

جلد اول: درس‌نامه + آزمون‌های مبحثی و جامع

# جامع ریاضی ۱ و حسابان + موج آزمون رشته ریاضی

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی



انتگرالگو

## به نام خدا

هدفمان از نوشتن این کتاب، فراهم آوردن مسیری است که در آن هم بتوانید مطالب کتاب حسابان ۲ را یاد بگیرید و بر آن‌ها مسلط شوید، هم مطالب کتاب‌های ریاضی ۱ و حسابان ۱ را مرور کنید. این کتاب سیزده فصل دارد. به جز فصل سیزدهم، هر فصل از چند درس تشکیل شده است. فصل سیزدهم ویژه «آزمون‌های جامع» است.

مباحث کتاب حسابان ۲ را در پنج فصل نخست گنجانده‌ایم. هر یک از این‌ها، در صورت لزوم، با درس‌هایی از کتاب‌های ریاضی ۱ و حسابان ۱ که پیش‌زمینه درس‌های متناظرشان از کتاب حسابان ۲ هستند، شروع می‌شود. هفت فصل بعدی مربوط به کتاب‌های ریاضی ۱ و حسابان ۱ هستند. در درس‌نامه‌ها مطالب را با جزئیات کامل، همراه با مثال‌های کلیدی و آموزنده آورده‌ایم. در انتهای هر درس چندین پرسش با عنوان «دست‌گرمی» آمده است. این پرسش‌ها معیاری است برای اینکه بفهمید تا چه حد درس را خوب یاد گرفته‌اید. پس از آن نوبت آزمون‌هاست. هر آزمون ده پرسش دارد. تلاش کرده‌ایم در هر آزمون همه مطالب مربوط به درس را بگنجانیم. البته، اگر درسی چند آزمون داشته باشد، معمولاً هر چه جلوتر برود، آزمون‌ها دشوارتر می‌شوند. در انتهای هر فصل هم چند «آزمون فصل» آورده‌ایم، که شامل آزمون‌های تألیفی و برگزیده کنکورهای سراسری است. فایل PDF این آزمون‌های تألیفی را می‌توانید با اسکن QR Code انتهای پیشگفتار یا از سایت انتشارات الگو به آدرس [www.olgoobooks.ir](http://www.olgoobooks.ir) دریافت کنید. سؤال‌های مربوط به کنکور را در همین کتاب آورده‌ایم.

برای هر مطلب که در درس‌نامه آمده است یک شماره (گام) اختصاص داده‌ایم که بتوانیم خواننده را به آن ارجاع دهیم. کل مطالب این کتاب را در ۳۵۹ گام تنظیم کرده‌ایم. در کنار هر آزمون، یک جدول راهنمای ارجاع قرار داده‌ایم که در آن مشخص کرده‌ایم برای حل هر سؤال چه مطالبی مورد نیاز است. شماره این مطالب را در کنار شماره سؤال در ستون گام آورده‌ایم. توصیه می‌کنیم اگر نتوانستید سؤالی را حل کنید قبل از اینکه به پاسخ‌نامه تشریحی مراجعه کنید، گام‌های اشاره شده در درس‌نامه را پیدا کنید و مطالعه نمایید. پاسخ پرسش‌های دست‌گرمی و آزمون‌های این کتاب در جلد دوم آورده شده است. می‌توانید نسخه چاپی جلد دوم را تهیه کنید، همین‌طور می‌توانید فایل PDF آن را با اسکن QR Code پشت جلد کتاب یا از سایت انتشارات الگو دریافت کنید. یادآوری می‌کنیم که اگر این کتاب را دارید، لازم نیست که کتاب موج آزمون ریاضی رشته ریاضی (از انتشارات الگو) را تهیه کنید، زیرا این کتاب شامل آزمون‌های کتاب موج آزمون نیز است.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها هاله ایمانی، فهیمه گودرزی و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها لیلا پرهیزکاری و راضیه صالحی برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

## مؤلفان



می‌توانید فایل PDF آزمون‌های تألیفی جامع فصل‌ها را به صورت رایگان با اسکن QR Code مقابل دریافت کنید.

