# هشتمین المپیاد هندسهٔ ایران

مسائل رویداد به همراه راه حل‌ها

# هشتمین المپیاد هندسهٔ ایران
## مسائل رویداد به همراه راه حل‌ها

این دفترچه توسط مهدی شاولی، الهه ظهیری، امیرمحمد درخشنده و علیرضا دادگرنیا آماده شده است.
با تشکر ویژه از حسام رجب‌زاده، مهدی اعتصامی فرد و مرتضی ثقفیان.

### کشورهای شرکت‌کننده

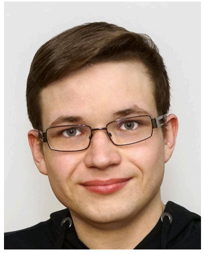
لیست کشورهای شرکت‌کننده در هشتمین المپیاد هندسهٔ ایران:

| | | |
|---|---|---|
| آرژانتین | آفریقای جنوبی | آلبانی |
| اتریش | ارمنستان | ازبکستان |
| استونی | اسلواکی | اسلونی |
| ال سالوادور | افغانستان | اوکراین |
| ایتالیا | ایران | ایرلند |
| برزیل | بلاروس | بلغارستان |
| بنگلادش | بوسنی و هرزگوین | بولیوی |
| پاراگوئه | پاکستان | پاناما |
| تاجیکستان | ترکمنستان | ترکیه |
| جمهوری چک | جمهوری دومینیکن | چین |
| روسیه | رومانی | سوریه |
| سوئد | فنلاند | فیلیپین |
| قرقیزستان | قزاقستان | کاستاریکا |
| کرواسی | کلمبیا | کوبا |
| کوزوو | لهستان | مالزی |
| مغولستان | مقدونیه | مکزیک |
| مولداوی | نپال | نیجریه |
| نیکاراگوئه | ونزوئلا | ویتنام |
| هلند | هند | هنگ کنگ |

کمیته برگزارکننده و کمیته علمی هشتمین المپیاد هندسه ایران از کشورهای زیر برای طرح ۱۰۰ سوال پیشنهادی تشکر می‌کند:

**جمهوری چک، هنگ کنگ، هند، ایران، مکزیک،**
**لهستان، روسیه، اسلواکی، انگلستان، ویتنام.**

**کمیته علمی**



Patrik Bak
(اسلواکی)

علیرضا دادگرنیا
(ایران)

مهدی اعتصامی فرد
(ایران)

Boris Frenkin
(روسیه)

Radek Olšák
(جمهوری چک)

پارسا حسینی نیری
(ایران)

مرتضی ثقفیان
(ایران)

Josef Tkadlec
(جمهوری چک)

داود وکیلی
(ایران)

علی زمانی
(ایران)

Alexey Zaslavsky
(روسیه)

با تشکر ویژه از:

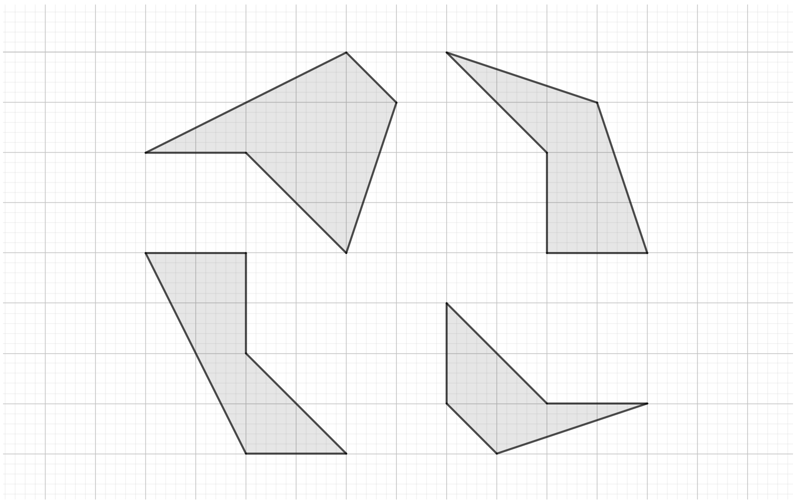
علیرضا شاولی، الهه ظهیری، سید محمد رضا خسرویان، مهدی شاولی، عارفه بوشهریان، علیرضا دانایی، محمد مشتاقی‌فر، امیرمحمد درخشنده، سید یاسین خراشادی‌زاده، سید یاسین موسوی، نیکی حسنی، مرتضی قلی‌زاده، سید حسن غفوری.

# فهرست مطالب

# سطح مقدماتی

# مسائل

**مسئلهٔ ۱.** با کنار هم قرار دادن چهار شکل زیر، شکلی با حداقل دو محور تقارن بسازید.



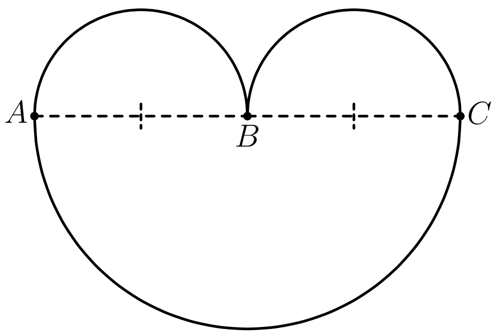
(← ص.۵)

**مسئلهٔ ۲.** نقاط $K$، $L$، $M$ و $N$ به ترتیب روی اضلاع $AB$، $BC$، $CD$ و $DA$ مربع $ABCD$ قرار دارند، به طوری که مساحت چهارضلعی $KLMN$ نصف مساحت مربع $ABCD$ باشد. ثابت کنید حداقل یکی از قطرهای چهارضلعی $KLMN$ با یکی از اضلاع مربع موازی است.

(← ص.۶)

**مسئلهٔ ۳.** همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، *قلب* شکلی است که شامل سه نیم‌دایره به قطرهای $AB$، $BC$ و $AC$ می‌شود، به طوری که $B$ وسط پاره‌خط $AC$ است.

قلب $\omega$ داده شده است. به جفت نقاط $(P, P')$ روی محیط $\omega$، یک جفت *نصف‌کننده* گوییم اگر با حرکت از $P$ تا $P'$ روی محیط $\omega$ نصف محیط آن طی شود. فرض کنید $(P, P')$ و $(Q, Q')$ جفت نقاط نصف‌کننده باشند. مماس‌هایی که از نقاط $P$، $P'$، $Q$ و $Q'$ بر $\omega$ رسم می‌شوند، چهارضلعی محدب $XYZT$ را تشکیل می‌دهند. اگر نقاط $X$، $Y$، $Z$ و $T$ روی یک دایره قرار داشته باشند، زاویه بین $PP'$ و $QQ'$ را بیابید.




(← ص.۷)

**مسئلهٔ ۴.** در ذوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ ($AB \parallel CD$) نقاط $E$ و $F$ روی پاره‌خط $CD$ قرار دارند به طوری که $DE = CF$ و نقاط $D$، $E$، $F$ و $C$ به همین ترتیب قرار دارند. فرض کنید نقاط $X$ و $Y$ به ترتیب قرینه $E$ و $C$ نسبت به $AD$ و $AF$ باشند. ثابت کنید دایره محیطی مثلث‌های $ADF$ و $BXY$ هم‌مرکزند.

(← ص.۹)

**مسئلهٔ ۵.** فرض کنید $A_۱, A_۲, \ldots, A_{۲۰۲۱}$، نقاطی در صفحه باشند به طوری که هیچ سه‌تایی همخط نیستند و

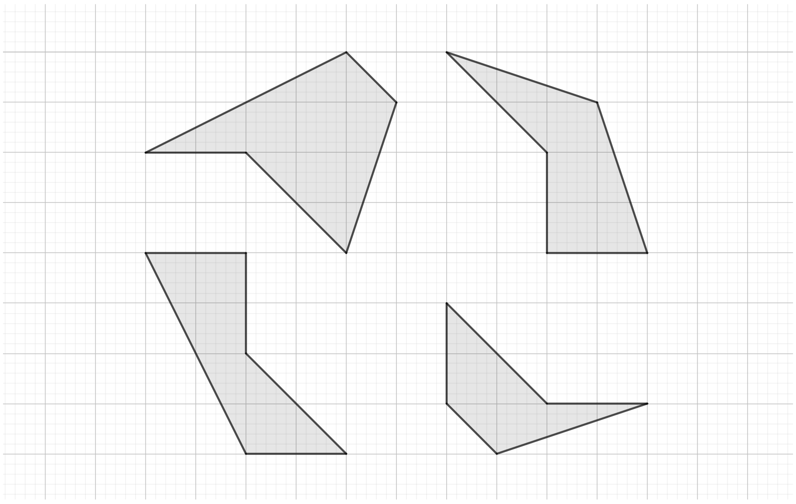
$$\angle A_۱A_۲A_۳ + \angle A_۲A_۳A_۴ + \cdots + \angle A_{۲۰۲۱}A_۱A_۲ = ۳۶۰^\circ$$

که منظور از زاویه $\angle A_{i-۱}A_iA_{i+۱}$ آن زاویه‌ای است که از $۱۸۰^\circ$ کوچک‌تر است (فرض کنید $A_{۲۰۲۲} = A_۱$ و $A_۰ = A_{۲۰۲۱}$).
ثابت کنید مجموع تعدادی از این زوایا برابر با $۹۰^\circ$ است.

(← ص.۱۱)

# راه حل‌ها

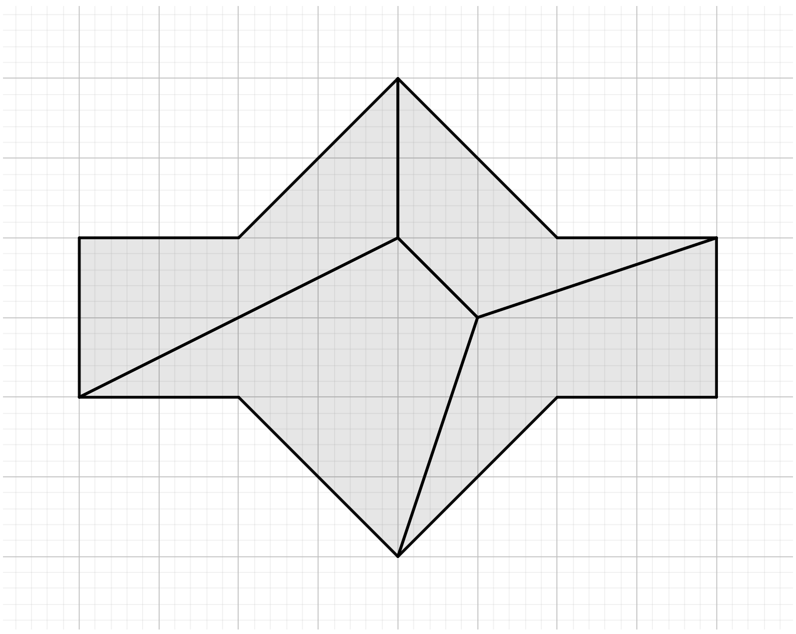
**مسئلهٔ ۱.** با کنار هم قرار دادن چهار شکل زیر، شکلی با حداقل دو محور تقارن بسازید.



