



مشاوره تحصیلی هیوا

تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

مشاوره تخصصی ثبت نام مدارس ، برنامه ریزی درسی و آمادگی
برای امتحانات مدارس

برای ورود به صفحه مشاوره مدارس کلیک کنید

برای ورود به صفحه نمونه سوالات امتحانی کلیک کنید

تماس با مشاور تحصیلی مدارس

۹۰۹۹۰۷۱۷۸۹



تماس از تلفن ثابت

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

به نام او

راه حل سؤالات مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۲

۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

فرض کنید $y = f(x)$ تابع مورد نظر باشد. ابتدا با توجه به این که نقطه‌ی $(0, 0)$ روی نمودار قرار دارد، باید $f(0) = 0$ که همه‌ی گزینه‌ها این شرط را برآورده کنند. این نمودار تابعی را مشخص می‌کند که نه زوج است و نه فرد (زیرا نه نسبت به مبدأ مختصات و نه محور y ها تقارن دارد). پس گزینه‌های (الف)، (ب) و (ج) که به ترتیب توابعی فرد، زوج و زوج هستند نمی‌توانند جواب مسئله باشند.

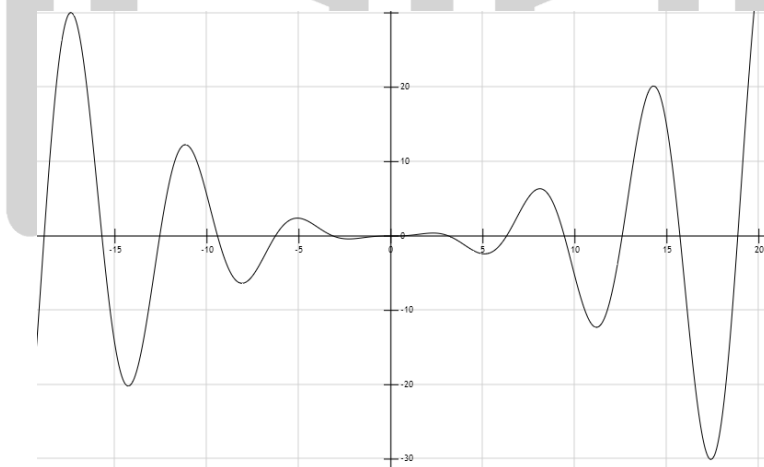
طبق نمودار سؤال برای هر عدد حقیقی مثبت x باید $f(x)$ مثبت باشد، اما اگر در گزینه‌ی (د) به جای x ،

$\frac{\pi}{۲}$ قرار دهیم داریم:

$$\frac{x^2}{۱۰} + \cos x - ۱ = \frac{\pi^2}{۴۰} + \cos \pi - ۱ = \frac{\pi^2}{۴۰} - ۱ < ۰.$$

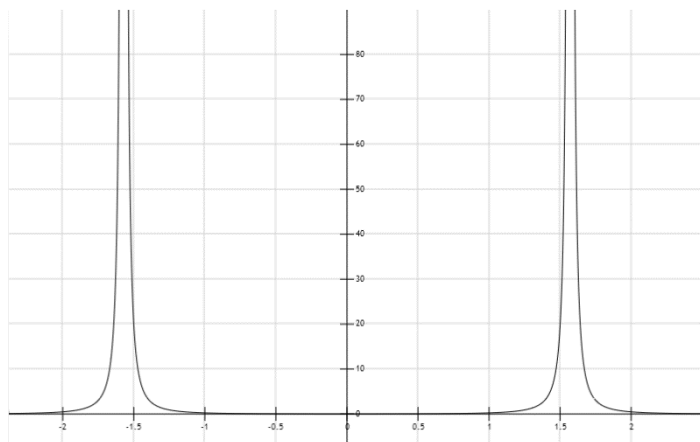
پس گزینه‌ی (د) هم نمی‌تواند جواب مسئله باشد و جواب درست گزینه‌ی (ه) است. در زیر نمودار مربوط به چهار تابع دیگر را می‌بینید.