◆ فصل اول: تابع

درس اول: مفاهیم اولیه (گام‌های ۱ تا ۷) ..... ۱

آزمون‌های ۱ و ۲ ..... ۷

درس دوم: توابع معروف (گام‌های ۸ تا ۱۳) ..... ۹

آزمون‌های ۳ و ۴ ..... ۱۴

درس سوم: سهمی و تابع درجه دوم (گام‌های ۱۴ تا ۲۱) ..... ۱۶

آزمون‌های ۵ تا ۷ ..... ۲۴

درس چهارم: دامنه و برد تابع و تساوی توابع (گام‌های ۲۲ تا ۲۴) ..... ۲۷

آزمون‌های ۸ تا ۱۰ ..... ۳۳

درس پنجم: مدل‌سازی با توابع (گام ۲۵) ..... ۳۶

آزمون ۱۱ ..... ۳۸

درس ششم: جبر توابع (گام ۲۶) ..... ۳۹

آزمون‌های ۱۲ تا ۱۴ ..... ۴۲

درس هفتم: ترکیب توابع (گام‌های ۲۷ تا ۲۹) ..... ۴۵

آزمون‌های ۱۵ تا ۱۸ ..... ۵۰

درس هشتم: تبدیل نمودار توابع (گام‌های ۳۰ تا ۳۹) ..... ۵۴

آزمون‌های ۱۹ تا ۲۲ ..... ۶۹

درس نهم: توابع یک‌به‌یک (گام‌های ۴۰ تا ۴۶) ..... ۷۷

آزمون‌های ۲۳ و ۲۴ ..... ۸۱

درس دهم: توابع یکنوا (گام‌های ۴۷ تا ۵۹) ..... ۸۳

آزمون‌های ۲۵ تا ۲۷ ..... ۹۱

درس یازدهم: تابع وارون (گام‌های ۶۰ تا ۶۹) ..... ۹۴

آزمون‌های ۲۸ تا ۳۲ ..... ۱۰۱

آزمون‌های ۳۳ و ۳۴: آزمون‌های فصل اول (برگزیده کنکورهای سراسری)

..... ۱۰۶

◆ فصل دوم: مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (گام‌های ۷۰ تا ۷۲) ..... ۱۰۸

آزمون‌های ۳۵ و ۳۶ ..... ۱۱۲

درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی (گام‌های ۷۳ تا ۸۱) ..... ۱۱۴

آزمون‌های ۳۷ و ۳۸ ..... ۱۲۱

درس سوم: اتحادهای مثلثاتی (گام‌های ۸۲ تا ۸۴) ..... ۱۲۳

آزمون‌های ۳۹ تا ۴۲ ..... ۱۲۸

درس چهارم: واحدهای اندازه‌گیری زاویه (گام‌های ۸۵ تا ۹۱) ..... ۱۳۲

آزمون‌های ۴۳ و ۴۴ ..... ۱۳۸

درس پنجم: نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها (گام‌های ۹۲ تا ۹۴) ..... ۱۴۰

آزمون‌های ۴۵ تا ۴۷ ..... ۱۴۴

درس ششم: سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (گام‌های ۹۵ و ۹۶) ..... ۱۴۷

آزمون‌های ۴۸ تا ۵۱ ..... ۱۵۱

درس هفتم: سینوس و کسینوس زاویه  $2\alpha$  (گام‌های ۹۷ تا ۱۰۳) ..... ۱۵۵

آزمون‌های ۵۲ تا ۵۵ ..... ۱۶۰

درس هشتم: تانژانت مجموع دو زاویه (گام‌های ۱۰۴ و ۱۰۵) ..... ۱۶۴

آزمون‌های ۵۶ تا ۵۹ ..... ۱۶۸

درس نهم: توابع مثلثاتی (گام‌های ۱۰۶ تا ۱۱۱) ..... ۱۷۲

آزمون‌های ۶۰ تا ۶۲ ..... ۱۸۱

درس دهم: معادلات مثلثاتی (گام‌های ۱۱۲ تا ۱۲۲) ..... ۱۸۴

آزمون‌های ۶۳ تا ۶۸ ..... ۱۹۶

آزمون‌های ۶۹ تا ۷۲: آزمون‌های فصل دوم (برگزیده کنکورهای سراسری)

..... ۲۰۲

### ◆ فصل سوم: حد و پیوستگی

درس اول: مفهوم حد و قضایای حد (گام‌های ۱۲۳ تا ۱۳۱).....	۲۰۶
آزمون‌های ۷۳ تا ۷۶.....	۲۱۴
درس دوم: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای تابع‌های گویا و گنگ (گام‌های ۱۳۲ تا ۱۳۵).....	۲۱۸
آزمون‌های ۷۷ و ۷۸.....	۲۲۳
درس سوم: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای حدهای مثلثاتی (گام‌های ۱۳۶ تا ۱۴۰).....	۲۲۵
آزمون‌های ۷۹ تا ۸۱.....	۲۳۱
درس چهارم: پیوستگی (گام‌های ۱۴۱ تا ۱۴۸).....	۲۳۴
آزمون‌های ۸۲ تا ۸۴.....	۲۳۹
درس پنجم: حد بی‌نهایت (گام‌های ۱۴۹ تا ۱۵۲).....	۲۴۲
آزمون‌های ۸۵ تا ۸۸.....	۲۴۸
درس ششم: مجانب قائم (گام‌های ۱۵۳ تا ۱۵۸).....	۲۵۲
آزمون‌های ۸۹ تا ۹۱.....	۲۵۷
درس هفتم: حد در بی‌نهایت (گام‌های ۱۵۹ تا ۱۶۳).....	۲۶۰
آزمون‌های ۹۲ تا ۹۴.....	۲۶۶
درس هشتم: مجانب افقی (گام‌های ۱۶۴ تا ۱۶۹).....	۲۶۹
آزمون‌های ۹۵ و ۹۶.....	۲۷۳
آزمون‌های ۹۷ تا ۹۹: آزمون‌های فصل سوم (برگزیده کنکورهای سراسری).....	۲۷۵