*طرح شده توسط مهدی اعتصامی فرد ــ ایران*

---

**راه حل.** می‌توان شکل‌ها را به صورت زیر کنار یکدیگر قرار داد تا خواستهٔ مسئله برآورده شود:

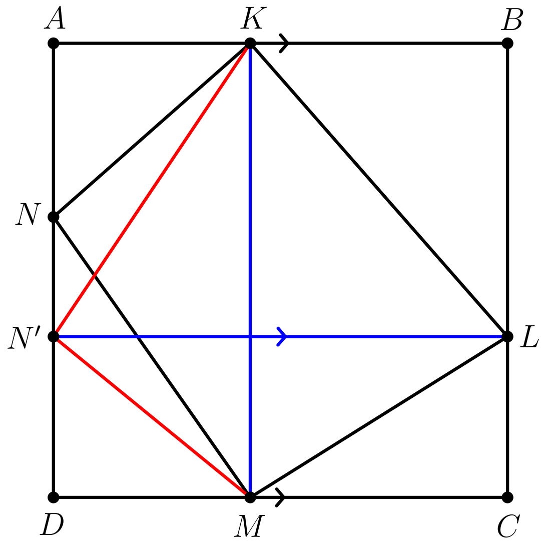


**مسئلهٔ ۲.** نقاط $K$، $L$، $M$ و $N$ به ترتیب روی اضلاع $AB$، $BC$، $CD$ و $DA$ مربع $ABCD$ قرار دارند، به طوری که مساحت چهارضلعی $KLMN$ نصف مساحت مربع $ABCD$ باشد. ثابت کنید حداقل یکی از قطرهای چهارضلعی $KLMN$ با یکی از اضلاع مربع موازی است.

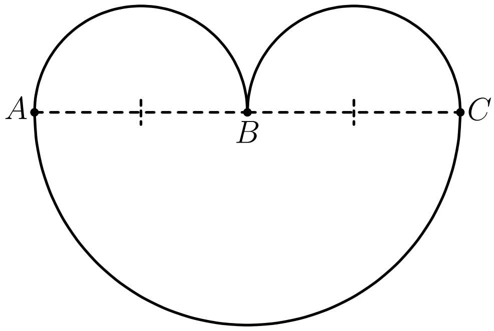
*طرح شده توسط* $Josef\ Tkadlec$ ـ جمهوری چک

---

**راه حل.** مساحت چندضلعی $P$ را به صورت $[P]$ نشان دهید. فرض کنید $AB \nparallel LN$ و $N' \neq N$ نقطه‌ای روی $AD$ باشد که $AB \parallel LN'$. دقت کنید $[KLMN'] = \frac{1}{2}[ABCD]$. پس $[KLMN] = [KLMN']$, بنابراین $[KMN] = [KMN']$ که نتیجه خواهد داد : $KM \parallel NN' = AD$.



**مسئلهٔ ۳.** همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، *قلب* شکلی است که شامل سه نیم‌دایره به قطرهای $AB$، $BC$ و $AC$ می‌شود، به طوری که $B$ وسط پاره‌خط $AC$ است.
قلب $\omega$ داده شده است. به جفت نقاط $(P, P')$ روی محیط $\omega$، یک جفت *نصف‌کننده* گوییم اگر با حرکت از $P$ تا $P'$ روی محیط $\omega$ نصف محیط آن طی شود. فرض کنید $(P, P')$ و $(Q, Q')$ جفت نقاط نصف‌کننده باشند. مماس‌هایی که از نقاط $P$، $P'$، $Q$ و $Q'$ بر $\omega$ رسم می‌شوند، چهارضلعی محدب $XYZT$ را تشکیل می‌دهند. اگر نقاط $X$، $Y$، $Z$ و $T$ روی یک دایره قرار داشته باشند، زاویه بین $PP'$ و $QQ'$ را بیابید.




*طرح شده توسط مهدی اعتصامی فرد ـ ایران*

---

**راه حل.** حکم مساله را هم برای چهارضلعی‌های محدب و هم برای چهارضلعی‌های غیرمحدب ثابت می‌کنیم.
**لم ۱.** *فرض کنید $(P, P')$ جفتی نصف‌کننده باشد، آنگاه نقاط $P$ ، $P'$ ، و $B$ همخطند.*

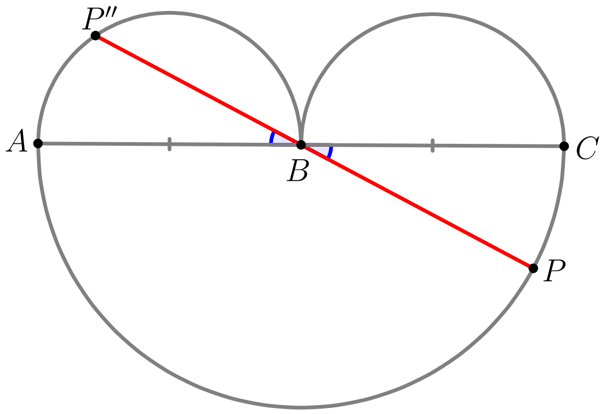
*اثبات.* بدون کم شدن از کلیت مساله فرض کنید $P$ روی کمان $AC$ طوری قرار داشته باشد که محل برخورد $PB$ با کمان $AC$ نقطه‌ی $P''$ باشد. به‌وضوح طول کمان $P''A$ برابر است با

$$(\text{محیط نیم‌دایره به قطر } AB) \times \frac{۲\angle P''BA}{۱۸۰^\circ}$$

و طول کمان $PC$ برابر است با

$$(\text{محیط نیم‌دایره به قطر } AC) \times \frac{\angle PBC}{۱۸۰^\circ}$$

البته که طول نیم‌دایره‌ی $AB$ برابر با $\frac{\pi AB}{۲}$ و طول نیم‌دایره‌ی $AC$ برابر با $\frac{\pi AC}{۲}$است. بنابراین طول کمان $P''A$ برابر است با $\frac{\pi AB}{۲} \times \frac{۲\angle P''BA}{۱۸۰^\circ}$ و طول کمان $PC$ برابر $\frac{\pi AC}{۲} \times \frac{\angle PBC}{۱۸۰^\circ}$ است که با یکدیگر برابر می‌باشند. پس $PP''$ محیط قلب را نصف می‌کند. اما برای هر نقطه $P$ تنها یک نقطه مانند $P'$ وجود دارد که زوج $(P, P')$ جفتی *نصف‌کننده* باشد. پس $P' \equiv P''$ که نتیجه می‌دهد که نقاط $P, P', B$ همخطند.

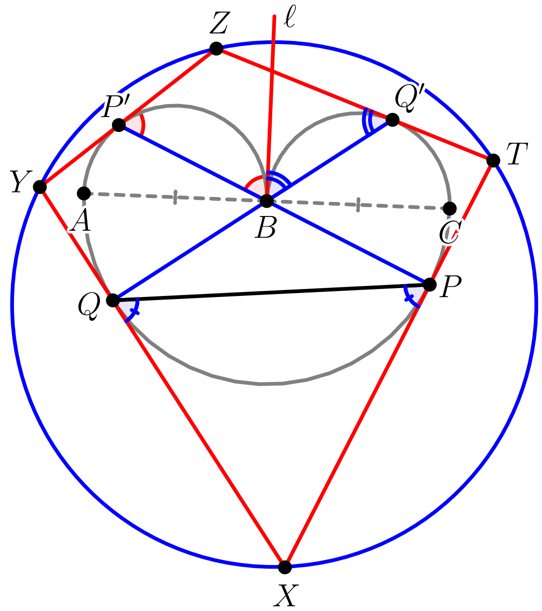



□

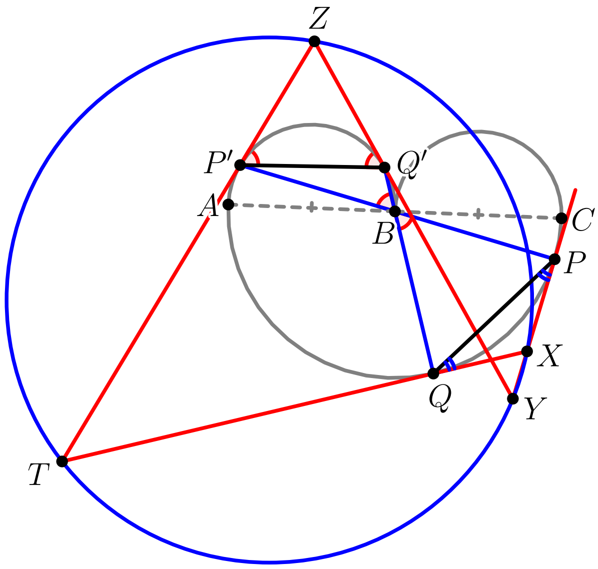
بدون کم شدن از کلیت مساله فرض کنید نقاط $P, Q$ روی کمان $AC$ قرار دارند. حال مساله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم:
**حالت ۱ .** نقاط $P, Q$ طوری روی کمان $AC$ قرار دارند که $P', Q'$ هر دو روی کمان $AB$ می‌افتند.
با استفاده از کمی زاویه بازی داریم: $\angle PBQ = ۲\angle XPQ = ۲\angle XQP$ و $\angle P'BQ' = \angle ZP'Q' = \angle ZQ'P'$. پس نتیجه زیر باید درست باشد:

$$۱۸۰^\circ = \angle PXQ + \angle P'Q'X = (۱۸۰^\circ - \angle PBQ) + (۱۸۰^\circ - ۲\angle P'BQ' = ۳۶۰ - ۳\angle PBQ$$

پس $\angle PBQ = ۶۰^\circ$.



حالت ۲



حالت ۱

**حالت ۲ .** نقاط $P, Q$ طوری روی کمان $AC$ قرار دارند که $P'$ روی کمان $AB$ و $Q'$ روی کمان $BC$ قرار دارند. فرض کنید $\ell$ مماس از $B$ به قلب باشد.
بنابراین $\angle P'B\ell = \angle BP'Z$ و $\angle Q'B\ell = \angle BQ'Z$. پس $\angle P'ZQ' = ۳۶۰^\circ - ۲\angle P'BQ'$. سخت نیست که مشاهده کنیم که $\angle PBQ = ۲\angle XPQ = ۲\angle XQP$. پس $\angle PXQ = ۱۸۰ - \angle PBQ$. پس باید داشته‌باشیم:

$$۱۸۰^\circ = \angle PXQ + \angle P'ZQ' = (۱۸۰^\circ - \angle PBQ) + (۳۶۰^\circ - ۲\angle P'BQ') = ۵۴۰^\circ - ۳\angle PBQ$$

بنابراین $\angle PBQ = ۱۲۰^\circ$.
پس در هر دو حالت بررسی شده زاویه‌ی بین خطوط $PP'$ و $QQ'$ برابر با $۶۰^\circ$ است.

**مسئلهٔ ۴.** در ذوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ ($AB \parallel CD$) نقاط $E$ و $F$ روی پاره‌خط $CD$ قرار دارند به طوری که $DE = CF$ و نقاط $D$، $E$، $F$ و $C$ به همین ترتیب قرار دارند. فرض کنید نقاط $X$ و $Y$ به ترتیب قرینه $E$ و $C$ نسبت به $AD$ و $AF$ باشند. ثابت کنید دایره محیطی مثلث‌های $ADF$ و $BXY$ هم‌مرکزند.