$$\text{گزینه‌ی الف. } y = \frac{x^2}{۱۰} \cdot \sin x$$

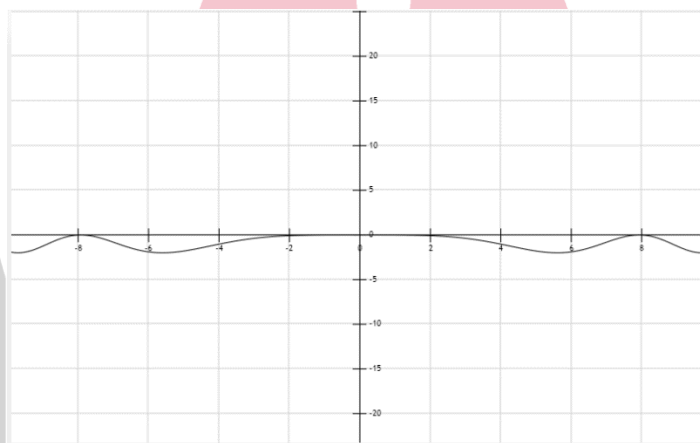


هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

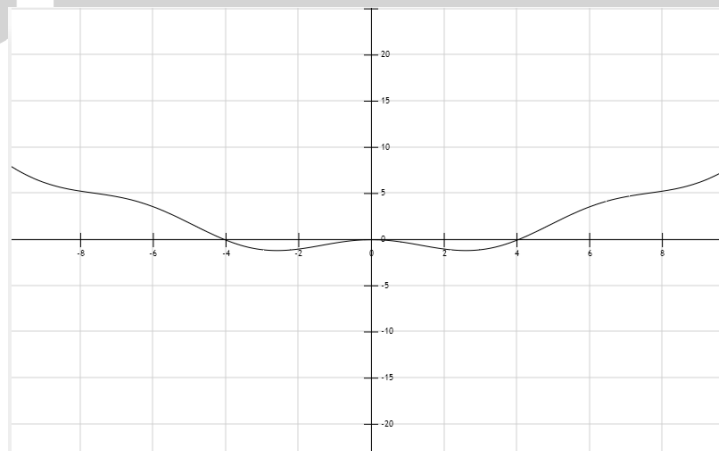
گزینه ی ب. $y = \frac{(\tan x)^2}{1}$



گزینه ی ج. $y = \cos\left(\frac{x^2}{1}\right) - 1$

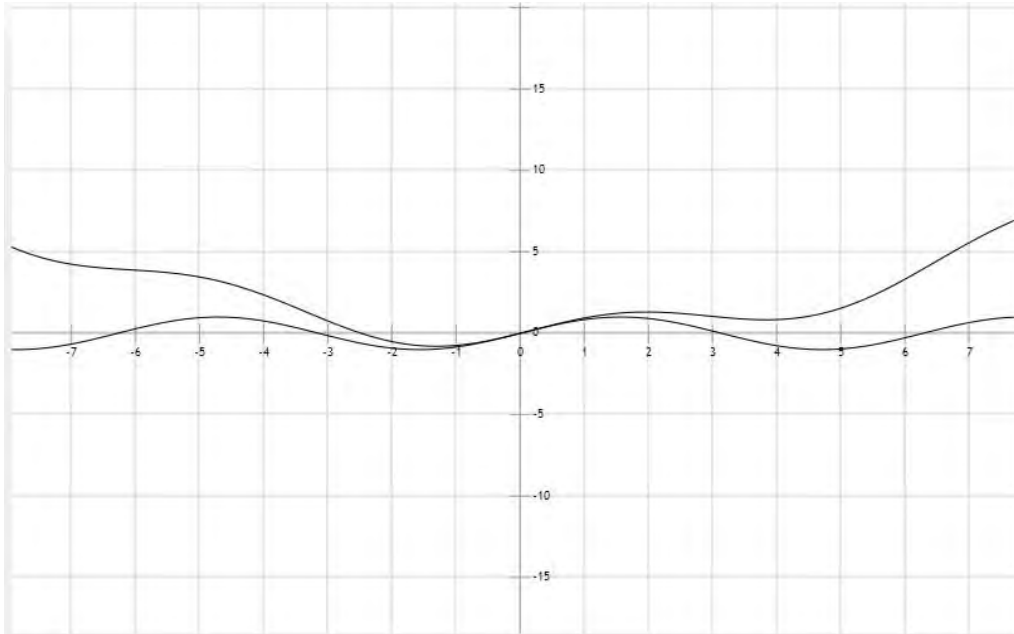


گزینه ی د. $y = \frac{x^2}{1} + \cos x - 1$

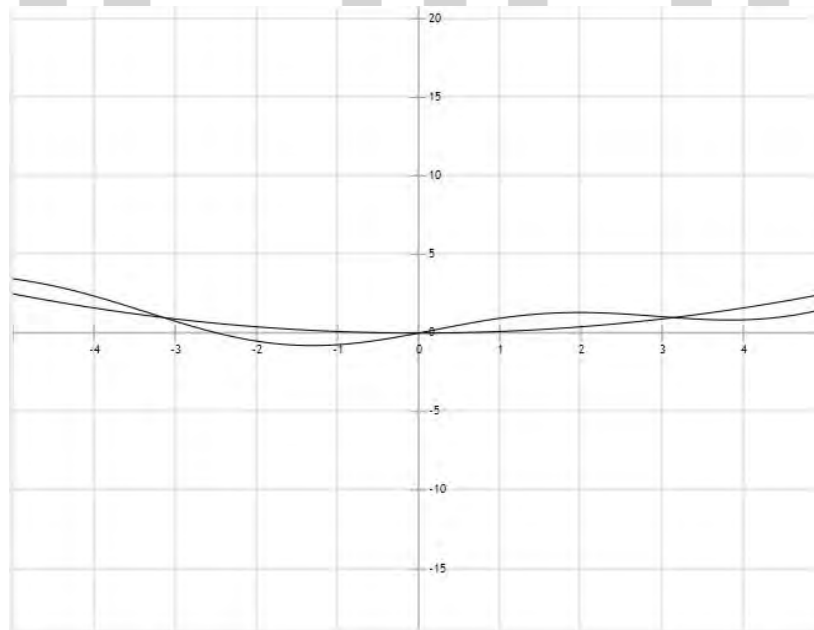


هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

توضیح: اگر به نمودار صورت سؤال حول نقطه‌ی صفر که کسر $\frac{x^2}{4}$ در این جا بسیار کوچک است، دقت کنید نموداری شبیه به $\sin x$ می‌بینید. (در شکل زیر نمودار پایینی مربوط به $y = \sin x$ و نمودار بالاتر مربوط به گزینه‌ی (ه) است.)



توضیح: نمودار $\frac{x^2}{4} + \sin x$ از جمع کردن نمودار دو تابع $\frac{x^2}{4}$ و $\sin x$ به دست می‌آید. یعنی به تعبیری کاملاً غیر دقیق باید نمودار $\sin x$ روی نمودار $\frac{x^2}{4}$ قرار گیرد تا به نمودار $\frac{x^2}{4} + \sin x$ برسیم.



۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

صورت سؤال کاملاً ما راه‌نمایی می‌کند که باید از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم. طرفین عبارت را در $(x - 2) - (x + 1) = 3$ ضرب می‌کنیم. صرفاً برای راحتی در نوشتن از نماد a برای $x + 1$ و از b برای $x - 2$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} a^{1384} - b^{1384} &= (a - b)(a^{1383} + a^{1382}b + \dots + ab^{1382} + b^{1383}) \\ &= 3 \times (a^{1383} + a^{1382}b + \dots + ab^{1382} + b^{1383}) = 0. \end{aligned}$$

پس $a^{1384} = b^{1384}$ و لذا $a = b$ یا $a = -b$. با ترجمه‌ی این عبارت‌ها با استفاده از متغیر اصلی مسئله یعنی x ، $x + 1 = x - 2$ و یا $x + 1 = 2 - x$. حالت اول به $1 = -2$ منجر می‌شود که امکان ندارد، اما از حالت دوم جواب $x = \frac{1}{4}$ به دست می‌آید که تنها جواب مسئله است.

۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

$$D \cap C = (A - B) \cap C = A \cap B^c \cap C$$

$$\begin{aligned} F &= D - E = D \cap E^c = (A - B) \cap (B - C)^c = (A \cap B^c) \cap (B \cap C^c)^c = \\ &= A \cap (B^c \cap (B^c \cup C)) = A \cap B^c \end{aligned}$$

پس به وضوح حکم مسئله برقرار است.

توضیح ۱. استفاده از نمودار ون در چنین سؤالاتی بسیار سودمند است.

توضیح ۲. $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{2, 3\}$ و $C = \{2\}$ مثال نقضی برای همه‌ی گزینه‌های دیگر است.

۴. گزینه‌ی (د) صحیح است.

برای ایجاد x^5 باید از هر کدام از ۴ پرانتز مسئله یکی از جملات انتخاب شود طوری که مجموع توان‌های آن‌ها برابر ۵ باشد.

از هیچ‌کدام از دو پرانتز $x^4 + x^4 + 1$ نمی‌تواند جمله‌ی x^5 انتخاب شود و ضمناً نمی‌توان هم‌زمان از هر دوی آن‌ها x^4 انتخاب کرد زیرا در هر دو صورت مجموع توان‌ها از ۵ بیش‌تر می‌شود.

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

اگر از یکی از دو $x^4 + x^8 + 1$ ، جمله x^4 انتخاب شود از دیگری باید لزوماً ۱ را انتخاب کنیم و در این حالت از یکی از دو پرانتز باقی مانده و از دیگری $2x$ باید انتخاب شود. بنابراین چهار حالت داریم که هر کدام منجر به یک جمله $2x^5$ و در مجموع $8x^5$ می شوند.

اگر از هر دو پرانتز $x^4 + x^8 + 1$ ، ۱ انتخاب شود باید از دو پرانتز دیگر دو جمله انتخاب کنیم که مجموع توان های آن ها ۵ باشد پس در این حالت ضریب x^5 برابر $2(1 \times 6 + 2 \times 5 + 3 \times 4) = 56$ می شود. یعنی ضریب x^5 در مجموع $64 = 56 + 8$ است.

۵. گزینه ی (الف) صحیح است.

فرض کنید ناصر عدد α را انتخاب کرده باشد، در این صورت منصور برای این که امتیاز کمتری به ناصر برسد سعی می کند عددی را به جای y قرار دهد تا $f(\alpha, y) = y^2 - 2\alpha y + \alpha^2 + 2\alpha + 1$ کمترین مقدار ممکن شود. این عبارت یک رابطه ی درجه دوم بر حسب y است که کمترین مقدار آن وقتی است که y برابر $\alpha = -\frac{-2\alpha}{2} = \alpha$ باشد و این کمترین مقدار برابر است با $f(\alpha, \alpha) = -2\alpha^2 + 2\alpha + 1$. یعنی با فرض این که منصور خوب بازی می کند ناصر با انتخاب α به $-2\alpha^2 + 2\alpha + 1$ امتیاز می رسد. پس ناصر باید α را طوری انتخاب کند که این مقدار بیشترین مقدار ممکن خود باشد. بیشترین مقدار این عبارت زمانی است که α برابر $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ و این بیشترین مقدار برابر است با $-\frac{2}{4} + 2(\frac{1}{2}) + 1 = \frac{3}{2}$.

۶. گزینه ی (الف) صحیح است.

با تقسیم کردن خواهیم داشت:

$$x^3 + ax + 1 = (x + 3)(x^2 - 3x + b) + ((a - b + 9)x + 1 - 3b)$$

اگر طبق فرض مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر باشد، باقی مانده باید متحد با صفر باشد.

$$(a - b + 9)x + (1 - 3b) \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} a - b + 9 = 0 \Rightarrow a = -9 + b \\ 1 - 3b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + 2b = (-9 + b) + 2b = -9 + 3b = -9 + 3\left(\frac{1}{3}\right) = -9 + 1 = -8$$

۷. گزینه ی (د) صحیح است.