### ◆ فصل چهارم: مشتق

درس اول: مفهوم مشتق (گام‌های ۱۷۰ تا ۱۸۴).....	۲۷۸
آزمون‌های ۱۰۰ تا ۱۰۳.....	۲۸۷
درس دوم: قواعد مشتق‌گیری (گام‌های ۱۸۵ تا ۱۸۹).....	۲۹۱
آزمون‌های ۱۰۴ تا ۱۰۸.....	۲۹۷
درس سوم: مشتق تابع مرکب (گام‌های ۱۹۰ تا ۱۹۲).....	۳۰۲
آزمون‌های ۱۰۹ تا ۱۱۳.....	۳۰۶
درس چهارم: مشتق‌پذیری (گام‌های ۱۹۳ تا ۱۹۹).....	۳۱۱
آزمون‌های ۱۱۴ تا ۱۱۶.....	۳۱۷

درس پنجم: خط مماس بر نمودار تابع (گام‌های ۲۰۰ تا ۲۰۳).....	۳۲۰
آزمون‌های ۱۱۷ و ۱۱۸.....	۳۲۳
درس ششم: آهنگ تغییر (گام‌های ۲۰۴ و ۲۰۵).....	۳۲۵
آزمون ۱۱۹.....	۳۲۷
درس هفتم: مشتق دوم (گام ۲۰۶).....	۳۲۸
آزمون‌های ۱۲۰ و ۱۲۱.....	۳۳۰
درس هشتم: قاعده هوییتال (گام ۲۰۷).....	۳۳۲
آزمون‌های ۱۲۲ و ۱۲۳.....	۳۳۵
آزمون‌های ۱۲۴ تا ۱۲۸: آزمون‌های فصل چهارم (برگزیده کنکورهای سراسری).....	۳۳۷

### ◆ فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع (گام‌های ۲۰۸ و ۲۰۹).....	۳۴۲
آزمون‌های ۱۲۹ و ۱۳۰.....	۳۴۵
درس دوم: نقاط بحرانی (گام ۲۱۰).....	۳۴۷
آزمون‌های ۱۳۱ و ۱۳۲.....	۳۴۹
درس سوم: اکسترم‌های نسبی (گام‌های ۲۱۱ تا ۲۱۵).....	۳۵۱
آزمون‌های ۱۳۳ تا ۱۳۶.....	۳۵۸
درس چهارم: اکسترم‌های مطلق (گام‌های ۲۱۶ تا ۲۱۸).....	۳۶۲
آزمون‌های ۱۳۷ و ۱۳۸.....	۳۶۶
درس پنجم: بهینه‌سازی (گام ۲۱۹).....	۳۶۸
آزمون‌های ۱۳۹ تا ۱۴۱.....	۳۷۲
درس ششم: جهت تقعر (گام‌های ۲۲۰ تا ۲۲۳).....	۳۷۵
آزمون‌های ۱۴۲ تا ۱۴۴.....	۳۷۹
درس هفتم: نقطه عطف (گام‌های ۲۲۴ و ۲۲۵).....	۳۸۲
آزمون‌های ۱۴۵ تا ۱۴۷.....	۳۸۶
درس هشتم: رسم نمودار (گام‌های ۲۲۶ تا ۲۳۲).....	۳۸۹
آزمون‌های ۱۴۸ تا ۱۵۲.....	۴۰۱
آزمون‌های ۱۵۳ تا ۱۵۶: آزمون‌های فصل پنجم (برگزیده کنکورهای سراسری).....	۴۰۷



### ◆ فصل ششم: بازه و مجموعه

درس اول: مجموعه‌های اعداد (گام‌های ۲۳۳ و ۲۳۴) ..... ۴۱۱  
آزمون‌های ۱۵۷ و ۱۵۸ ..... ۴۱۴  
درس دوم: مجموعه‌ها (گام‌های ۲۳۵ تا ۲۴۳) ..... ۴۱۶  
آزمون‌های ۱۵۹ و ۱۶۰ ..... ۴۲۰

### ◆ فصل هفتم: الگو و دنباله

درس اول: الگو و دنباله (گام‌های ۲۴۴ تا ۲۴۶) ..... ۴۲۲  
آزمون‌های ۱۶۱ و ۱۶۲ ..... ۴۲۶  
درس دوم: دنباله حسابی (گام‌های ۲۴۷ تا ۲۵۵) ..... ۴۲۸  
آزمون‌های ۱۶۳ و ۱۶۴ ..... ۴۳۱  
درس سوم: دنباله هندسی (گام‌های ۲۵۶ تا ۲۶۳) ..... ۴۳۳  
آزمون‌های ۱۶۵ و ۱۶۶ ..... ۴۳۷  
درس چهارم: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (گام‌های ۲۶۴ تا ۲۶۸) ..... ۴۳۹  
آزمون‌های ۱۶۷ تا ۱۷۰ ..... ۴۴۴  
آزمون‌های ۱۷۱ و ۱۷۲: آزمون‌های فصل هفتم (برگزیده کنکورهای سراسری) ..... ۴۴۸