*طرح شده توسط ایمان مقصودی ـ ایران*

---

**راه حل ۱ .** نقطه‌ی $Z$ را روی $AB$ طوری در نظر بگیرید که $AZFB$ ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین فلذا محاطی شود. فرض کنید مرکز دایره محیطی این ذوزنقه $O$ باشد. از آنجا که $X$ و $Y$ قرینه‌های $E$ و $C$ نسبت به $AD$ و $AF$ بوده و چهارضلعی $ZBCF$ متوازی‌الاضلاع است، نتیجه می‌شود:

$$ED = XD = CF = FY = ZB$$

فرض کنید $AF$ ، $CY$ را در $H$ قطع می‌کند . اکنون توجه کنید که :

$$\angle OZB = \angle OZF + \angle FZB = ۹۰^\circ - \angle ZDF + \angle BCD = ۹۰^\circ - \angle AFD + \angle ADC$$

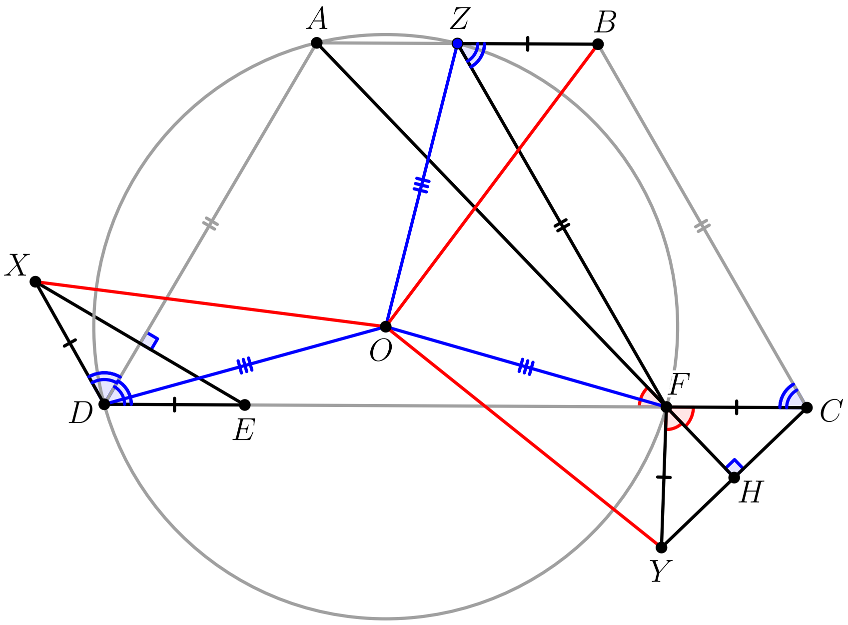
$$\angle ODX = \angle ODA + \angle ADX = ۹۰^\circ - \angle AFD + \angle ADC$$

$$\angle OFY = ۱۸۰^\circ - \angle OFA - \angle YFH = ۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ - \angle ADC) - \angle HFC = ۹۰^\circ - \angle AFD + \angle ADC$$

ااین سه معادله به همراه $ZB = XD = FY$ و $OZ = OD = OF$ نتیجهٔ زیر را به ما خواهند داد :

$$\triangle OZB \cong \triangle ODX \cong \triangle OFY \Longrightarrow OB = OX = OY$$

که مسئله را حل خواهد کرد.




**راه حل ۲ .** فرض کنید $\omega$ دایره محیطی مثلث $ADF$ باشد که $AD, XD, YF$ را به‌ترتیب در $T, K, L$ قطع می‌کند. از آنجا که $X$ و $Y$ قرینه‌های $E$ و $C$ نسبت به $AD$ و $AF$ هستند و چون $AD = BC$، بنابراین $AX = AE$ و $AY = AC$ که نتیجه می‌دهد $ABFE$ ذوزنقه متساوی‌الساقین است. سپس

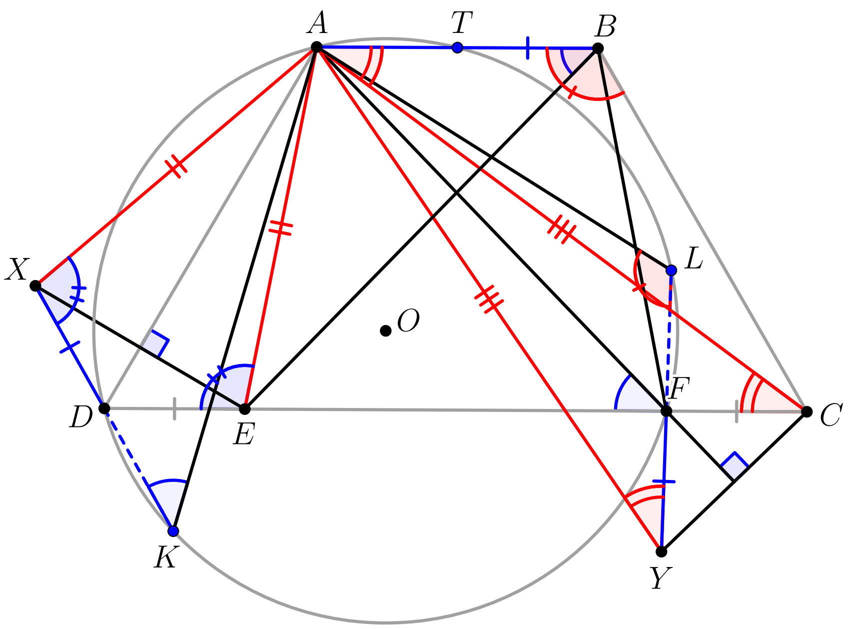
$$\angle BAE = \angle AED = \angle AXD$$

$$\angle ABE = \angle AFD = \angle AKX$$

دو نتیجه بالا و برابری $AX$ و $AE$ نشان می‌دهند که دو مثلث $ABE$ و $AXK$ همنهشتند و برابری $AB = XK$ از آن نتیجه می‌شود. به طور مشابه می‌توان نشان داد $AB = YL$. حال دقت کنید که

$$P_\omega^B = BT \cdot AB = OB^۲ - OD^۲$$
$$P_\omega^X = XD \cdot XK = OX^۲ - OD^۲$$
$$P_\omega^Y = YF \cdot YL = OY^۲ - OD^۲$$

از قبل برابری‌های $AB = XK = YL$ و $BT = XD = YF$ را ثابت کرده‌بودیم. پس قوت نقاط $B$، $X$ و $Y$ نسبت به $\omega$ همه با هم برابرند که نتیجه می‌دهد $OB = OX = OY$ و اثبات مسئله تمام است.



**مسئلهٔ ۵.** فرض کنید $A_۱, A_۲, \ldots, A_{۲۰۲۱}$، نقاطی در صفحه باشند به طوری که هیچ سه‌تایی همخط نیستند و

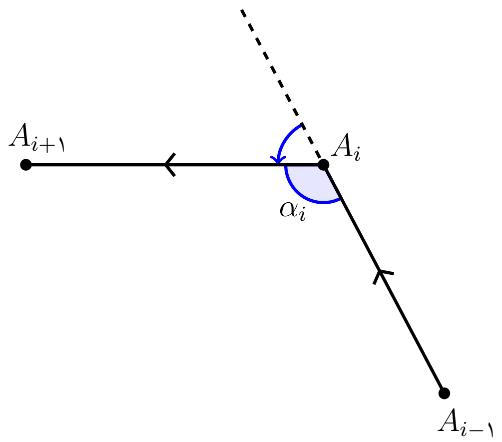
$$\angle A_۱A_۲A_۳ + \angle A_۲A_۳A_۴ + \cdots + \angle A_{۲۰۲۱}A_۱A_۲ = ۳۶۰^\circ$$

که منظور از زاویه $\angle A_{i-۱}A_iA_{i+۱}$ آن زاویه‌ای است که از $۱۸۰^\circ$ کوچک‌تر است (فرض کنید $A_{۲۰۲۲} = A_۱$ و $A_۰ = A_{۲۰۲۱}$). ثابت کنید مجموع تعدادی از این زوایا برابر با $۹۰^\circ$ است.

*طرح شده توسط مرتضی ثقفیان ـ ایران*

---

**راه حل.** $\alpha_i$ را زاویه‌ی $\angle A_{i-۱}A_iA_{i+۱}$ قرار دهید که از $۱۸۰^\circ$ کمتر است.




با شروع از $A_۱$، روی محیط چندضلعی (نه لزوما ساده) $A_۱A_۲\ldots A_{۲۰۲۱}$ قدم می‌زنیم. زمانی که به یک راس مثل $A_i$ رسیدیم به اندازه‌ی $۱۸۰^\circ - \alpha_i$ درجه در جهت ساعتگرد یا پادساعتگرد می‌چرخیم. پس از اینکه یک دور کامل چرخیدیم و دوباره به ضلع $A_۱A_۲$ رسیدیم ، به اندازه‌ی مضربی از$۳۶۰^\circ$ چرخیده‌ایم. بنابراین جمع جبری زوایای چرخیده شده مضربی از $۳۶۰^\circ$ می‌باشد. یا معادلا اگر $C_۱$ و $C_۲$ را به ترتیب مجموعه زوایای ساعتگرد و پادساعتگرد تعریف کنیم برای یک $k$ فیکس خواهیم داشت:

$$۳۶۰^\circ k = \sum_{\alpha_i \in C_۱} (۱۸۰^\circ - \alpha_i) - \sum_{\alpha_j \in C_۲} (۱۸۰^\circ - \alpha_j)$$

اما تعداد رئوس موجود ۲۰۲۱ تاست که عددی فرد است پس اگر از معادله بالا ۱۸۰ ها را تا جای ممکن ساده کنیم برای یک عدد فیکس $t$ خواهیم داشت:

$$۳۶۰^\circ t + ۱۸۰^\circ = \sum_{\alpha_i \in C_۱} \alpha_i - \sum_{\alpha_j \in C_۲} \alpha_j$$

از سوی دیگر طبق فرض‌های مساله جمع $\sum_{\alpha_i \in C_۱} \alpha_i + \sum_{\alpha_j \in C_۲} \alpha_j$ برابر $۳۶۰^\circ$ می‌باشد. این نتیجه خواهد داد که $\sum_{\alpha_i \in C_۱} \alpha_i - \sum_{\alpha_j \in C_۲} \alpha_j = \pm ۱۸۰^\circ$. از این رو این دو جمع باید برابر با $۹۰^\circ$ و $۲۷۰^\circ$ باشند

# سطح متوسط

# مسائل

**مسئلهٔ ۱.** فرض کنید $ABC$ مثلثی متساوی‌الساقین ($AB = AC$) باشد. نقطه $H$ مرکز ارتفاعی $ABC$ و نقطه $E$ وسط $AC$ است. نقطه $D$ روی ضلع $BC$ قرار دارد به طوری که $۳CD = BC$. ثابت کنید $BE \perp HD$.

(← ص.۱۷)

**مسئلهٔ ۲.** متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داده شده است. نقاط $E$ و $F$ به ترتیب روی اضلاع $AB$ و $CD$ قرار دارند به طوری که $\angle EDC = \angle FBC$ و $\angle ECD = \angle FAD$. ثابت کنید $AB \geq ۲BC$.

(← ص.۱۸)

**مسئلهٔ ۳.** در چهارضلعی محدب $ABCD$ می‌دانیم $AB = BC$ و $\angle ABD = \angle BCD = ۹۰^\circ$. فرض کنید نقطه $E$ تقاطع قطرهای $AC$ و $BD$ باشد. نقطه $F$ روی ضلع $AD$ قرار دارد به طوری که $\frac{AF}{FD} = \frac{CE}{EA}$. دایره $\omega$ به قطر $DF$ و دایره محیطی مثلث $ABF$ برای بار دوم یکدیگر را در $K$ قطع می‌کنند. نقطه $L$ تقاطع دوم $EF$ با $\omega$ است. ثابت کنید خط $KL$ از وسط پاره‌خط $CE$ می‌گذرد.

(← ص.۲۰)

**مسئلهٔ ۴.** فرض کنید $ABC$ مثلثی مختلف‌اضلاع، با مرکز دایره محاطی $I$ و دایره محیطی $\Gamma$ باشد. خط $AI$ برای بار دوم $\Gamma$ را در $M$ قطع می‌کند. فرض کنید $N$ وسط ضلع $BC$ و $T$ نقطه‌ای روی $\Gamma$ باشد به طوری که $IN \perp MT$. محل برخورد $TB$ و $TC$ با عمودی که از $I$ بر $AI$ رسم می‌شود را به ترتیب $P$ و $Q$ بنامید. نشان دهید $PB = CQ$.