می دانیم ضرب ماتریس ها روی جمع پخش می شود اما خاصیت جابه جایی ندارد (لزوماً AB و BA با هم برابر نیستند)، پس $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$ با مقایسه ی این رابطه با فرض مسئله می فهمیم $AB = BA$ و لذا

$$\left. \begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + xy & 1 + x \\ 1 + y & 2 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x + 1 \\ y + 1 & xy + 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow xy + 1 = 2 \Rightarrow xy = 1$$

۸. گزینه ی (ج) صحیح است.

راه حل اول. دو دایره ی وسط که هر کدام با سه دایره ی دیگر مجاور هستند را دایره ی مرکزی می نامیم. در دو برجسب گذاری یک سان باید برجسب دایره های مرکزی یکی باشد زیرا در غیر این صورت حرفی وجود دارد که در یکی از دو برجسب گذاری در دایره ی مرکزی است و با سه حرف دیگر مجاور است اما در برجسب گذاری دیگر تنها با یک حرف مجاور است.

بنابراین برای مشخص کردن یک برجسب گذاری ابتدا به $C(6, 2) = \frac{6!}{2! \times 4!} = 15$ حالت دو حرف دایره های مرکزی را انتخاب می کنیم، سپس دو حرف از چهار حرف باقی مانده را انتخاب می کنیم که مجاور حرفی باشد که زودتر در الفبا ظاهر می شود (a زودتر از b ، b زودتر از c و... ظاهر می شود). این کار به $c(4, 2) = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ حالت امکان پذیر است. دو حرف باقی مانده هم در دو دایره ی باقی مانده قرار می گیرند. پس در کل $15 \times 6 = 90$ برجسب گذاری داریم.

راه حل دوم. اگر فرض کنیم هر دو برجسب گذاری با هم متفاوت هستند، تعداد کل برجسب گذاری ها $720 = 6!$ تا می شود. برای یک برجسب گذاری خاص مثل شکل زیر تعداد برجسب گذاری هایی که طبق تعریف مسئله با آن یک سان هستند می شماریم.

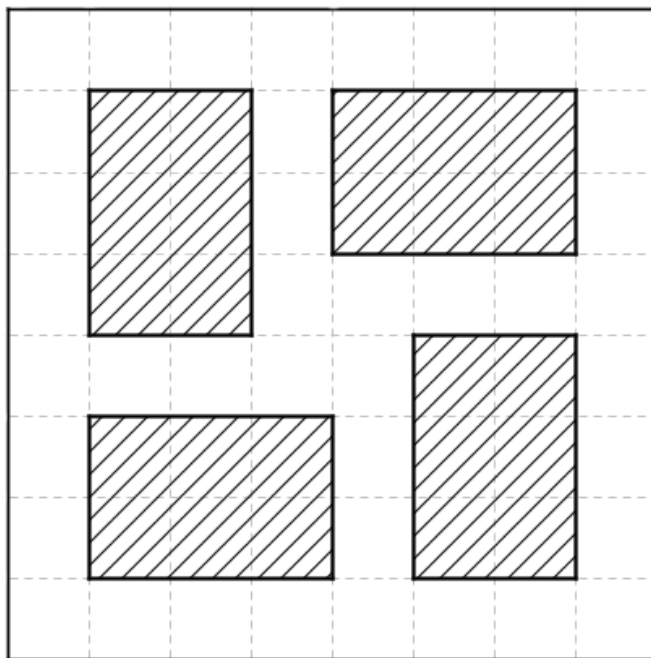
در هر برجسب گذاری یک سان با این برجسب گذاری باز هم حرف های a و b باید در دایره های مرکزی باشند. پس بسته به این که کدام حرف سمت چپ قرار گیرد دو حالت داریم. در هر کدام از حالت ها برای قرار دادن حرف های دایره های مجاور به دایره ی a دو حالت و برای قرار دادن حرف های دایره های مجاور به دایره ی b هم

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

دو حالت داریم. پس در کل ۸ برجسب گذاری مشابه با این برجسب گذاری وجود دارد (با احتساب خودش). با توجه به این که با استدلال مشابه همین هر برجسب گذاری ۸ برجسب گذاری مشابه دارد، تعداد کل برجسب گذاری های متفاوت $90 = \frac{72}{8}$ است.

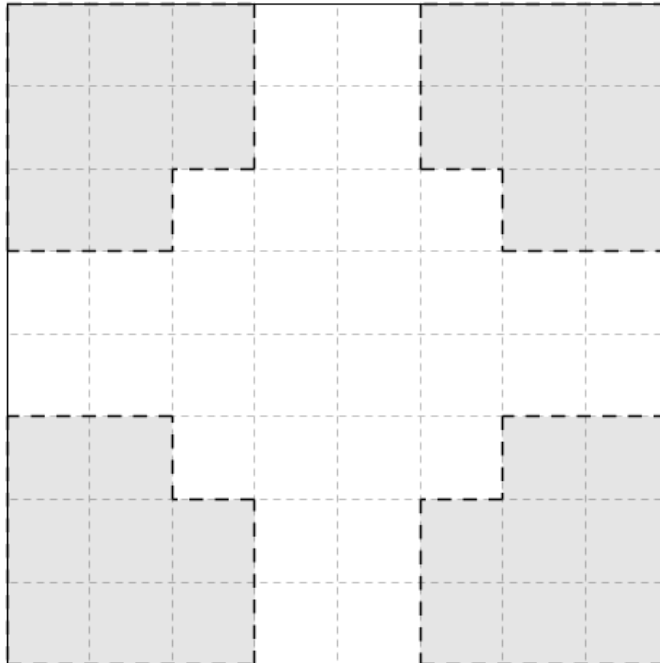
۹. گزینه ی (الف) صحیح است.

شکل زیر چهار مستطیل 2×3 را در جدولی 8×8 مشخص می کند، طوری که هیچ مستطیل دیگری در جدول جای نگیرد.



حال ادعا می کنیم به هر صورت که سه مستطیل 2×3 در جدول قرار دهیم، می توان یک مستطیل دیگر هم در جدول قرار داد. به چهار شکلی که در گوشه ی جدول زیر مشخص هستند دقت کنید. هر مستطیل 2×3 حداکثر با یکی از این چهار شکل گوشه ای خانه ی مشترک دارد. پس اگر تنها سه مستطیل داشته باشیم یکی از این گوشه ها هست که هیچ کدام از خانه های آن پوشیده نشده است، و به وضوح در این شکل یک مستطیل 2×3 قرار می گیرد.

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور



۱۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ادعا می‌کنیم هر عدد طبیعی خوب مثل n اول است. اگر این طور نباشد مقسوم‌علیه‌ی مثل a دارد که $1 < a < n$. طبق فرض مسئله

$$\left. \begin{array}{l} \gamma | a + 1, \gamma | n + 1 \Rightarrow \gamma | a + n + 2 \\ \gamma | a + n \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma | 2$$

که این یک تناقض است. حال یک عدد اول p خوب است اگر $\gamma | p + 1$ ، که اعداد اول این چنینی کم‌تر از ۱۰۰، تنها $\{13, 41, 83, 97\}$ هستند.

۱۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

اگر $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه‌ی n به عوامل اول باشد، $S(n)$ را برابر مجموع $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ تعریف می‌کنیم. ادعا می‌کنیم برای هر عدد طبیعی n که در فهرست ظاهر می‌شود، $S(m)$ فرد است. ابتدا تنها اعداد اول در فهرست هستند و برای هر عدد اول p ، $S(p) = 1$ و فرد است. برای این منظور ادعا می‌کنیم در هر گام این فرد بودن حفظ می‌شود. فرض کنید همه‌ی اعدادی که تا یک مرحله در فهرست قرار دارند فرد هستند و در مرحله‌ی بعدی با استفاده از سه عدد a ، b و c که در فهرست قرار دارند عدد abc را اضافه کنیم. می‌دانیم $S(abc) = S(a) + S(b) + S(c)$ ، حال چون $S(a)$ ، $S(b)$ و $S(c)$ فرد هستند، $S(abc)$ هم فرد می‌شود.