### ◆ فصل هشتم: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم

درس اول: توان و ریشه (گام‌های ۲۶۹ تا ۲۷۴) ..... ۴۵۰  
آزمون‌های ۱۷۳ و ۱۷۴ ..... ۴۵۳  
درس دوم: اتحاد (گام‌های ۲۷۵ تا ۲۸۲) ..... ۴۵۵  
آزمون‌های ۱۷۵ تا ۱۷۸ ..... ۴۶۰  
درس سوم: تجزیه (گام‌های ۲۸۳ و ۲۸۴) ..... ۴۶۴  
آزمون‌های ۱۷۹ و ۱۸۰ ..... ۴۶۷  
درس چهارم: گویا کردن مخرج‌های گنگ (گام ۲۸۵) ..... ۴۶۹  
آزمون ۱۸۱ ..... ۴۷۱  
درس پنجم: بخش‌پذیری و تقسیم (گام‌های ۲۸۶ تا ۲۸۸) ..... ۴۷۲  
آزمون‌های ۱۸۲ و ۱۸۳ ..... ۴۷۴

### ◆ فصل نهم: معادله، تعیین علامت و نامعادله

درس اول: حل معادله درجه دوم (گام‌های ۲۸۹ تا ۲۹۵) ..... ۴۷۶  
آزمون‌های ۱۸۴ و ۱۸۵ ..... ۴۸۰  
درس دوم: روابط بین ضرایب و جواب‌های معادله درجه دوم (گام‌های ۲۹۶ تا ۲۹۹) ..... ۴۸۲  
آزمون‌های ۱۸۶ و ۱۸۷ ..... ۴۸۶

درس سوم: رابطه بین ضرایب و علامت جواب‌های معادله درجه دوم (گام‌های ۳۰۰ و ۳۰۱) ..... ۴۸۸  
آزمون ۱۸۸ ..... ۴۹۰  
درس چهارم: معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم خاص (گام‌های ۳۰۲ تا ۳۰۵) ..... ۴۹۱  
آزمون ۱۸۹ ..... ۴۹۵  
درس پنجم: معادله‌های گویا (گام‌های ۳۰۶ تا ۳۱۰) ..... ۴۹۶  
آزمون‌های ۱۹۰ و ۱۹۱ ..... ۵۰۰  
درس ششم: تعیین علامت و نامعادله (گام‌های ۳۱۱ تا ۳۱۸) ..... ۵۰۲  
آزمون‌های ۱۹۲ و ۱۹۳ ..... ۵۰۹  
درس هفتم: معادله‌های گنگ (گام‌های ۳۱۹ تا ۳۲۲) ..... ۵۱۱  
آزمون‌های ۱۹۴ و ۱۹۵ ..... ۵۱۴  
درس هشتم: حل هندسی معادلات (گام ۳۲۳) ..... ۵۱۶  
آزمون‌های ۱۹۶ و ۱۹۷ ..... ۵۱۹  
آزمون‌های ۱۹۸ و ۱۹۹: آزمون‌های فصل نهم (برگزیده کنکورهای سراسری) ..... ۵۲۱

### ◆ فصل دهم: قدرمطلق و جزء صحیح

درس اول: قدرمطلق و ویژگی‌های آن (گام‌های ۳۲۴ و ۳۲۵) ..... ۵۲۳  
آزمون ۲۰۰ ..... ۵۲۶  
درس دوم: معادلات و نامعادلات قدرمطلق (گام‌های ۳۲۶ تا ۳۲۹) ..... ۵۲۷  
آزمون‌های ۲۰۱ تا ۲۰۳ ..... ۵۳۴  
درس سوم: توابع شامل قدرمطلق (گام‌های ۳۳۰ تا ۳۳۲) ..... ۵۳۷  
آزمون‌های ۲۰۴ و ۲۰۵ ..... ۵۴۰  
درس چهارم: جزء صحیح و ویژگی‌های آن (گام‌های ۳۳۳ تا ۳۳۴) ..... ۵۴۲  
آزمون‌های ۲۰۶ و ۲۰۷ ..... ۵۴۵

درس پنجم: تابع جزء صحیح (گام‌های ۳۳۵ تا ۳۳۷) ..... ۵۴۷  
آزمون‌های ۲۰۸ و ۲۰۹ ..... ۵۵۰  
آزمون ۲۱۰: آزمون فصل دهم (برگزیده کنکورهای سراسری) ..... ۵۵۲

