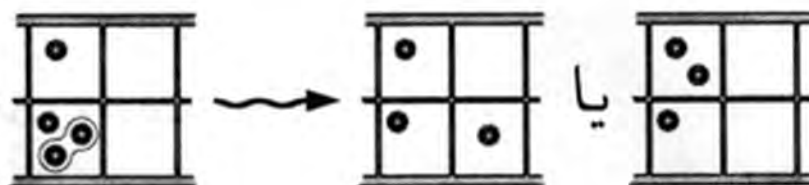
مرحله ی دوم بیست و سومین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۴

روز دوم

۴. در برخی از خانه های یک جدول  $2 \times n$  تعدادی مهره قرار دارد.



اگر در خانه ای بیش از یک مهره باشد، می توانیم دو مهره از آن خارج کنیم و در عوض یک مهره در خانه ی سمت راستش و یا یک مهره در خانه ی بالایی اش قرار دهیم.



فرض کنید که در ابتدا دست کم  $2^n$  مهره در جدول وجود داشته باشد. ثابت کنید می توان مهره ها را طوری جابه جا کرد که یک مهره به خانه ی انتهایی که در شکل با ستاره مشخص شده است، برسد.

۵.  $BC$  قطر یک دایره و  $XY$  وتری عمود بر  $BC$  است. نقاط  $M$  و  $P$  به ترتیب روی  $XY$  و  $CY$  یا امتداد آن ها به گونه ای قرار گرفته اند که  $CY \parallel PB$  و  $CX \parallel MP$ . محل تقاطع  $PB$  و  $CX$  را  $K$  می نامیم. ثابت کنید  $PB \perp MK$ .

۶. تمام توابع  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  را بیابید که برای هر  $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$(x + y)f(f(x)y) = x^y f(f(x) + f(y))$$

منظور از  $\mathbb{R}^+$  مجموعه ی اعداد حقیقی مثبت است. (توجه کنید که صفر عددی مثبت نیست!)