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

حال باید دید برای اعداد هر گزینه مقدار S چه قدر است.

$$S(۱۰۰۰) = S(۲^۳ \times ۵^۳) = ۶$$

$$S(۳۳۰) = S(۲ \times ۳ \times ۵ \times ۱۱) = ۴$$

$$S(۳۵۰۰۰۰) = S(۲^۴ \times ۵^۵ \times ۷) = ۱۰$$

$$S(۳۷۵) = S(۳ \times ۵^۳) = ۴$$

$$S(۱۰۵۰۰) = S(۲^۲ \times ۳ \times ۵^۳ \times ۷) = ۷$$

پس تنها گزینه‌ی (ه) می‌تواند صحیح باشد. با قرآیند زیر نشان می‌دهیم که با در هر گام با استفاده از اعداد اول و عدد به دست آمده در گام قبلی می‌توان به عدد ۱۰۵۰۰ در فهرست رسید.

$$۲, ۳, ۵ \rightarrow ۳۰, \quad ۳۰, ۲, ۵ \rightarrow ۳۰۰, \quad ۳۰۰, ۵, ۷ \rightarrow ۱۰۵۰۰$$

توضیح: با فرآیندی شبیه به بالا می‌توان نشان داد غیر از اعداد اول، تنها اعداد طبیعی n ای در فهرست ظاهر می‌شود که حداقل سه عامل اول داشته باشد و ثانیاً $S(n)$ فرد باشد.

۱۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

محاسبه‌ی این حاصل جمع را با توجه به تعداد ارقام به سه قسمت تقسیم می‌کنیم.

$$\sum_{n=1}^9 p(n) = \sum_{i=1}^9 i = ۴۵$$

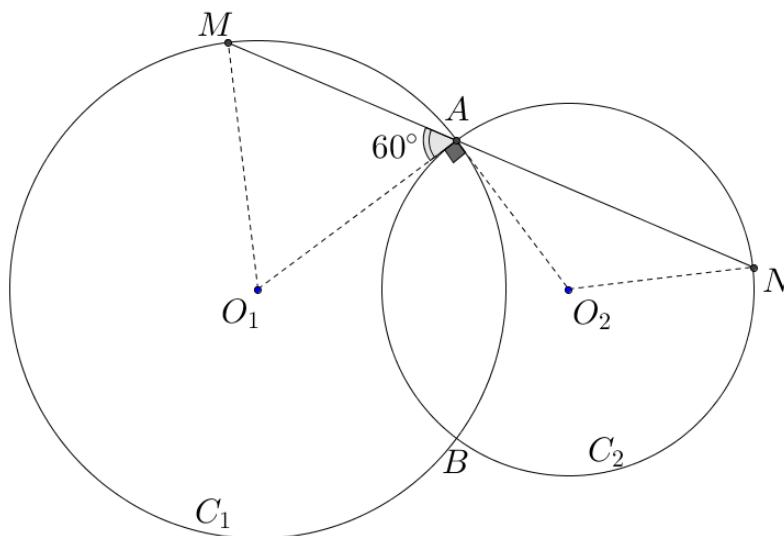
$$\sum_{n=10}^{99} p(n) = \sum_{i=1}^9 \sum_{j=0}^9 (i \times j) = \left(\sum_{i=1}^9 i \right) \left(\sum_{j=0}^9 j \right) = \left(\sum_{i=1}^9 i \right)^2 = ۴۵^2$$

$$\sum_{n=100}^{999} p(n) = \sum_{i=1}^9 \sum_{j=0}^9 \sum_{k=0}^9 (i \times j \times k) = \left(\sum_{i=1}^9 i \right) \left(\sum_{j=0}^9 j \right) \left(\sum_{k=0}^9 k \right) = \left(\sum_{i=1}^9 i \right)^3 = ۴۵^3$$

بنابراین

$$\sum_{n=1}^{999} p(n) = ۴۵ + ۴۵^2 + ۴۵^3 = ۹۳۱۹۵$$

۱۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.



با توجه به شکل بالا می‌بینیم که طول AM طبق فرض مسئله برابر ۴ است. از طرف دیگر MO_1 و AO_1 که شعاع‌های دایره‌ی C_1 هستند، طولی برابر ۴ دارند، پس مثلث AMO_1 متساوی‌الاضلاع است و لذا $\angle MAO_1 = 60^\circ$. به علاوه طبق قضیه‌ی فیثاغورس مثلث AO_1O_2 هم قائم‌الزاویه است ($3^2 + 4^2 = 5^2$).

بنابراین زاویه‌ی $\angle NAO_2$ در مثلث متساوی‌الساقین AO_2N برابر 30° است و لذا با یک محاسبه‌ی ساده نتیجه می‌شود که $AN = 3\sqrt{3}$ و بنابراین $MN = MA + AN = 4 + 3\sqrt{3}$.

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

فرض کنید a_k تعداد ضربات لازم برای از بین بردن یک سر با k چشم باشد. در این صورت $a_1 = 1$ ، ضمناً اگر $k > 1$ با یک ضربه به این سر، باید تمام سرهای جدید را از بین ببرد و از آن‌جا که برای هر $i < k$ دیو یک سر i چشم درآورده است به a_i ضربه برای از بین بردن این سر احتیاج دارد. پس

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + \dots + a_1 + 1$$

از آن‌جا که $a_1 = 1$ ، با استفاده از رابطه‌ی بالا می‌فهمیم $a_2 = 2$ ، $a_3 = 4$ و با استفاده از استقرا به راحتی دیده می‌شود که $a_k = 2^{k-1}$. پس برای از بین بردن یک سر k چشم، 2^{k-1} ضربه نیاز است. سرهای دیو به ترتیب ۴، ۶ و ۸ چشم دارند، پس برای از بین بردن کامل دیو به

$$a_4 + a_6 + a_8 = 2^3 + 2^5 + 2^7 = 8 + 32 + 128 = 168$$

ضربه نیاز است.

۱۵. گزینه ی (د) صحیح است.

در زیر بررسی می کنیم که اگر هر کدام از گزینه ها درست باشند چه می شود:

الف. این امکان ندارد زیرا در صورت درست بودن (الف) باید (ب) هم درست باشد (آنچه (الف) می گوید) که ممکن نیست.

ب. اگر (ب) درست باشد، چون تنها یک گزینه ی درست داریم باید (الف) غلط باشد، اما غلط بودن (الف) به معنی غلط بودن (ب) هست. پس این گزینه هم نمی تواند درست باشد.

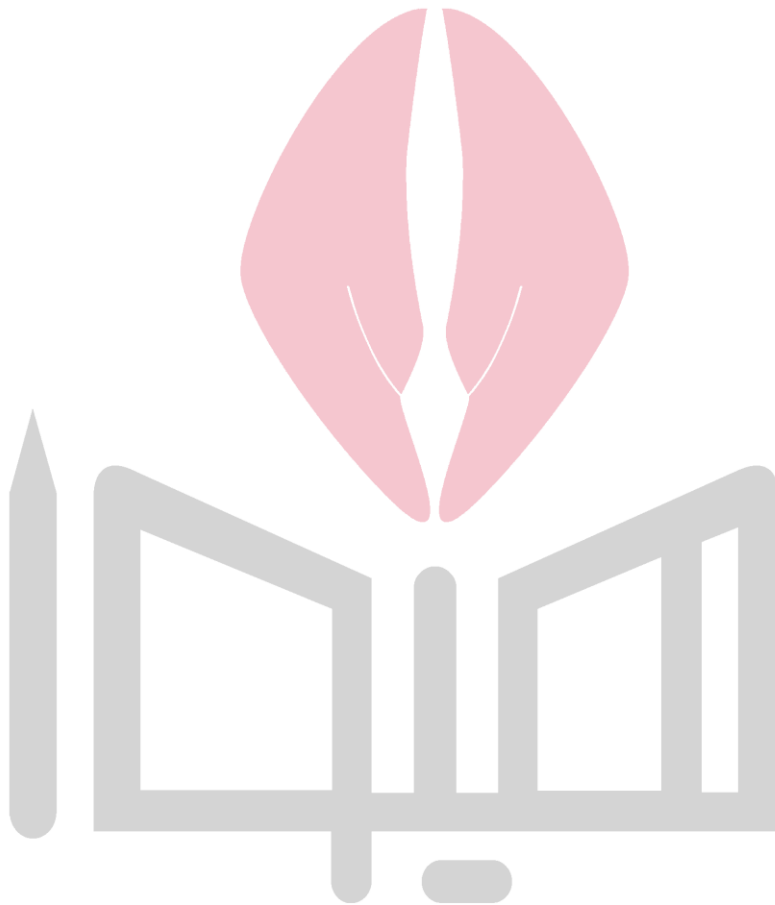
ج. اگر (ج) درست باشد، گزینه ی (ه) به ناچار غلط است، اما غلط بودن گزینه ی (ه) یعنی هیچ کدام از (ج) و (ه) درست نیستند که با فرض اولیه تناقض دارد. پس این گزینه هم نمی تواند گزینه ی درست باشد.