#### ◆ فصل یازدهم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی (گام‌های ۳۳۸ تا ۳۴۰) ..... ۵۵۳  
آزمون‌های ۲۱۱ و ۲۱۲ ..... ۵۵۷  
درس دوم: معادلات و نامعادلات نمایی (گام‌های ۳۴۱ و ۳۴۲) ..... ۵۵۹  
آزمون‌های ۲۱۳ و ۲۱۴ ..... ۵۶۲  
درس سوم: لگاریتم (گام‌های ۳۴۳ تا ۳۴۵) ..... ۵۶۴  
آزمون‌های ۲۱۵ تا ۲۱۷ ..... ۵۶۷  
درس چهارم: توابع لگاریتمی (گام‌های ۳۴۶ تا ۳۴۹) ..... ۵۷۰  
آزمون‌های ۲۱۸ و ۲۱۹ ..... ۵۷۵  
درس پنجم: معادلات و نامعادلات لگاریتمی (گام‌های ۳۵۰ و ۳۵۱) ..... ۵۷۷  
آزمون‌های ۲۲۰ تا ۲۲۲ ..... ۵۸۱  
آزمون‌های ۲۲۳ و ۲۲۴: آزمون‌های فصل یازدهم (برگزیده کنکورهای  
سراسری) ..... ۵۸۴

#### ◆ فصل دوازدهم: هندسه تحلیلی

درس اول: خط راست (گام‌های ۳۵۲ تا ۳۵۹) ..... ۵۸۶  
آزمون‌های ۲۲۵ تا ۲۲۷ ..... ۵۹۳

#### ◆ فصل سیزدهم: آزمون‌های جامع

آزمون‌های ۲۲۸ تا ۲۳۵ ..... ۵۹۶

#### ◆ فصل چهاردهم: پاسخنامه کلیدی

دست‌گرمی‌ها ..... ۶۱۲  
آزمون‌ها ..... ۶۱۴

#### ◆ فصل پانزدهم: کنکور ۹۹ و ۱۴۰۰

آزمون‌های ۲۳۶ تا ۲۳۹: پرسش‌های چهارگزینه‌ای کنکور ۹۹ ..... ۶۲۱  
آزمون‌های ۲۴۰ تا ۲۴۳: پرسش‌های چهارگزینه‌ای کنکور ۱۴۰۰ ..... ۶۲۹

## درس اول: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

### تعریف نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویه، نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویه حاده به طول وتر مثلث را **سینوس** این زاویه می‌نامند:

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}, \quad \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC}$$

همچنین، نسبت طول ضلع مجاور به هر زاویه حاده (به‌جز وتر) به طول وتر مثلث را **کسینوس** این زاویه می‌نامند:

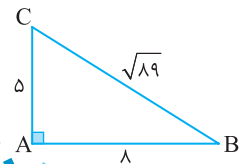
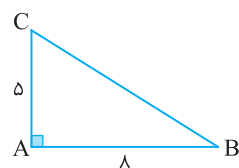
$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}, \quad \cos \hat{C} = \frac{AC}{BC}$$

همین‌طور، نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویه حاده به طول ضلع مجاور به این زاویه (به‌جز وتر) را **تانژانت** این زاویه می‌نامند:

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}, \quad \tan \hat{C} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cot \hat{B} = \frac{AB}{AC}, \quad \cot \hat{C} = \frac{AC}{AB}$$

و عکس تانژانت یک زاویه را **کوتانژانت** این زاویه می‌نامند:



در شکل مقابل مقدار  $\sin \hat{B} + \cos \hat{B}$  کدام است؟

(۲)  $\frac{40}{89}$

(۴)  $\frac{\sqrt{89}}{13}$

(۱)  $\frac{89}{40}$

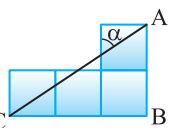
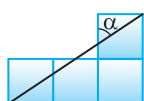
(۳)  $\frac{13}{\sqrt{89}}$

از قضیه فیثاغورس می‌توانیم طول وتر مثلث را به‌دست آوریم:  $BC = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$ . بنابراین

$$\sin \hat{B} + \cos \hat{B} = \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC} = \frac{5}{\sqrt{89}} + \frac{8}{\sqrt{89}} = \frac{13}{\sqrt{89}}$$

تست

راه‌حل



در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{3}$

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۲)  $\frac{2}{3}$

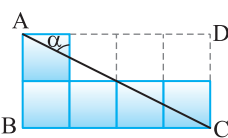
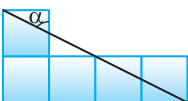
(۱)  $\frac{3}{2}$

از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که طبق قضیه خطوط موازی و مورب،  $\alpha = \hat{CAB}$ . بنابراین

$$\tan \alpha = \tan \hat{CAB} = \frac{CB}{AB} = \frac{2}{3}$$

تست

راه‌حل



در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار  $\sin \alpha$  کدام است؟

(۲)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۴)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(۱)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$