(← ص.۲۱)

**مسئلهٔ ۵.** فرض کنید $ABCDE$ یک پنج ضلعی محدب و $X$ نقطه‌ای متغیر روی ضلع $CD$ باشد. نقاط $K$ و $L$ روی خط $AX$ قرار دارند به طوری که $AB = BK$ و $AE = EL$. محل برخورد دوم دایره محیطی مثلث‌های $CXK$ و $DXL$ را $Y$ بنامید. ثابت کنید با حرکت کردن $X$، همه خطوط $XY$ از نقطه‌ای ثابت می‌گذرند، یا همه با هم موازی‌اند.

(← ص.۲۳)

# راه حل‌ها

**مسئلهٔ ۱.** فرض کنید $ABC$ مثلثی متساوی‌الساقین ($AB = AC$) باشد. نقطه $H$ مرکز ارتفاعی $ABC$ و نقطه $E$ وسط $AC$ است. نقطه $D$ روی ضلع $BC$ قرار دارد به طوری که $۳CD = BC$. ثابت کنید $BE \perp HD$.

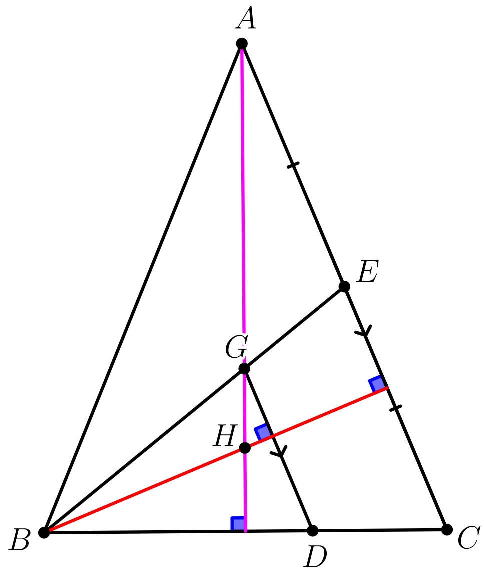
*طرح شده توسط Tran Quang Hung* ـ ویتنام

---

**راه حل.** فرض کنید $G$ مرکز ثقل مثلث $ABC$ باشد. دقت کنید که

$$\frac{CD}{BC} = \frac{۱}{۳} = \frac{EG}{EB}$$

بنابراین $EC \parallel GD$. از آنجایی که $H$ مرکز ارتفاعی مثلث $ABC$ است $BH \perp AC$ در نتیجه $BH \perp GD$. همچنین $BC \perp GH$ ، پس به وضوح $H$ مرکز ارتفاعی مثلث $BGD$ بوده و $DH \perp BE$ که حکم مسئله است.



**مسئلهٔ ۲.** متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داده شده است. نقاط $E$ و $F$ به ترتیب روی اضلاع $AB$ و $CD$ قرار دارند به طوری که $\angle EDC = \angle FBC$ و $\angle ECD = \angle FAD$. ثابت کنید $AB \geq ۲BC$.

*طرح شده توسط پوریا محمودخان شیرازی ـ ایران*

---

**راه حل ۱ .** در ابتدا با کمی زاویه‌بازی متوجه می‌شویم که $\angle DAF = \angle ECB = \angle CEB$ و $\angle EBC = \angle ADF$. پس $\triangle DAF \sim \triangle BEC$ در نتیجه $\frac{DF}{BC} = \frac{AD}{BE}$. به طور مشابه می‌توان نشان داد $\frac{BC}{AE} = \frac{CF}{AD}$. با ضرب کردن این دو رابطه خواهیم داشت:

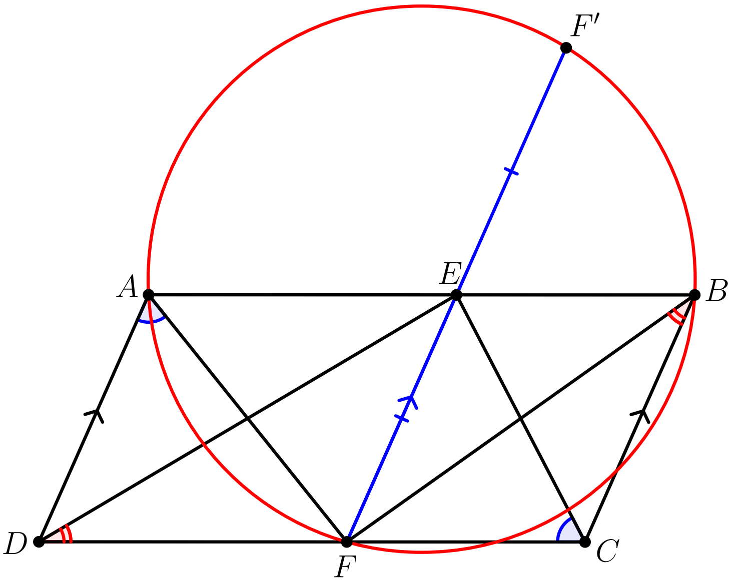
$$\frac{CF}{BE} = \frac{DF}{AE} \Longrightarrow EF \parallel AD \parallel BC.$$

اکنون فرض کنید $F'$ قرینهٔ $F$ نسبت به $E$ باشد. بنابراین چهارضلعی‌های $BCEF'$،$ADEF'$ متوازی الاضلاع هستند و $\angle BF'E = \angle BCE = \angle BAF$ و $\angle AF'E = \angle ADE = \angle ABF$.
با جمع کردن این روابط داریم $\angle AF'B = ۱۸۰^\circ - \angle AFB$. پس چهارضلعی $AF'BF$ محاطی است و

$$AE \cdot EB = EF \cdot EF' = EF^۲ = BC^۲.$$

در نهایت با استفاده از نامساوی حسابی‌ـ هندسی $AM - GM$ حکم مسئله را اثبات می‌کنیم :

$$BC^۲ = AE \cdot EB \leq \left(\frac{AE + EB}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{AB}{۲}\right)^۲ \Longrightarrow ۲BC \leq AB.$$

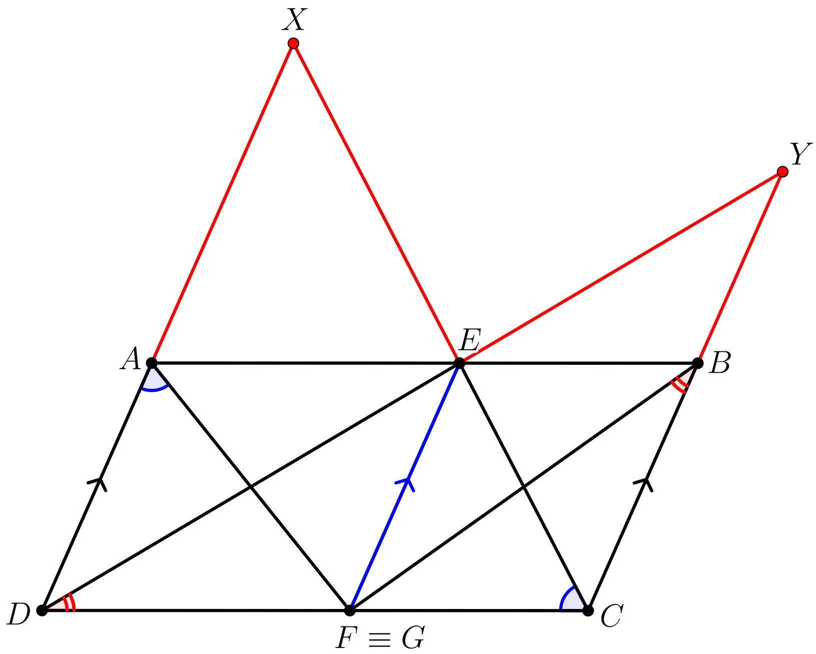



**راه حل ۲ .** محل برخورد $DE$،$CE$ را با $BC$،$AD$ به ترتیب $Y$،$X$ بنامید. به وضوح چهارضلعی‌های $DYBF$ و $CXAF$ محاطی‌اند.
با توجه به قوت نقاط $C, D$ نسبت به دایره محیطی این چهارضلعی‌های محاطی روابط $CF \cdot CD = CB \cdot CY$ و $DF \cdot CD = DA \cdot DX$ درست خواهند بود. با جمع کردن دو تساوی ذکرشده ، روابط زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}&(CF + DF) \cdot CD = CB \cdot CY + DA \cdot DX\\ &\Longrightarrow CD^۲ = CB \cdot CY + CB \cdot DX\\ &\Longrightarrow CD^۲ = (CY + DX) \cdot CB \qquad (۱)\end{aligned}$$

حال فرض کنید خطی که از $E$ موازی $BC$ رسم می‌شود $CD$ را در $G$ قطع کند. پس

$$\frac{DX}{EG}=\frac{CD}{CG}\implies DX=\frac{CD\cdot EG}{CG}=\frac{CD\cdot BC}{CG}$$
$$\frac{CY}{EG}=\frac{CD}{DG}\implies CY=\frac{CD\cdot EG}{DG}=\frac{CD\cdot BC}{DG}.$$




پس

$$DX+CY=CD\cdot BC\left(\frac{۱}{CG}+\frac{۱}{DG}\right).$$

حال با استفاده از نامساوی حسابی_توافقی $AM-HM$ بر روی تساوی آخر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}CD\cdot BC\cdot\left(\frac{۱}{CG}+\frac{۱}{DG}\right)&\geq CD\cdot BC\cdot\frac{۴}{CG+DG}\\&=CD\cdot BC\cdot\frac{۴}{CD}\\&=۴BC.\end{aligned}$$

اکنون با استفاده از (۱) به‌دست می‌آوریم :

$$\begin{aligned}\frac{CD^{۲}}{BC}=DX+CY\geq ۴BC&\implies CD^{۲}\geq ۴BC^{۲}\\&\implies AB\geq ۲BC,\end{aligned}$$

و حکم مسئله اثبات می‌شود.

**تذکر .** طبق راه حل اول می‌دانیم نقاط $F$ و $G$ یکسان هستند اما در راه حل دوم لزومی برای اثبات این موضوع نداریم.

**مسئلهٔ ۳.** در چهارضلعی محدب $ABCD$ می‌دانیم $AB = BC$ و $\angle ABD = \angle BCD = ۹۰^\circ$. فرض کنید نقطه $E$ تقاطع قطرهای $AC$ و $BD$ باشد. نقطه $F$ روی ضلع $AD$ قرار دارد به طوری که $\frac{AF}{FD} = \frac{CE}{EA}$. دایره $\omega$ به قطر $DF$ و دایره محیطی مثلث $ABF$ برای بار دوم یکدیگر را در $K$ قطع می‌کنند. نقطه $L$ تقاطع دوم $EF$ با $\omega$ است. ثابت کنید خط $KL$ از وسط پاره‌خط $CE$ می‌گذرد.