د. اگر (د) درست باشد. گزینه ی (الف) که بیان می کند (ب) صحیح است، غلط می شود. گزینه ی (ب) که بیان می کند (ج) و (د) هر دو غلط هستند به خاطر فرض درستی (د) غلط می شود. گزینه ی (ج) که بیان می کند (ج) غلط است هم غلط می شود. درستی گزینه ی (د) تناقضی با خودش ندارد. در مورد گزینه ی ه، غلط بودن آن نتیجه می دهد که (ج) و (ه) باید هر دو غلط باشند که از قضا این درست است. پس گزینه ی (د) باید گزینه ی صحیح باشد.

ه. درستی (ه) نتیجه می دهد (ب) غلط است و لذا باید یکی از (ج) و (د) درست باشند که این طور نیست پس این گزینه هم غلط است.

۱۶. گزینه ی (الف) صحیح است.

برای این که عدد طبیعی چهاررقمی $xyzt$ مضرب ۵ باشد باید $t \in \{0, 5\}$. به علاوه اگر یکی از اعداد x, y, z مضرب سه باشند این عدد تقسیمی می شود. بنابراین عدد $xyzt$ غیر تقسیمی است اگر $t \in \{0, 5\}$ و x, y, z بر سه بخش پذیر نباشند. معادلاً x, y, z بر سه بخش پذیر نباشد. (یک عدد طبیعی بر ۳ بخش پذیر است، اگر و تنها اگر مجموع ارقامش بر ۳ بخش پذیر باشد). بنابراین می توان از روی باقی مانده ی تقسیم x, y, z و تشخیص داد که یک عدد تقسیمی هست یا نه. با بررسی حالت های مختلفی که باقی مانده های x, y, z می تواند داشته باشد می بینیم که تنها حالت های زیر منجر به یک عدد غیر تقسیمی می شوند.



هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

۲	۲	۲	۲	۱	۱	۱	۱	باقی مانده ی تقسیم x بر ۳
۲	۲	۰	۰	۱	۱	۰	۰	باقی مانده ی تقسیم y بر ۳
۱	۰	۲	۰	۲	۰	۱	۰	باقی مانده ی تقسیم z بر ۳
۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	تعداد حالت‌ها برای x
۳	۳	۴	۴	۳	۳	۴	۴	تعداد حالت‌ها برای y
۳	۴	۳	۴	۳	۴	۳	۴	تعداد حالت‌ها برای z
۲۷	۳۶	۳۶	۴۸	۲۷	۳۶	۳۶	۴۸	تعداد حالت‌ها

با توجه به این که برای t هم دو حالت داریم، تعداد کل اعداد مضرب ۵ غیر تقسیمی ۵۸۸ تا است.

$$2(27 + 36 + 36 + 48 + 27 + 36 + 36 + 48) = 588$$

۱۷. گزینه ی (ج) صحیح است.

از B عمودی بر AC رسم می‌کنیم و پای این عمود را K می‌نامیم. در این صورت-
 $\angle CDB = \angle CKB$ و لذا چهارضلعی $CDKB$ محاطی است و در نتیجه- دو مثلث OKB و ODC
 متشابه هستند. بنابراین

$$\frac{DC}{KB} = \frac{CO}{OB} = \frac{CO}{3} \Rightarrow CO = 3 \frac{DC}{KB} = 3 \frac{AB}{KB} \quad (*)$$

از طرف دیگر دو مثلث ABC و AKB هم متشابه هستند و لذا

$$\frac{AB}{KB} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{5} \Rightarrow CO = \frac{3}{5} AC$$

حال از O بر BC عمود می‌کنیم و پای عمود را S می‌نامیم. OS و AB هر دو بر BC عمود هستند و لذا با هم موازی‌اند. بنابراین طبق قضیه ی تالس داریم:

$$\frac{CO}{AC} = \frac{CS}{AB} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{CS}{5} \Rightarrow CS = 3, BS = 2$$

و در نهایت با استفاده از قضیه ی فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه ی OBS و OSC خواهیم داشت:

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

$$OC^2 = OS^2 + SC^2 = BO^2 - BS^2 + SC^2 = 9 - 4 + 9 = 14$$

و بنابراین $OC = \sqrt{14}$.

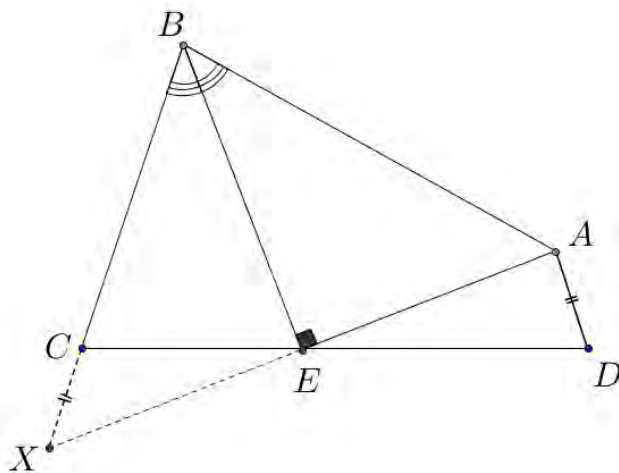
۱۸. گزینه ی (د) صحیح است.

با یک بررسی ساده می بینیم که ترکیب اعمال گفته شده در صورت مسئله در حقیقت همان دوران 72° ساعت گرد به مرکز مبدأ است و بنابراین انجام این عمل برای ۱۳۸۲ مرحله معادل دورانی به اندازه ی 72×1382 درجه است. اما می دانیم که دوران 360° درجه و مضارب 360° درجه همان دوران صفر درجه است. پس

$$1382 \times 72 = 1380 \times 72 + 2 \times 72 = (138 \times 2) \times 360 + 144$$

کل این عمل دورانی 144° درجه در جهت حرکت عقربه های ساعت است و لذا $x = 4$ و $y = 5$ است.

۱۹. گزینه ی (ج) صحیح است.



AE را امتداد می دهیم تا امتداد BC را در نقطه ی X قطع کند. در این صورت دو مثلث قائم الزوایه ی XEB و AEB به حالت وتر و یک زاویه ($\angle ABE = \angle XBE$) با هم برابر هستند و در نتیجه $BX = AB$ و $XE = AE$ (*) حال با استفاده از قضیه ی سینوس ها در مثلث های ADE و XEC داریم:

$$\frac{\sin(\angle ADE)}{AE} = \frac{\sin(\angle DEA)}{AD}, \quad \frac{\sin(\angle XCE)}{XE} = \frac{\sin(\angle XEC)}{XC}$$

با توجه به این که $\angle ADE = \angle BCE$ ، دو زاویه ی $\angle XCE$ و $\angle ADE$ مکمل هستند و در نتیجه سینوس برابر دارند. این موضوع و * نتیجه می دهد که

$$\frac{\sin(\angle ADE)}{AE} = \frac{\sin(\angle XCE)}{XE} \Rightarrow \frac{\sin(\angle DEA)}{AD} = \frac{\sin(\angle XEC)}{XC}$$

اما دو زاویه ی $\angle DEA$ و $\angle XEC$ متقابل به رأس هستند و لذا سینوس برابر دارند. بنابراین $AD = XC$

و

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

$$(\star\star) \Rightarrow AB = BX = BC + XC = BC + AD$$

که همان چیزی است که گزینه ی (د) به آن اشاره می کند.

۲۰. گزینه ی (ج) صحیح است.