از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیه خطوط موازی و مورب،  $\alpha = \hat{ACD}$ . بنابراین

$$\sin \alpha = \sin \hat{ACD} = \frac{AD}{AC}$$

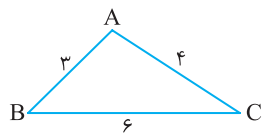
از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث  $ACD$ ،  $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4^2 + 2^2 = 20$ . پس

$$\sin \alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

تست

راه‌حل

تست ۴



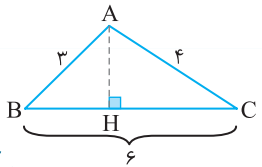
در شکل مقابل مقدار  $\cos \hat{B} + \frac{4}{3} \cos \hat{C}$  کدام است؟

۱ (۲)

۲ (۱)

$\frac{3}{4}$  (۴)

$\frac{4}{3}$  (۳)



مطابق شکل، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه ABH،  $\cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{3}$ . در مثلث قائم‌الزاویه AHC،  $\cos \hat{C} = \frac{HC}{AC} = \frac{HC}{4}$ . بنابراین  $\cos \hat{B} + \frac{4}{3} \cos \hat{C} = \frac{BH}{3} + \frac{4}{3} \left( \frac{HC}{4} \right) = \frac{BH+HC}{3} = \frac{BC}{3} = 2$

راه‌حل

نسبت‌های مثلثاتی زوایه‌های معروف

مقدار نسبت مثلثاتی	$\sin \hat{A}$	$\cos \hat{A}$	$\tan \hat{A}$	$\cot \hat{A}$
مقدار زاویه A				
$30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۱
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

تست ۵



مطابق شکل درختی به ارتفاع ۳ متر از نقطه A با زاویه  $14^\circ$  و از نقطه B با زاویه  $55^\circ$  دیده می‌شود. فاصله A از B تقریباً چقدر است؟ ( $\tan 55^\circ \approx 1/19$ ,  $\tan 14^\circ \approx 0/25$ )

۱۲/۵۲ (۴)

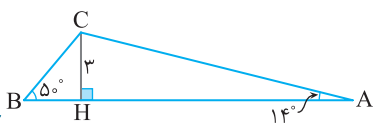
۱۴/۵۲ (۳)

۱۳/۵۲ (۲)

۱۲ (۱)

مطابق شکل روبه‌رو، در مثلث قائم‌الزاویه CBH،  $\tan 55^\circ = \frac{CH}{BH} = \frac{3}{BH}$ . پس  $\frac{3}{BH} = 1/19$ ، یعنی  $BH = \frac{3}{1/19} = 2/52$ .

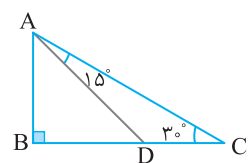
راه‌حل



در مثلث قائم‌الزاویه AHC،  $\tan 14^\circ = \frac{CH}{HA} = \frac{3}{HA}$ . پس  $\frac{3}{HA} = 0/25$ ، یعنی  $HA = \frac{3}{0/25} = 12$ .

بنابراین فاصله دو نقطه A و B تقریباً برابر است با  $BA = BH + HA \approx 2/52 + 12 = 14/52$ .

تست ۶



در شکل مقابل طول CD چقدر است؟ ( $AD = 2\sqrt{2}$ )

$2(\sqrt{3}+1)$  (۲)

$2(\sqrt{3}-1)$  (۱)

$3\sqrt{3}$  (۴)

$2\sqrt{3}$  (۳)

ابتدا توجه کنید که  $\hat{BAC} = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ . پس  $\hat{BAD} = \hat{BAC} - \hat{DAC} = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$ .

راه‌حل

در مثلث قائم‌الزاویه DBA،  $\cos \hat{BAD} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{AB}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{2\sqrt{2}}$

بنابراین  $AB = 2$ . همچنین، در همین مثلث،

$\sin \hat{BAD} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{BD}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BD}{2\sqrt{2}}$

بنابراین  $BD = 2$ . از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC،

$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{BC} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$

به این ترتیب  $CD = BC - BD = 2\sqrt{3} - 2 = 2(\sqrt{3} - 1)$ .

بنابراین  $BD = 2$ . از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC،



تست

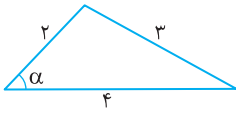
در شکل مقابل مقدار  $\cos \alpha$  کدام است؟

(۱)  $\frac{7}{8}$

(۳)  $\frac{3}{4}$

(۲)  $\frac{13}{16}$

(۴)  $\frac{11}{16}$

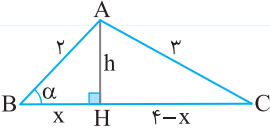


راه حل

از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABH و ACH با توجه به قضیه فیثاغورس،

$$x^2 + h^2 = 4, \quad h^2 + (4-x)^2 = 9 \Rightarrow h^2 + x^2 + 16 - 8x = 9$$

اگر به جای  $x^2 + h^2$  در معادله دوم مقدار ۴ را قرار دهیم، می‌توان مقدار  $x$  را به دست آورد



$$4 + 16 - 8x = 9 \Rightarrow 8x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{8}$$

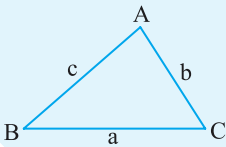
اکنون در مثلث قائم‌الزاویه ABH مقدار  $\cos \alpha$  را به دست می‌آوریم،  $\cos \hat{B} = \frac{BH}{AB}$ ، پس  $\cos \alpha = \frac{x}{2} = \frac{11}{16}$ .