*طرح شده توسط مهدی اعتصامی فرد و امیر پارسا حسینی نیری ـ ایران*

---

**راه حل.** $K'$ را نقطه ای در نظر بگیرید که دو مثلث $ABC$ و $AK'D$ با همین ترتیب رئوس با یکدیگر متشابه باشند. ادعا می‌کنیم دو نقطه‌ی $K$ و $K'$ یکی هستند. از آنجایی که $\frac{AE}{EC} = \frac{DF}{FA}$، مثلث‌های $FK'D$ و $EBA$ نیز با یکدیگر متشابه می‌شوند. پس $\angle FK'D = \angle ABE = ۹۰^\circ$ ، درنتیجه برای اثبات ادعایمان کافی است نشان دهیم $A$، $B$، $F$، و $K'$ روی یک دایره قرار دارند. از سوی دیگر:

$$\angle DEC = ۹۰^\circ - \angle BAC = ۹۰^\circ - \angle BCA = \angle DCE, \qquad (۱)$$

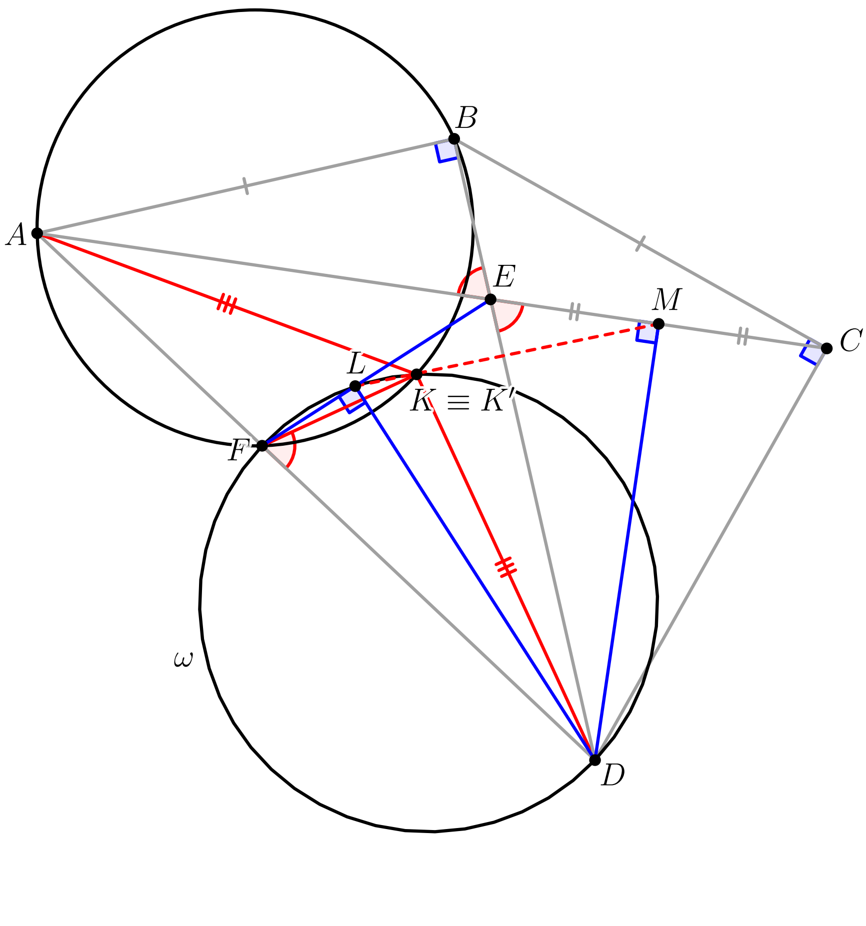
پس $DC = DE$. همچنین از آنجایی که $\triangle ABC$ و $\triangle AK'D$ با یکدیگر متشابه‌اند ، نتیجه می‌شود که مثلث های $\triangle ABK'$ و $\triangle ACD$ نیز متشابه‌اند. بنابراین

$$\angle ABK' = \angle ACD \overset{(۱)}{=} \angle DEC = \angle AEB = \angle K'FD,$$

پس چهارضلعی $ABFK'$ محاطی است و ادعا اثبات می‌شود.
حال برای حل مسئله وسط $CE$ را $M$ بنامید. دقت کنید $\angle DME = ۹۰^\circ$، زیرا $DC = DE$. که نتیجه می‌دهد نقاط $E$، $L$، $D$، و $M$ روی یک دایره قرار دارند. پس

$$\angle MLD = \angle MED = \angle AEB = \angle KFD = \angle KLD,$$

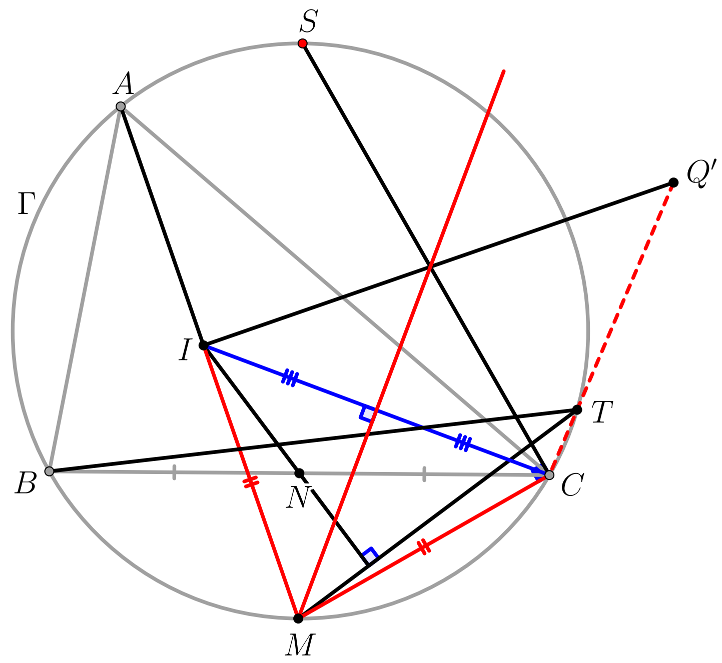
که همخطی موردنظر را نتیجه می‌دهد.



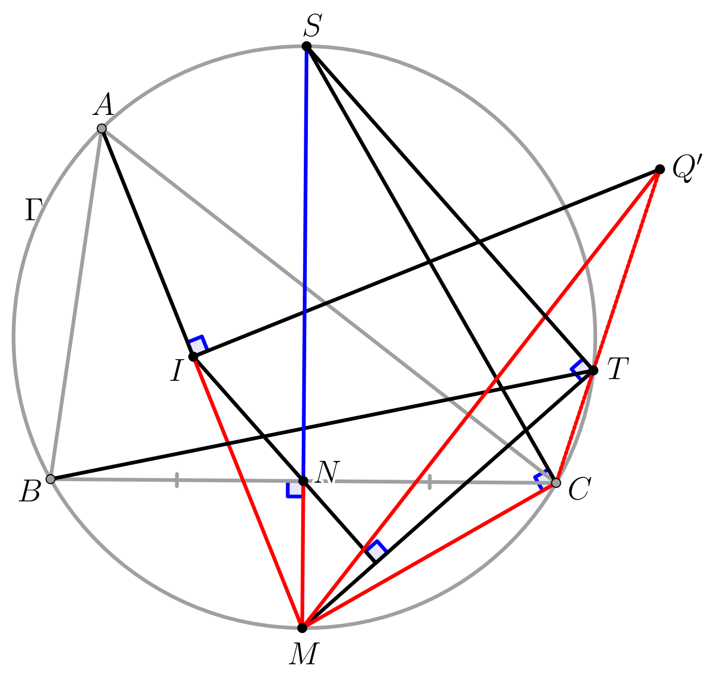
**مسئلهٔ ۴.** فرض کنید $ABC$ مثلثی مختلف‌اضلاع، با مرکز دایره محاطی $I$ و دایره محیطی $\Gamma$ باشد. خط $AI$ برای بار دوم $\Gamma$ را در $M$ قطع می‌کند. فرض کنید $N$ وسط ضلع $BC$ و $T$ نقطه‌ای روی $\Gamma$ باشد به طوری که $IN \perp MT$. محل برخورد $TB$ و $TC$ با عمودی که از $I$ بر $AI$ رسم می‌شود را به ترتیب $P$ و $Q$ بنامید. نشان دهید $PB = CQ$.

*طرح شده توسط Patrik Bak ـ اسلواکی*

**راه حل.** وسط کمان $BAC$ از دایرهٔ $\Gamma$ را $S$ و قرینهٔ $S$ نسبت به عمود منصف $IC$ را $Q'$ بنامید. ادعا میکنیم $Q'$ و $Q$ یکی هستند که نتیجه می‌دهد $SI = QC$. به طور مشابه می‌توان نشان داد $SI = PB$ و حکم مسئله نتیجه می‌شود.




طبق قضیهٔ معروفی می‌دانیم نقطهٔ $M$ مرکز دایره محیطی مثلث $BIC$ است پس عمود منصف $CI$ از $M$ می‌گذرد. از آنجایی که $MS$ قطری از $\Gamma$ است نتیجه می‌شود $MC \perp SC$، و با توجه به تقارن $Q'I \perp MI$. حال کافی است ثابت کنیم $Q', C, T$ همخط هستند.



می‌دانیم که $\angle NCM = \angle MSC = \angle IQ'M$. همچنین دقت کنید که $MN \perp NC$. این دو با یکدیگر نتیجه می‌دهند که دو مثلث $MIQ'$ و $MNC$ با همین ترتیب حروف متشابه‌اند در نتیجه مثلث‌های $MIN$ و $MQ'C$ نیز با همین ترتیب حروف با یکدیگر متشابه‌اند.

حال از آنجایی که $IN \perp MT$ و $ST \perp MT$، خطوط $IN$ و $ST$ موازی بوده ، پس $\angle SNI = \angle MST = \angle MCT$.
اکنون با این نتیجه و $\angle Q'CM = \angle INM$ همخطی نقاط $T$، $C$، و $Q'$ به‌دست می‌آید و اثبات کامل می‌شود.

**مسئلهٔ ۵.** فرض کنید $ABCDE$ یک پنج ضلعی محدب و $X$ نقطه‌ای متغیر روی ضلع $CD$ باشد. نقاط $K$ و $L$ روی خط $AX$ قرار دارند به طوری که $AB = BK$ و $AE = EL$. محل برخورد دوم دایره محیطی مثلث‌های $CXK$ و $DXL$ را $Y$ بنامید. ثابت کنید با حرکت کردن $X$، همه خطوط $XY$ از نقطه‌ای ثابت می‌گذرند، یا همه با هم موازی‌اند.