طبق رابطه ی اول داریم:

$$a^3 + (-b)^3 + 1^3 = 3a(-b)(1)$$

این یعنی مجموع مکعب های سه عدد برابر حاصل ضرب آن ها شده است. طبق اتحاد اویلر این نتیجه می دهد این سه عدد با هم برابر هستند و یا این که مجموع آن ها برابر صفر است. اگر $a = -b = 1$ ، $a^5 = 1 + a^5 = 2$ در حالی که $b^5 = -1$ پس این حالت امکان ندارد و $a - b + 1 = 0$ ، معادلاً $b = a + 1$. حال اگر این نتیجه را در رابطه ی دوم جای گذاری کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 1 + a^5 &= (1 + a)^5 \Rightarrow (1 + a)((1 + a)^4 - (a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)) = 0 \\ (1 + a)^4 - (a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) &= 5a^3 + 5a^2 + 5a = 5a(a^2 + a + 1) \\ \Rightarrow 5a(a + 1)(a^2 + a + 1) &= 0 \end{aligned}$$

از آن جا که $a^2 + a + 1 > 0$ ، تنها جواب های معادله ی اخیر $a = 0$ و $a = -1$ هستند که به ترتیب منجر به $b = 1$ و $b = 0$ می شوند. پس این دست گاه در مجموع دو جواب دارد.

۲۱. گزینه ی (ج) صحیح است.

دقت کنید که $a + \frac{1}{a} - 2 = \left(\frac{a-1}{\sqrt{a}}\right)^2$ و $a^3 + \frac{1}{a^3} - 2 = \left(\frac{a^3-1}{a\sqrt{a}}\right)^2$. پس

$$\begin{aligned} a^3 + \frac{1}{a^3} - 2 &\geq \lambda \left(a + \frac{1}{a} - 2\right) \Leftrightarrow \left(\frac{a^3-1}{a\sqrt{a}}\right)^2 - \lambda \left(\frac{a-1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a-1}{\sqrt{a}}\right)^2 \left(\left(\frac{a^2+a+1}{a}\right)^2 - \lambda\right) &\geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a^2+a+1}{a}\right)^2 \geq \lambda \end{aligned}$$

یعنی باید بزرگترین مقدار λ را بیابیم که رابطه ی بالا را برآورده کند. این یعنی باید کمترین مقدار عبارت $\left(\frac{a^2+a+1}{a}\right)^2$ را پیدا کنیم.

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2 &\Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow \frac{a^2 + a + 1}{a} = a + \frac{1}{a} + 1 \geq 3 \\ &\Rightarrow \left(\frac{a^2 + a + 1}{a}\right)^2 \geq 3^2 = 9 \end{aligned}$$

پس بیشترین مقدار ممکن برای λ ، 9 است.

۲۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

منظور از زاویه‌ی قورباغه، زاویه‌ای است که خط واصل بین قورباغه با جهت مثبت محور y می‌سازد. دقت کنید که زاویه را با حرکت در جهت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌کنیم. در هر حرکت جدید زاویه‌ی قورباغه 45° افزایش پیدا می‌کند، پس بعد از 15 مرحله قورباغه زاویه‌ی قورباغه $315^\circ = 15 \times 45^\circ$ می‌شود و بنابراین قورباغه روی قسمتی از خط $y = -x$ که درون ربع دوم مختصات قرار دارد، خواهد بود.

به علاوه اگر فاصله‌ی قورباغه تا مبدأ مختصات بعد از n گام n ام را d_n بنامیم. d_{n+1} طول وتر مثلث

قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی است که طول ساق آن برابر d_n است. بنابراین $d_{n+1} = \sqrt{2}d_n$. پس

$$d_{15} = \sqrt{2} \cdot d_{14} = (\sqrt{2})^2 d_{13} = \dots = (\sqrt{2})^{15} d_0 = (\sqrt{2})^{15} = 2^7 \sqrt{2} = 128\sqrt{2}$$

با توجه به این که (a, b) روی خط $y = -x$ قرار دارد، $b = -a > 0$ و

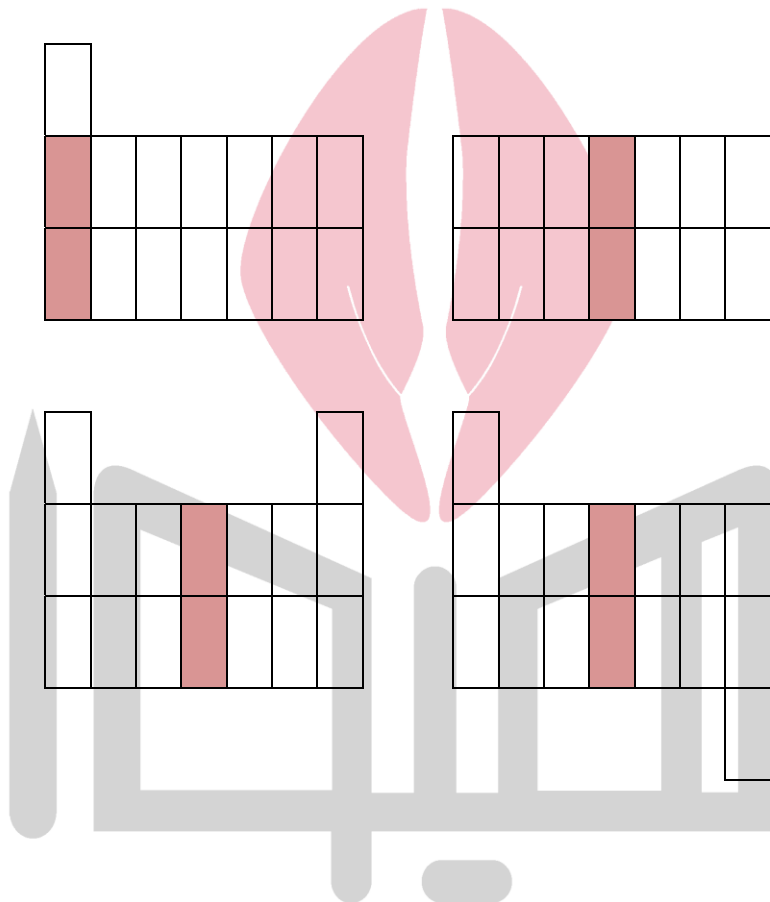
$$2^{15} = (2^7 \sqrt{2})^2 = d_{15}^2 = a^2 + b^2 = 2a^2 \Rightarrow a = -2^7 = -128$$

توضیح: می‌توان با اندکی تلاش به دست آورد که اگر قورباغه در خانه‌ی (x, y) قرار داشته باشد، بعد از جهش از این خانه با شیوه‌ای که در صورت سؤال بیان شده است به خانه‌ی $(x + y, y - x)$ می‌رود. (در حقیقت بردار (x, y) با دوران 90° در جهت ساعت‌گرد یعنی $(y, -x)$ جمع می‌شود.)

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

۲۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ادعا می‌کنیم در گزینه‌های (الف)، (ب)، (ج) و (د) نفر اول همواره می‌تواند برنده‌ی بازی باشد. به این صورت که در هر کدام از این چهار گزینه مطابق شکل زیر با قرار دادن این کاشی زمین بازی شکلی است که دارای یک خط تقارن یا یک مرکز تقارن است و به علاوه در این زمین جدید نفر دوم شروع کننده‌ی بازی است. حالا نفر اول در هر گام قرینه‌ی خانه‌هایی که نفر دوم با یک کاشی پر کرده است را با یک کاشی جدید پر می‌کند. با این نحوه‌ی بازی اگر نفر دوم بازی کند، نفر اول حتماً می‌تواند حرکت بعد از آن را هم انجام دهد و لذا نفر اول نمی‌تواند بازنده باشد و بنابراین حتماً برنده است.