۷۲

محاسبه مساحت مثلث

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول‌های دو ضلع آن در سینوس زاویه میان این دو ضلع.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$$



تست

در مثلث متساوی‌الساقین ABC می‌دانیم  $AB=AC$ ،  $\hat{B} = 67/5^\circ$  و مساحت مثلث  $9\sqrt{2}$  است. طول ساق مثلث کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

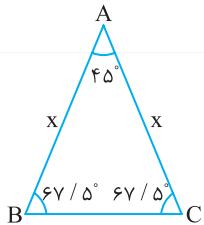
(۴) ۶

راه حل

مطابق شکل مقابل اندازه زاویه A برابر  $45^\circ$  است و اگر طول ساق مثلث را  $x$  فرض کنیم، مساحت مثلث برابر

$$S = \frac{1}{2} x^2 \sin \hat{A}$$

$$9\sqrt{2} = \frac{1}{2} x^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$



تست

در شکل روبه‌رو  $S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ADC}$  مقدار  $\sin \alpha$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$

(۳)  $\frac{3}{4}$

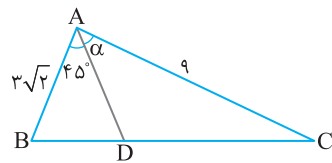
(۲)  $\frac{2}{3}$

(۴)  $\frac{1}{2}$

راه حل

توجه کنید که

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ADC} \Rightarrow \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} AD \times AC \times \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 9 \times \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$



تست

در یک متوازی‌الاضلاع که مساحت آن برابر  $10\sqrt{3}$  است، اندازه یک ضلع برابر ۲ و اندازه یک زاویه  $60^\circ$  است. اندازه ضلع دیگر کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۱۰

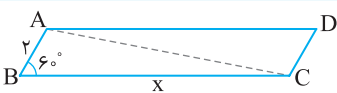
(۳) ۸

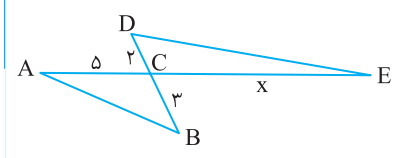
(۴) ۱۲

راه حل

مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD دو برابر مساحت مثلث ABC است. پس مساحت مثلث ABC برابر  $5\sqrt{3}$  است. بنابراین

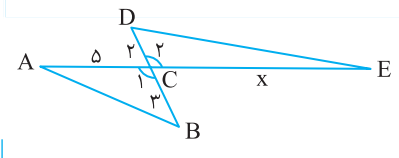
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times x \times \sin 60^\circ \Rightarrow 5\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} x \Rightarrow x = 10$$





در شکل مقابل نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث CDE برابر  $\frac{3}{4}$  است. مقدار x کدام است؟

- (۱) ۴  
(۲) ۶  
(۳) ۹  
(۴) ۱۰

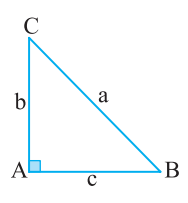


توجه کنید که  $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ، پس  $\sin \hat{C}_1 = \sin \hat{C}_2$  از طرف دیگر،

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CDE}} = \frac{\frac{1}{2} CA \times CB \times \sin \hat{C}_1}{\frac{1}{2} CD \times CE \times \sin \hat{C}_2} = \frac{CA \times CB}{CD \times CE} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{2 \times x} \Rightarrow x = 10$$

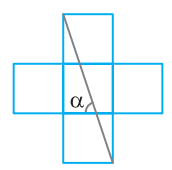
راه حل

دست گرمی



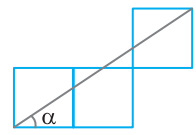
۵۹- در مثلث قائم‌الزاویه ABC، اگر  $b=5$  و  $\cos \hat{B} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۶  
(۲) ۷  
(۳)  $\sqrt{7}$   
(۴) ۱۴



۶۰- در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

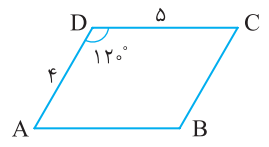


۶۱- در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار  $\sin \alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{\sqrt{13}}$   
(۲)  $\frac{2}{\sqrt{13}}$   
(۳)  $\frac{1}{\sqrt{11}}$   
(۴)  $\frac{2}{\sqrt{11}}$

۶۲- مقدار عبارت  $A = \frac{4 \sin^3 6^\circ - 3 \sin 6^\circ}{4 \cos^3 2^\circ - 3 \cos 2^\circ}$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) -۱  
(۳)  $\frac{1}{2}$   
(۴) صفر