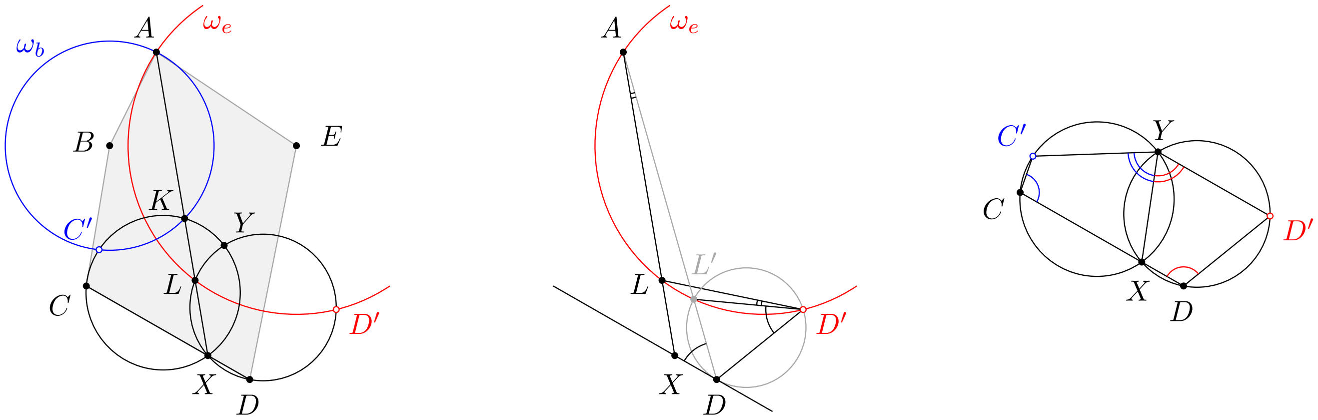
طرح شده توسط *Josef Tkadlec* ــ جمهوری چک

---

**راه حل.** فرض کنید $\omega_b$ ، $\omega_e$ دوایری به مراکز $B$، $E$ و گذرنده از $A$ باشند. (دقت کنید که $K \in \omega_b$ و $L \in \omega_e$). زین پس دایره محیطی مثلثی مثل $XYZ$ را با نماد $(XYZ)$ و زاویه‌ی بین خطوط $p, q$ را با $\angle(p, q)$ نمایش می‌دهیم.
در ابتدا نشان می‌دهیم تمام دوایر $(DXL)$ از نقطه‌ی ثابتی مثل $D'$ که روی دایره‌ی $\omega_e$ واقع است می‌گذرند. با مشاهده حالت خاص $X = D$ حدس می‌زنیم که اگر $L' = AD \cap \omega_e$ آنگاه $D'$ باید همان محل برخورد $\omega_e$ با دایره‌ی گذرنده از $L'$ و $D$ و مماس بر $CD$ باشد که در این حدس $D'$ همانطور که می‌خواستیم نقطه‌ای ثابت است. به درستی برای هر $X$ و $L$ متناظر با آن :

$$\angle(D'L, D'D) = \angle(D'L, D'L') + \angle(D'L', D'D) = \angle(AL, AL') + \angle(DL', DX)$$
$$= \angle(AX, AD) + \angle(DA, DX) = \angle(XA, XD) = \angle(XL, XD),$$

پس $(XLD)$ از $D'$ می‌گذرد. مشابها تمام دوایر $(CXK)$ از نقطه‌ی ثابتی مثل $C'$ روی $\omega_b$ می‌گذرد.




حال می‌توان مساله را از نگاه چهارضلعی (ثابت) $C'CDD'$ بیان کرد. دقت کنید که زاویه‌ی $\angle(YC', YD')$ ثابت است. به وضوح:

$$\angle(YC', YD') = \angle(YC', YX) + \angle(YX, YD') = \angle(CC', CX) + \angle(DX, DD') = \angle(CC', DD').$$

حکم را با توجه به دو حالت نتیجه می‌گیریم:
**حالت ۱ .** $Y \in C'D'$ :
از جایی که $\angle(YC', YX) = \angle(CC', CX)$ ثابت است، تمام خطوط $XY$ با $CD$ زاویه برابر درست می‌کنند پس همگی موازی‌اند.
**حالت ۲ .** $Y \notin C'D'$:
از جایی که $\angle(YC', YX) = \angle(CC', CX)$ ثابت است، تمام خطوط $XY$ دایره‌ی $(YC'D')$ را در نقطه‌ی ثابتی قطع می‌کنند.

# سطح پیشرفته

# مسائل

**مسئلهٔ ۱.** مثلث حادةالزاویه $ABC$ با دایره محیطی $\omega$ داده شده است. نقطه $D$ وسط ضلع $AC$، نقطه $E$ پای ارتفاع $A$ بر $BC$ و نقطه $F$ محل برخورد خطوط $DE$ و $AB$ است. نقطه $H$ روی کمان $BC$ از $\omega$ (کمانی که شامل $A$ نیست) قرار دارد به طوری که $\angle BHE = \angle ABC$. ثابت کنید $\angle BHF = ۹۰^\circ$.

(← ص.۲۹)

**مسئلهٔ ۲.** دو دایره $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ در دو نقطه $A$ و $B$ تقاطع دارند. خطی از $A$ می‌گذرد و $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ را به ترتیب در $C$ و $D$ قطع می‌کند، به طوری که $A$ بین $C$ و $D$ قرار دارد. مماس از $A$ بر $\Gamma_۲$ برای بار دوم $\Gamma_۱$ را در $E$ قطع می‌کند. فرض کنید $F$ نقطه‌ای روی $\Gamma_۲$ باشد به طوری که $F$ و $A$ در دو طرف متفاوت $BD$ قرار دارند و $۲\angle AFC = \angle ABC$. ثابت کنید مماس از $F$ بر $\Gamma_۲$ و خطوط $BD$ و $CE$ همرسند.

(← ص.۳۰)

**مسئلهٔ ۳.** مثلث $ABC$ با ارتفاع‌های $AD$، $BE$ و $CF$ و مرکز ارتفاعی $H$ را در نظر بگیرید. فرض کنید عمود از $H$ بر $EF$ خطوط $EF$، $AB$ و $AC$ را به ترتیب در $P$، $T$ و $L$ قطع کند. نقطه $K$ روی ضلع $BC$ قرار دارد به طوری که $BD = KC$ و $\omega$ دایره‌ای است که از $P$ و $H$ می‌گذرد و بر $AH$ مماس است. ثابت کنید دایره محیطی مثلث $ATL$ بر $\omega$ مماس است و $KH$ از نقطه تماس دو دایره می‌گذرد.

(← ص.۳۲)

**مسئلهٔ ۴.** ۲۰۲۱ نقطه در صفحه و در حالت محدب قرار دارند به طوری که هیچ سه‌تایی همخط نیستند و هیچ چهارتایی روی یک دایره قرار ندارند. ثابت کنید دو نقطه از بین این نقاط وجود دارند که هر دایره‌ای که از این دو نقطه می‌گذرد شامل حداقل ۶۷۳ نقطه دیگر در داخل خود باشد.
(یک مجموعه متناهی از نقاط در صفحه در حالت محدب قرار دارند اگر نقاط، رئوس یک چندضلعی محدب باشند.)

(← ص.۳۴)

**مسئلهٔ ۵.** مثلث $ABC$ با مرکز دایره محاطی داخلی $I$ داده شده است. دایره محاطی داخلی $ABC$ بر ضلع $BC$ در نقطه $D$ مماس است. نقاط $P$ و $Q$ روی ضلع $BC$ قرار دارند به طوری که $\angle PAB = \angle BCA$ و $\angle QAC = \angle ABC$. فرض کنید $K$ و $L$ به ترتیب مرکز دایره محاطی داخلی مثلث‌های $ABP$ و $ACQ$ باشند. ثابت کنید $AD$ خط اویلر مثلث $IKL$ است.
(خط اویلر خطی است که از مرکز دایره محیطی و مرکز ارتفاعی مثلث می‌گذرد.)

(← ص.۳۵)

# راه حل‌ها

**مسئلهٔ ۱.** مثلث حادةالزاویه $ABC$ با دایره محیطی $\omega$ داده شده است. نقطه $D$ وسط ضلع $AC$، نقطه $E$ پای ارتفاع $A$ بر $BC$ و نقطه $F$ محل برخورد خطوط $DE$ و $AB$ است. نقطه $H$ روی کمان $BC$ از $\omega$ (کمانی که شامل $A$ نیست) قرار دارد به طوری که $\angle BHE = \angle ABC$. ثابت کنید $\angle BHF = ۹۰^\circ$.

*طرح شده توسط Harris Leung ـ هنگ کنگ*

---

**راه حل.** از آنجایی که $\angle CEA = ۹۰^\circ$، $DC = DE = DA$ در نتیجه

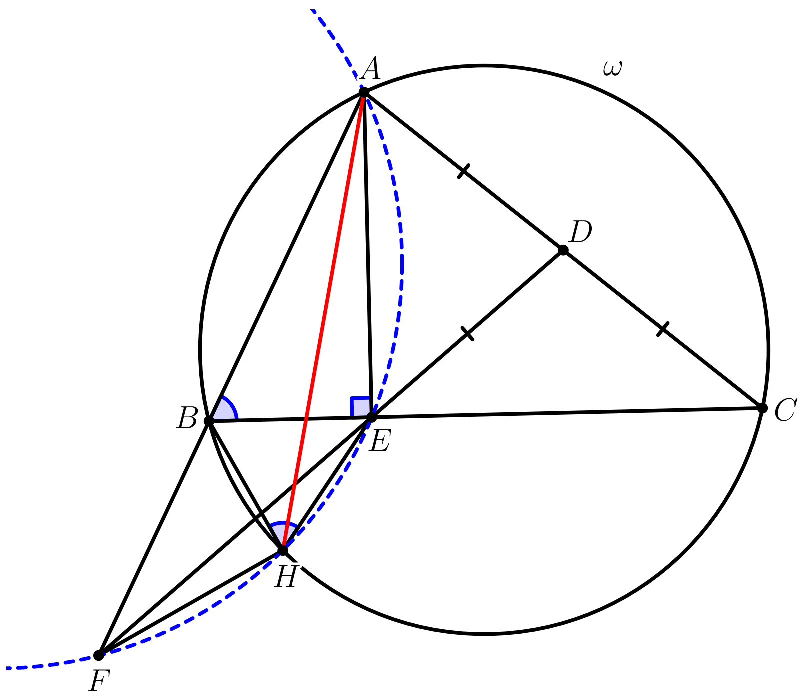
$$\angle EFA = \angle DEA - \angle FAE = (۹۰^\circ - \angle C) - (۹۰^\circ - \angle B) = \angle B - \angle C,$$

و

$$\angle EHA = \angle BHE - \angle BHA = \angle B - \angle C = \angle EFA.$$

این نشان می‌دهد که نقاط $A, E, H, F$ روی یک دایره قرار دارند. پس می‌توان نوشت

$$\angle BHF = \angle AHF - \angle AHB = \angle AEF - \angle C = (۹۰^\circ + \angle C) - \angle C = ۹۰^\circ.$$

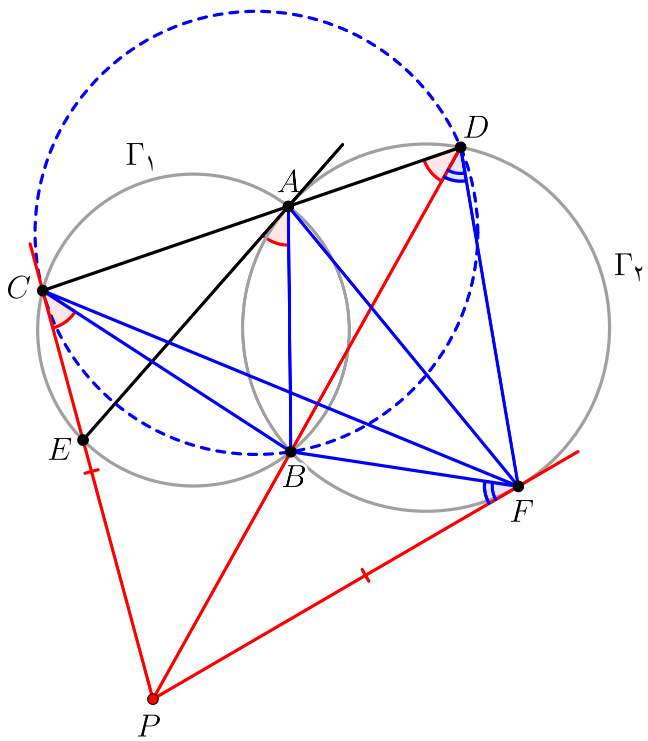


**مسئلهٔ ۲.** دو دایره $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ در دو نقطه $A$ و $B$ تقاطع دارند. خطی از $A$ می‌گذرد و $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ را به ترتیب در $C$ و $D$ قطع می‌کند، به طوری که $A$ بین $C$ و $D$ قرار دارد. مماس از $A$ بر $\Gamma_۲$ برای بار دوم $\Gamma_۱$ را در $E$ قطع می‌کند. فرض کنید $F$ نقطه‌ای روی $\Gamma_۲$ باشد به طوری که $F$ و $A$ در دو طرف متفاوت $BD$ قرار دارند و $۲\angle AFC = \angle ABC$. ثابت کنید مماس از $F$ بر $\Gamma_۲$ و خطوط $BD$ و $CE$ همرسند.