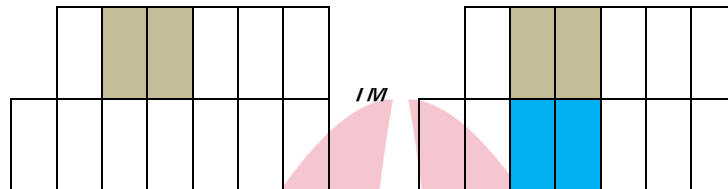


هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

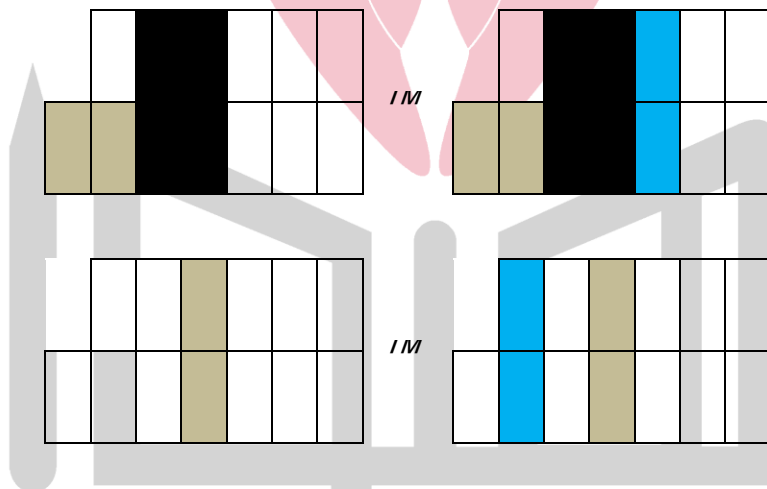
حال روشی آرایه می دهیم که نفر دوم می تواند با این روش در گزینه ی (ه) برنده ی بازی باشد.

اگر نفر اول یک کاشی افقی را در جدول قرار دهد طوری که شامل تک خانه ی پایین چپ جدول نباشد، نفر دوم یک کاشی افقی را دقیقاً پایین یا بالای کاشی نفر اول قرار می دهد. (اگر نفر اول در ردیف پایین گذاشته باشد، نفر دوم در ردیف بالا می گذارد و بالعکس)

در زیر شکل سمت چپ حرکت نفر اول و شکل سمت راست حرکت نفر دوم را تصویر می کند. خانه های مشکی رنگ هم خانه هایی را نشان می دهند که قبلاً با کاشی پر شده اند.



اگر نفر اول یک کاشی عمودی در جدول قرار دهد، یا این که یک کاشی افقی را مطابق شکل زیر طوری قرار دهد که تک خانه ی پایین سمت چپ جدول را بپوشاند، نفر دوم یک کاشی عمودی را در اولین ستون از سمت چپ که کاملاً خالی باشد قرار می دهد.



وقتی نفر اول و دوم یک دور بازی خود را انجام دهند، دو ستون از ستون های دوتایی جدول غیرقابل قابل استفاده می شود، اگر نفر اول یک بار از حرکت های دوم استفاده کند، تک ستون یک خانه ای هم غیرقابل استفاده می گردد. بنابراین در هر دو بازی هر دو نفر اول و دوم ۲ ستون از شش ستون کامل جدول (غیر از تک ستون ناقص) غیرقابل استفاده می شود. بنابراین با ادامه ی این روند به وضعیتی می رسیم که نفر اول نتواند بازی را ادامه دهد.

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

۲۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

فرض کنید ساعت ۵ و x دقیقه باشد، در این صورت زاویه‌ی عقربه‌ی دقیقه‌شمار نسبت به نقطه‌ی صفر (همان ۱۲)، $6x = \frac{x}{6} \times 360$ درجه و زاویه‌ی عقربه‌ی ساعت‌شمار برابر $150 + \frac{x}{2} = 5 \times 30 + \frac{x}{6} \times 30$ درجه باشد. حال اگر در ساعت a و b دقیقه عقربه‌ها در وضعیت مشابهی قرار داشته باشند. در این صورت:

$$30a + \frac{b}{2} = 6x \Rightarrow 6 \left| \frac{b}{2} \right| \Rightarrow 12 | b$$

$$6b = 150 + \frac{x}{2} \Rightarrow 6 \left| \frac{x}{2} \right| \Rightarrow x = 12k \quad (0 \leq k \leq 5)$$

$$\Rightarrow 6b = 150 + 6k \Rightarrow b = 25 + k$$

با توجه به این که b بر ۱۲ بخش پذیر است، باید $k + 1$ بر ۱۲ بخش پذیر باشد که برای $k = 0, 1, \dots, 5$ امکان ندارد.

۲۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

رشته‌ی مرحله‌ی i ام را با A_i نمایش می‌دهیم. همچنین منظور ما از نماد $A_i A_j$ این است که رشته‌ی مربوط به A_i در سمت چپ رشته‌ی A_j قرار گرفته است. به طور مثال $A_3 = A_3 A_1$.

به استقرا نشان می‌دهیم برای هر عدد طبیعی m ، $A_{3m+2} = A_{3m-1} A_{3m-2} A_{3m-1} A_{3m-1} A_{3m-2}$. (با اندکی بازی کردن برای رسیدن به A_8 و سپس A_8 از روی A_5 و با توجه به این که باقی‌مانده‌ی تقسیم ۱۳۸۲ بر ۳ برابر ۲ است می‌توان این رابطه را حدس زد.)

برای حالت $m = 1$ که حکم به وضوح برقرار است. ($A_8 = A_3 A_1 A_3 A_1 A_1$)

حال فرض کنید حکم برای k برقرار باشد، یعنی:

$$A_{3k+2} = A_{3k-1} A_{3k-2} A_{3k-1} A_{3k-1} A_{3k-2}$$

حال اگر باکتری‌ها سه مرحله رشد کنند به اندیس هر A_n ای سه واحد اضافه می‌گردد. پس

$$A_{3(k+1)+2} = A_{3k+5} = A_{3k+2} A_{3k+1} A_{3k+2} A_{3k+1} A_{3k+2}$$

و حکم ثابت می‌شود. حال از آنجا که تعداد باکتری‌های دو رشته‌ی $A_{3m-1} A_{3m-2}$ و $A_{3m-2} A_{3m-1}$ یکسان و برابر مجموع تعداد باکتری‌های رشته‌های A_{3m-1} و A_{3m-2} است، سه باکتری وسطی مربوط به A_{3m+2} همان سه باکتری وسطی مربوط به A_{3m-1} است و با استدلال مشابه سه باکتری وسطی A_{3m-1} همان سه باکتری وسطی A_{3m-4} است. با ادامه‌ی همین فرآیند می‌فهمیم که سه باکتری وسطی A_{3m+2}

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

همان سه باکتری وسطی A_5 است. پس با توجه به این که $1382 = 3 \times 460 + 2$ گزینه ی (الف) گزینه ی درست است.

۲۶. گزینه ی (ب) صحیح است.

ابتدا دقت کنید که n باید عددی فرد باشد. زیرا اگر n بر ۲ بخش پذیر شود:

$$\circ \equiv 2^n + 3^n \equiv 2^n + (-2)^n \equiv 2^n + 2^n \equiv 2^{n+1} \pmod{5} \quad (\text{به پیمانه ی } 5)$$

که امکان ندارد. حال برای $n \geq 3$ داریم: (حالت $n = 1$ و $n = 2$ به وضوح جواب نیستند.)
(دقت کنید که همه ی روابط زیر بالا به پیمانه ی ۱۲۵ هستند.)

$$\begin{aligned} \circ &\equiv 2^n + 3^n \equiv 2^n + (5-2)^n \equiv 2^n + \binom{n}{n} 5^n (-2)^0 + \dots + \binom{n}{1} 5^1 (-2)^{n-1} + \binom{n}{0} 5^n (-2)^n \\ &\equiv 2^n - \frac{n(n-1)}{2} 5^2 \times 2^{n-2} + 2^{n-1} \times 5 \times n - 2^n \equiv 2^{n-2} (-25n^2 + 45n) \end{aligned}$$

حال با استفاده ی از رابطه ی بالا خواهیم داشت:

$$125 \mid 2^{n-2} \times 5n(5n-9) \Rightarrow 25 \mid 2^{n-2} n(5n-9)$$

حال با توجه به این که $(5, 2) = 1$ و $(5, 1) = 1$ و $(5, -9) = (5, 5n-9) = 1$ و با به کارگیری لم اقلیدس نتیجه می شود که باید n بر ۲۵ بخش پذیر باشد. کوچک ترین عدد طبیعی مضرب ۲۵ خودش است که مجموع ارقامش برابر ۷ می باشد. پس گزینه ی (ب) صحیح است.

۲۷. گزینه ی (ج) درست است.