طرح شده توسط *Tak Wing Ching* ـ هنگ کنگ

---

**راه حل.**




به وضوح نقطه $F$ به طور یکتا تعیین می‌شود. این نقطه را دوباره به صورتی که در ادامه آمده است، تعریف می کنیم. تقاطع خطوط $BD$ و $CE$ را $P$ و نقطه تماس مماس وارد از $P$ بر دایره $\Gamma_۲$ (که در طرف دیگر $BD$ نسبت به $A$ قرار دارد) را $F$ می‌نامیم. کافیست نشان دهیم $\angle AFC = \frac{۱}{۲}\angle ABC$. از آنجا که $\angle ECB = \angle EAB = \angle ADB$، خط $CP$ بر دایره محیطی $\triangle CBD$ مماس است. در نتیجه داریم

$$PC = \sqrt{PB \cdot PD} = PF.$$

و همچنین

$$\begin{aligned}\angle FBC &= \angle BFP + \angle FPC + \angle PCB \\ &= \angle BDF + (۱۸۰^\circ - ۲\angle CFP) + \angle CDB \\ &= \angle CDF + ۱۸۰^\circ - ۲\angle CFP\end{aligned}$$

(توجه کنید که در شکل‌های دیگر ممکن است زاویه $\angle FBC$ منفرجه باشد.) با استفاده از تساوی‌های بالا بدست می‌آید

$$\begin{aligned}\angle ABC &= \angle FBC - \angle FBA \\ &= (\angle CDF + ۱۸۰^\circ - ۲\angle CFP) - (۱۸۰^\circ - \angle ADF) \\ &= ۲\angle CDF - ۲\angle CFP \\ &= ۲\angle AFP - ۲\angle CFP \\ &= ۲\angle AFC\end{aligned}$$

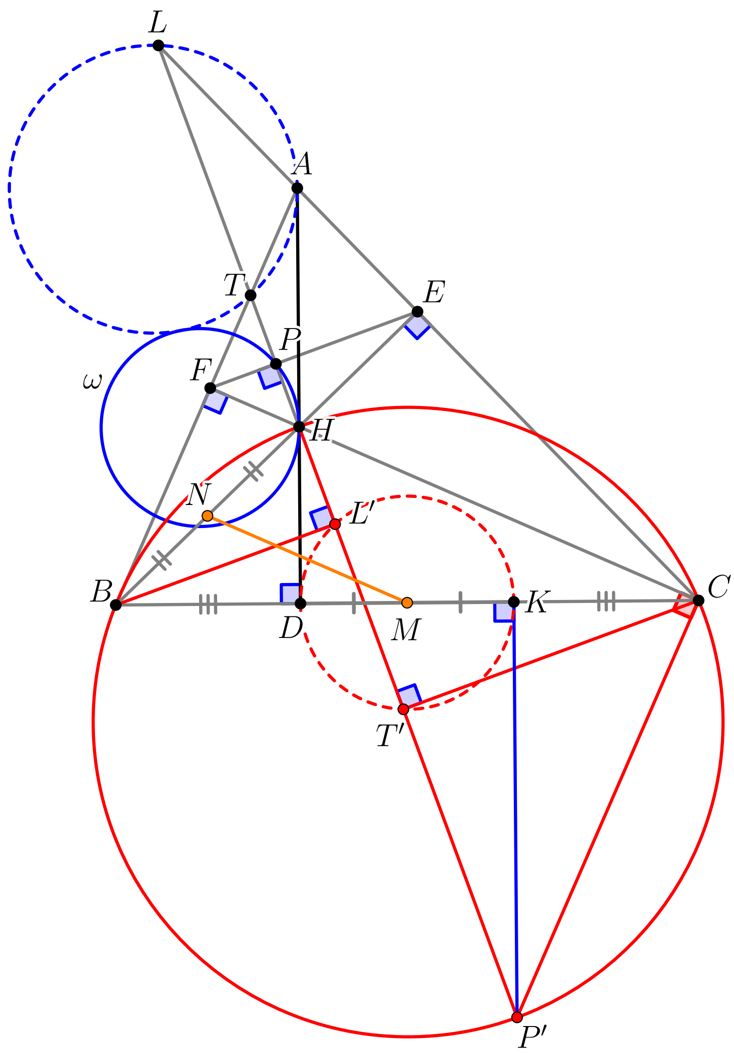
و اثبات کامل می‌شود.

**مسئلهٔ ۳.** مثلث $ABC$ با ارتفاع‌های $AD$، $BE$ و $CF$ و مرکز ارتفاعی $H$ را در نظر بگیرید. فرض کنید عمود از $H$ بر $EF$ خطوط $EF$، $AB$ و $AC$ را به ترتیب در $P$، $T$ و $L$ قطع کند. نقطه $K$ روی ضلع $BC$ قرار دارد به طوری که $BD = KC$ و $\omega$ دایره‌ای است که از $P$ و $H$ می‌گذرد و بر $AH$ مماس است. ثابت کنید دایره محیطی مثلث $ATL$ بر $\omega$ مماس است و $KH$ از نقطه تماس دو دایره می‌گذرد.

*طرح شده توسط مهدی اعتصامی فرد ــ ایران*

---

**راه حل.** انعکاسی به مرکز $H$ و شعاع $-AH \cdot AD$ انجام می‌دهیم. از این به بعد تصویر هر نقطه‌ی این انعکاس را با علامت پریم همان نقطه نشان می‌دهیم. واضح است که $C \equiv F'$ و $B \equiv E'$ پس نقطه $P'$ روی دایره محیطی $BHC$ قرار دارد و $\angle HCP' = ۹۰^\circ$. همچنین $T'$ و $L'$ روی خط $HP'$ طوری قرار دارند که $\angle CT'H = \angle BL'H = ۹۰^\circ$، زیرا که دایره محیطی مثلث‌های $EHD$ و $FHD$ به ترتیب از $T'$ و $L'$ می‌گذرند. دقت کنید که $ACP'B$ متوازی الاضلاع است پس با توجه به تقارن می‌توان گفت $P'K \perp BC$. پس $P'K$ تصویر $\omega$ بر اثر این انعکاس است و کافیست نشان دهیم این خط بر دایره محیطی $DT'L'$ مماس است.




وسط های دو پاره‌خط $BC$ و $BH$ را به ترتیب $M$ و $N$ بنامید. بنابراین

$$\angle L'DH = \angle L'BH = \angle FEH = \angle FAH.$$

این نتیجه خواهد داد که $AB \parallel DL'$. از طرفی $MN \perp AB$ و $ND = NL'$ ، پس $MN$ باید عمود منصف $DL'$ باشد. در نتیجه $MD = ML'$ و به طور مشابه می‌توان نشان داد $MT' = MD$. همچنین به وضوح $MD = MK$ ، پس

چهارضلعی $DL'KT'$ محاطی بوده و مرکز دایره محیطی آن $M$ است. حال از آنجایی که $\angle MKP' = ۹۰^\circ$ نتیجهٔ موردنظر حاصل می‌شود.

**مسئلهٔ ۴.** ۲۰۲۱ نقطه در صفحه و در حالت محدب قرار دارند به طوری که هیچ سه‌تایی همخط نیستند و هیچ چهارتایی روی یک دایره قرار ندارند. ثابت کنید دو نقطه از بین این نقاط وجود دارند که هر دایره‌ای که از این دو نقطه می‌گذرد شامل حداقل ۶۷۳ نقطه دیگر در داخل خود باشد.

(یک مجموعه متناهی از نقاط در صفحه در حالت محدب قرار دارند اگر نقاط، رئوس یک چندضلعی محدب باشند.)

*طرح شده توسط مرتضی ثقفیان ــ ایران*

---

**راه حل.** نقاط را $P_1, P_2, \dots, P_{2021}$ بنامید. برای اثبات حکم به دو لم زیر نیاز است:

**لم ۱.** *به مثلثی **خوب** می‌گوییم اگر دایره محیطی این مثلث تمام شکل را در بر بگیرد. آنگاه تمام مثلث‌های خوب یک مثلث‌بندی از ۲۰۲۱ــ ضلعی $P_1P_2 \dots P_{2021}$ می‌باشند.*

*اثبات.* دقت کنید که بر روی هر ضلع این چندضلعی می‌توان دقیقا یک مثلث خوب ساخت به این ترتیب که رأسی را انتخاب می‌کنیم که با کوچکترین زاویه این ضلع را می‌بیند. حال با شروع از مثلثی خوب مثل $P_iP_jP_k$ یکی از ضلع‌های آن مثل $P_iP_j$ را انتخاب می‌کنیم. دقت کنید که تمام رئوسی که با $P_k$ در یک سمت $P_iP_j$ قرار دارند با زاویه بزرگتری پاره‌خط $P_iP_j$ را نسبت به $P_k$ مشاهده می‌کنند. و تمام نقاطی که در سمت دیگر این خط قرار دارند طوری هستند که $\angle P_iXP_j + \angle P_iP_kP_j > 180^\circ$. حال در سمتی از این خط که $P_k$ در آن قرار ندارد راس $P_l$ را طوری پیدا کنیم که این راس $P_iP_j$ را با کمترین زاویه ممکن ببیند. حال رئوس $P_iP_jP_l$ تشکیل یک مثلث خوب می‌دهند ، زیرا:

- برای هر راس $X$ که در همان سمت $P_iP_j$ قرار دارد که $P_l$ در آن قرار دارد ، $\angle P_iXP_j$ بزرگتر یا مساوی $\angle P_iP_lP_j$ می‌باشد.

- برای هر راس $X$ که در سمتی از $P_iP_j$ قرار دارد که $P_l$ در آن قرار ندارد ، چون زاویه $P_iP_j$، $\angle P_iP_kP_j$ کوچکترین زاویه ممکن است بنابراین $\angle P_iXP_j + \angle P_iP_lP_j > 180^\circ$.

با ادامه دادن همین روند به یک مثلث‌بندی از این ۲۰۲۱ــ ضلعی می‌رسیم که آن را $T$ می‌نامیم. همچنین هر مثلثی از این مثلث‌بندی مثلث‌های دیگر را به طور یکتا مشخص می‌کند. حال فرض کنید مثلثی خوب وجود داشته باشد که در این مثلث بندی نباشد. روند بالا را روی این مثلث آنقدر انجام می‌دهیم تا مثلث‌بندی $T'$ تشکیل شود. یکی از اضلاع این چندضلعی مثل $P_1P_2$ را ثابت در نظر بگیرید. برای این ضلعی تنها یک مثلث خوب وجود دارد پس دو مثلث‌بندی $T$ و $T'$ با یکدیگر یک مثلث مشترک دارند. پس طبق گفته‌ی بالا $T$ و $T'$ باید با یکدیگر یکی باشند که حکمی که دنبالش بودیم را نتیجه می‌دهد. □

**لم ۲.** *در مثلث‌بندی $T$ که در بالا ذکر شد قطری کشیده شده وجود دارد که در هر سمت آن حداقل ۶۷۳ رأس قرار دارد.*

*اثبات.* ۲۰۲۱ــ ضلعی منتظم $Q_1Q_2 \dots Q_{2021}$ را درنظر گرفته و تمام قطرهایی که در $T$ رسم شده‌اند را در این چندضلعی رسم کنید. به این ترتیب به مثلث‌بندی $T'$ از چندضلعی جدید می‌رسیم. حال $O$ را مرکز دایره محیطی چندضلعی منتظم بنامید که درون یکی از مثلث‌های مثلث‌بندی $T'$ قرار دارد. این مثلث حاده را(چون مرکز دایره محیطی‌اش درون خودش قرار دارد) $Q_iQ_jQ_k$ بنامید. فرض کنید بلندترین ضلع آن $Q_iQ_j$ باشد. پس زاویه‌ی $\angle Q_iQ_kQ_j$ حاده است و از حداقل $60^\circ$ می‌باشد. که این نتیجه می‌دهد حداقل ۶۷۳ رأس در هر کدام از دوطرف $P_iP_j$ وجود دارد.