اولاً فرض کنید $10^{k-1} \leq n < 10^k$ یک عدد ریشه دار k رقمی باشد. در این صورت $n = a_k a_{k-1} \dots a_1$.
حال داریم

$$10^{k-1} \leq n = (a_k + a_{k-1} + \dots + a_1)^2 < (10 \cdot k)^2 \Rightarrow 10^{k-3} < k^2$$

اما به سادگی به کمک استقرا می توان نشان داد که اگر k بزرگ تر از ۴ باشد، $10^{k-3} \geq k^2$ و لذا عدد ریشه دار با بیش از ۴ رقم نداریم و بنابراین تعداد اعداد ریشه دار باید متناهی باشد.

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

حال ادعا می‌کنیم عدد ریشه‌دار ۴ رقمی هم وجود ندارد. اگر $n = \overline{abcd}$ یک عدد ریشه‌دار چهار رقمی باشد، این یعنی $۱۰۰۰ \leq n = (a + b + c + d)^2 < ۴۰^2 = ۱۶۰۰$ پس $a = ۱$ و اگر a برابر یک باشد، باید داشته باشیم $۱۰۰۰ \leq n = (۱ + b + c + d)^2 < (۱ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰)^2 = ۳۱^2 = ۹۶۱$ که امکان ندارد. پس عدد ریشه‌دار چهاررقمی هم نداریم. اما به وضوح ۸۱ یک عدد ریشه‌دار دورقمی است.

به علاوه دقت کنید که می‌دانیم باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۹ با باقی‌مانده‌ی تقسیم مجموع ارقامش بر ۹ با هم برابر هستند. اگر مجموع ارقام n را با $S(n)$ نمایش دهیم، ریشه‌دار است اگر $n = S(n)^2$ پس باید

$$n \equiv S(n) \equiv n \equiv S(n)^2 \equiv n^2 \pmod{9} \text{ (به پیمانه‌ی ۹)}$$

پس باید $9 | n(n-1)$ ، با توجه به این که n و $n-1$ هر دو نمی‌توانند بر ۳ بخش‌پذیر باشند این تنها در صورتی امکان دارد که $9 | n$ و یا $9 | n-1$. یعنی تمام اعداد ریشه‌دار به شکل $9k$ و $9k+1$ هستند و غیر از این دو صورت عدد ریشه‌داری نداریم.

توضیح: دقت کنید که اگر n عددی ریشه‌دار باشد، از آن‌جا که $n < ۱۰۰۰$ ، $S(n) = \sqrt{n} < \sqrt{۱۰۰۰}$ ، پس $S(n) \leq ۳۲$ اما $S(n) \equiv n \equiv ۰, ۱ \pmod{9}$ (به پیمانه‌ی ۹) پس $S(n) \in \{1, 8, 9, 17, 18, 26, 27\}$.

اما

$$S(8^2) = S(64) = 10 \neq 8$$

$$S(17^2) = S(289) = 19 \neq 17$$

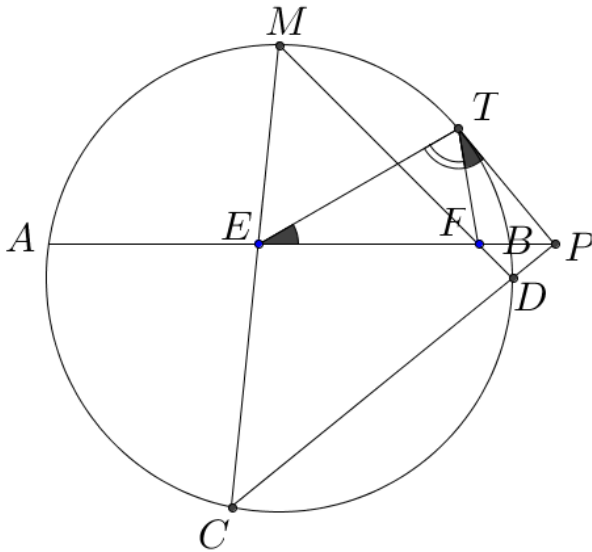
$$S(18^2) = S(324) = 9 \neq 18$$

$$S(26^2) = S(676) = 19 \neq 26$$

$$S(27^2) = S(729) = 18 \neq 27$$

بنابراین تنها عددهای ریشه‌دار ۱ و ۸۱ هستند.

۲۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.



ابتدا دقت کنید که $\widehat{AB} = \frac{1}{4}$ ، $\angle MBE = \angle BCM = \frac{1}{4}$ بنابراین با توجه به این که زاویه‌ی $\angle BME$ در دو مثلث BME و BMC مشترک است، این مثلث متشابه هستند. نسبت تشابه این دو مثلث نتیجه می‌دهد $MB^2 = ME \cdot MC$. با استدلال کاملاً مشابه و با توجه به مثلث‌های BAM و AMF به دست می‌آوریم $MA^2 = MF \cdot MD$. از آن جا که دو کمان MA و MB با هم برابر هستند، $MA^2 = MB^2$ و در نتیجه $ME \cdot MC = MF \cdot MD$ و این یعنی چهارضلعی $EFDC$ محاطی است. از محاطی بودن این چهارضلعی نتیجه می‌شود که $PF \cdot PE = PD \cdot PC$. اما طبق قوت P نسبت به دایره‌ی اصلی مسئله $PD \cdot PC = PT^2$. این رابطه نتیجه می‌دهد که دو مثلث PTE و PTF متشابه‌اند و لذا $\angle TEP = \angle PTF = 3^\circ$. در نتیجه داریم $\angle TPE = 18^\circ - 3^\circ - 3^\circ - 7^\circ = 5^\circ$.

۲۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

M را وسط ضلع AC و G را مرکز ثقل مثلث بگیرید. در این صورت نقطه‌ی A باید روی کمان درخور زاویه‌ی 15° نظیر پاره‌خط BM باشد. از آن جا که طول AG برابر $\frac{2}{3}$ میان‌ه‌ی نظیر رأس A است، کافی است کم‌ترین مقدار ممکن برای AG را بیابیم و آن را در $\frac{3}{2}$ ضرب کنیم. فرض کنید O مرکز این کمان درخور باشد و نیم‌خط OG دایره را در نقطه‌ی X قطع کند. حال داریم

$$OG + GA \geq OA = OX \Rightarrow GA \geq OX - OG = XG$$

یعنی کم‌ترین مقدار ممکن طول GX است. حال باید طول GX را بیابیم. با توجه به قوت نقطه‌ی G داریم:

$$TG \cdot GX = GA \cdot GM = 2 \Rightarrow (2R - GX)GX = 2$$

که T و R به ترتیب محل تماس دوم خط GX و دایره‌ی محیطی AMC و شعاع این دایره هستند.

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

$$R = \frac{3}{2 \sin(15^\circ)} = 3$$

پس $0 = GX^2 - 6GX + 2$ و بنابراین $GX = 3 \pm \sqrt{7}$ که چون $GX < R = 3$ تنها حالت $GX = 3 - \sqrt{7}$ قابل قبول است.

۳۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

T را نقطه‌ی وسط ضلع BC بگیرید و فرض کنید h_a, h_b, h_c به ترتیب طول عمودهای وارد از A, B, C بر T و MN باشند. از آن جا که قاعده‌ی هر سه مثلث همان MN است باید $h_b + h_c = h_a$. حال از آن جا که T نقطه‌ی وسط ضلع BC است، می‌توان به سادگی به کمک قضیه‌ی تالس نتیجه گرفت که $h_t = \frac{h_b + h_c}{2} = \frac{h_a}{2}$. حال فرض کنید خط واصل بین A و T ، خط مذکور در صورت سؤال را در نقطه‌ی S قطع کند. در این صورت به دلیل قضیه‌ی تالس و توازی عمودهای وارد از A و T ، پس $\frac{AS}{ST} = \frac{h_a}{h_t} = 2$ ، نقطه‌ای روی میانه‌ی نظیر ضلع BC از مثلث ABC است که این میانه را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کند، پس باید مرکز ثقل مثلث باشد و بنابراین این خط همواره از مرکز ثقل مثلث که نقطه‌ای ثابت در صفحه‌ی مثلث است می‌گذرد.