حال اگر همه چیز را به ۲۰۲۱ــ ضلعی $P_1P_2 \dots P_{2021}$ برگردانیم، قطر $P_iP_j$ حداقل ۶۷۳ رأس در دوطرف خود دارد. □

در نهایت توجه کنید که هر دایره گذرنده از این دو راس $P_i$ و $P_j$ تمام نقاط درون حداقل یکی از دو سمت این خط را داراست پس مساله حل است.

**مسئلهٔ ۵.** مثلث $ABC$ با مرکز دایره محاطی داخلی $I$ داده شده است. دایره محاطی داخلی $ABC$ بر ضلع $BC$ در نقطه $D$ مماس است. نقاط $P$ و $Q$ روی ضلع $BC$ قرار دارند به طوری که $\angle PAB = \angle BCA$ و $\angle QAC = \angle ABC$. فرض کنید $K$ و $L$ به ترتیب مرکز دایره محاطی داخلی مثلث‌های $ABP$ و $ACQ$ باشند. ثابت کنید $AD$ خط اویلر مثلث $IKL$ است.
(خط اویلر خطی است که از مرکز دایره محیطی و مرکز ارتفاعی مثلث می‌گذرد.)

*طرح شده توسط Le Viet An ـ ویتنام*

---

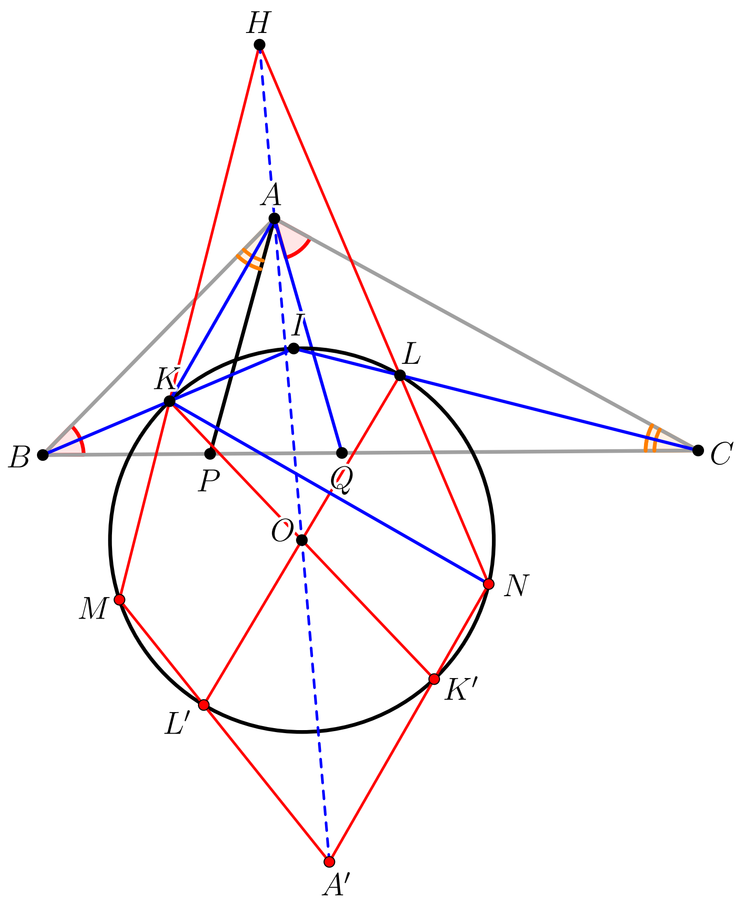
**راه حل.** فرض کنید $\Gamma$، $O$ و $H$ به ترتیب دایره‌ی محیطی، مرکز دایره محیطی و مرکز ارتفاعی مثلث $IKL$ باشند.

**ادعا ۱.** *$A$ روی $OH$ قرار دارد.*

*اثبات.* فرض کنید $\Gamma$ خطوط $HK$، $HL$، $OK$، و $OL$ را به ترتیب در $M$، $N$، $K'$، و $L'$ قطع کند. همچنین $ML'$، $NK'$ را در $A'$ قطع کند. اگر بر روی ۶ ضلعی $MKK'NLL'$ از قضیه‌ی پاسکال استفاده کنیم، متوجه همخطی ۳ نقطه‌ی $H$، $O$ و $A'$ می‌شویم.
به سادگی می‌توان دید که $\angle AKI = \frac{\angle ABK + \angle BAK}{۲} = \frac{\angle B + \angle C}{۲}$ و

$$\angle IKN = \angle ILH = ۹۰^\circ - (۱۸۰^\circ - \angle BIC) = ۹۰^\circ - \frac{\angle B + \angle C}{۲}.$$

بنابراین $\angle AKN = \angle AKI + \angle IKN = ۹۰^\circ$. که $A'K' \parallel AK$ را نشان می‌دهد. به طور مشابه می‌توان نشان داد $A'L' \parallel AL$. با ترکیب توازی‌های به دست آمده با $K'L' \parallel KL$ (با توجه به تقارن نسبت به $O$)، می‌توان نشان داد دو مثلث $AKL$ و $A'K'L'$ با یکدیگر متجانس‌اند. پس $AA'$ ، $KK'$ و $LL'$ همرسند که این ادعای ما را ثابت می‌کند.




□

**ادعا ۲.** $D$ روی $OH$ قرار دارد.

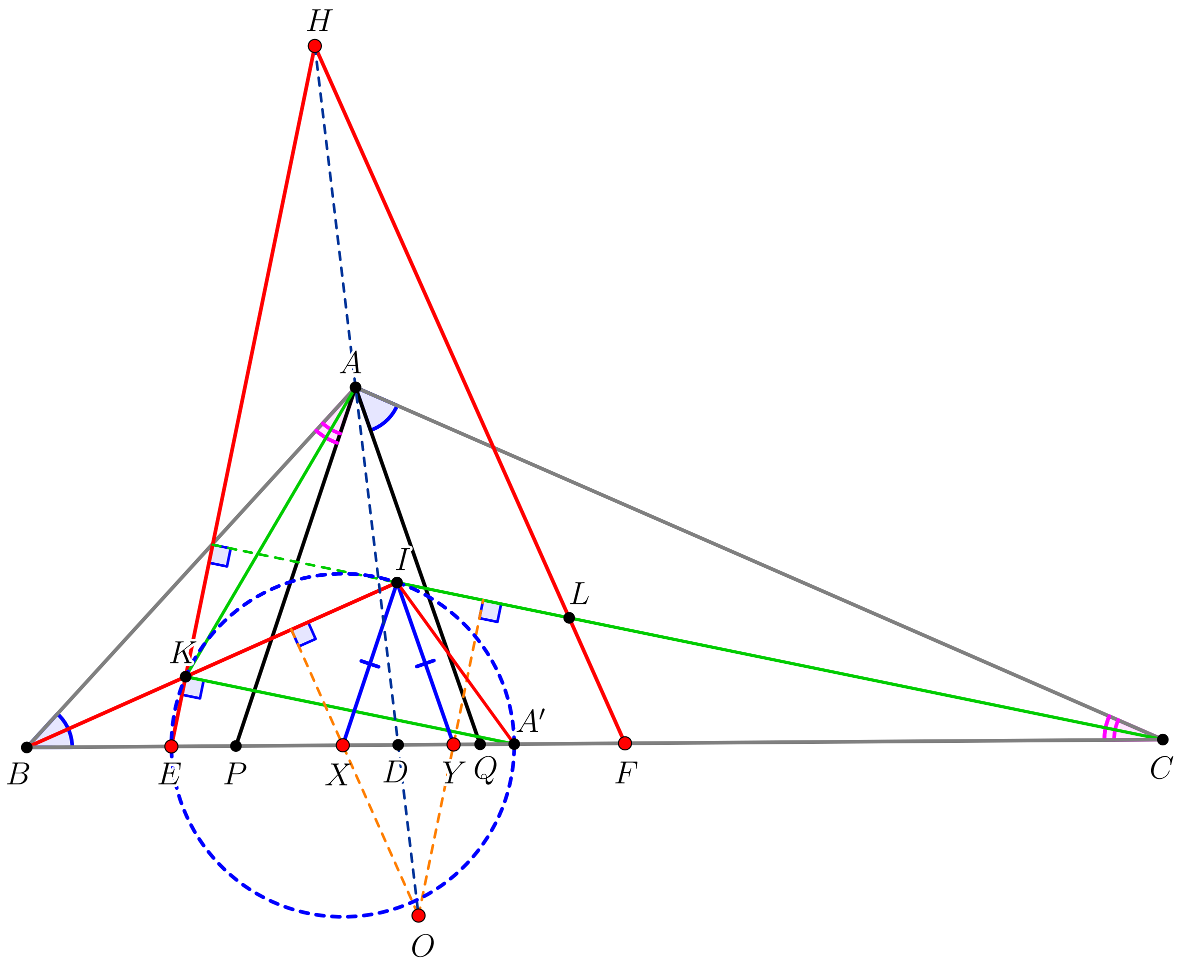
*اثبات.* فرض کنید $HK$ و $HL$، $BC$ را در $E$ و $F$ قطع کنند. فرض کنید $A'$ قرینه‌ی $A$ نسبت به $BI$ باشد. پس

$$\angle KA'B = \angle KAB = \frac{1}{2}\angle BAP = \frac{1}{2}\angle C = \angle ICB.$$

این نشان می‌دهد که $KA' \parallel CI$، پس $\angle A'KE = 90^\circ$. اکنون توجه کنید که $\angle A'IK = \angle AIK = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$. از طرفی با توجه به $KE \perp CI$ ، $\angle A'IK + \angle A'EK = 180^\circ$ و $\angle A'IK + \angle A'EK = 180^\circ$ که نشان می‌دهد چهارضلعی $A'IKE$ محاطی است.
وسط $A'E$ را $X$ بنامید. از آنجایی که $\angle A'IE = 90^\circ$، $X$ مرکز دایره محیطی مثلث $EKI$ است، می‌توان نشان داد

$$\angle IXD = \angle IXA' = 2\angle IKA' = 2\angle IKA = 2(\angle KAB + \angle KBA) = \angle C + \angle B.$$

به طور مشابه ، اگر $Y$ مرکز دایره محیطی $ILF$ باشد، $Y$ روی $BC$ است و $\angle IYD = \angle B + \angle C$. پس مثلث $IXY$ با رأس $I$ مثلثی متساوی‌الساقین است. پس می‌توان نشان داد $XE = XI = YI = YF$. از سوی دیگر، $ID \perp XY$ پس $D$ نقطه‌ی وسط $XY$ و $EF$ است. در نهایت توجه کنید $OX$ و $OY$ عمود منصف‌های $IK$ و $IL$، پس $OX \parallel HF$ و $OY \parallel HE$. پس می‌توان نشان داد مثلث‌های $OXY$ و $HFE$ متشابه‌اند. حال توجه کنید $DO$ و $DH$ میانه‌های این دو مثلث هستند پس $\angle HDE = \angle ODY$ و ادعایمان ثابت می‌شود.




□

به وضوح این دو ادعا در کنار یکدیگر حکم سوال را نتیجه می‌دهند.