۶۳- در شکل مقابل مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD چقدر است؟

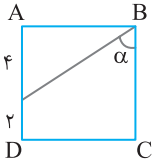
- (۱)  $5\sqrt{3}$   
(۲)  $10\sqrt{3}$   
(۳) ۵  
(۴) ۱۰

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (۱)

آزمون ۳۵

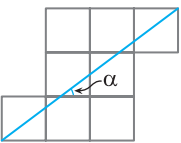
۳۴۱- در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ،  $\hat{A}=90^\circ$ ،  $\sin \hat{B}=\frac{1}{3}$  و  $AC=2$ . مقدار  $\tan \hat{C}$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$       (۲)  $\sqrt{6}$       (۳)  $2\sqrt{3}$       (۴)  $\sqrt{3}$



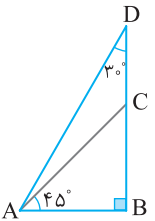
۳۴۲- در شکل مقابل ABCD مربع است. مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{2}{3}$       (۳)  $\frac{4}{3}$       (۴)  $\frac{3}{2}$



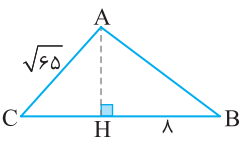
۳۴۳- در شکل روبه‌رو طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار  $\tan \alpha + \cot \alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{25}{6}$       (۲)  $\frac{49}{16}$       (۳)  $\frac{49}{15}$       (۴)  $\frac{25}{12}$



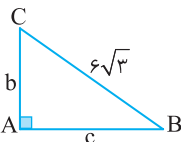
۳۴۴- در شکل مقابل نسبت طول DC به طول AC کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$       (۲)  $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$       (۳)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2}$       (۴)  $\sqrt{3}-\sqrt{2}$



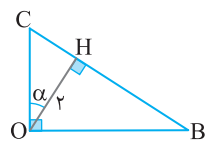
۳۴۵- در شکل مقابل  $HB=8$  و  $\tan \hat{B}=\frac{3}{4}$ . طول CH کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{29}$       (۲) ۶      (۳)  $\sqrt{35}$       (۴)  $\sqrt{24}$



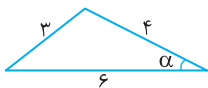
۳۴۶- در شکل مقابل  $\hat{B}=\sqrt{2}$ . مساحت مثلث چقدر است؟

- (۱) ۱۸      (۲) ۳۶      (۳)  $18\sqrt{2}$       (۴)  $36\sqrt{2}$



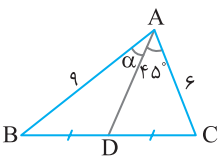
۳۴۷- در شکل مقابل  $OH=2$ . مقدار  $OB+OC$  کدام است؟

- (۱)  $\tan \alpha + \cot \alpha$       (۲)  $\frac{2}{\sin \alpha} + \frac{2}{\cos \alpha}$       (۳)  $2 \tan \alpha$       (۴)  $2 \cot \alpha$



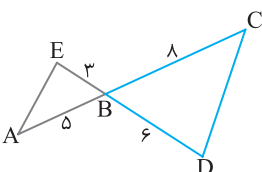
۳۴۸- در شکل مقابل مقدار  $\sin \alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{455}}{36}$       (۲)  $\frac{\sqrt{455}}{48}$       (۳)  $\frac{29}{36}$       (۴)  $\frac{29}{48}$



۳۴۹- در شکل مقابل مقدار  $\sin \alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$       (۳)  $\frac{2}{3}$       (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$



۳۵۰- در شکل مقابل نسبت مساحت مثلث ABE به مساحت مثلث BCD چقدر است؟

- (۱)  $\frac{5}{16}$       (۲)  $\frac{4}{5}$       (۳)  $\frac{7}{15}$       (۴)  $\frac{3}{5}$

سؤال	گام
۳۴۱	۷۰
۳۴۲	۷۰
۳۴۳	۷۰
۳۴۴	۷۰ ۷۱
۳۴۵	۷۰
۳۴۶	۷۰
۳۴۷	۷۰
۳۴۸	۷۰
۳۴۹	۷۱ ۷۲
۳۵۰	۷۲

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (۲)

سؤال	گام
۳۵۱	۷۰
۳۵۲	۷۰
۳۵۳	۷۰ ۷۱
۳۵۴	۷۰ ۷۱
۳۵۵	۷۰ ۷۱
۳۵۶	۷۰
۳۵۷	۷۰
۳۵۸	۷۰
۳۵۹	۷۰ ۷۱ ۷۲
۳۶۰	۷۱ ۷۲

۳۵۱- در مثلث  $ABC$ ، اگر  $\hat{C}=90^\circ$ ،  $\sin \hat{B}=\frac{4}{5}$  و  $b+c=7$ ، مقدار  $a$  کدام است؟

(۱)  $\frac{5}{3}$  (۲)  $\frac{7}{3}$  (۳) ۳ (۴)  $\frac{11}{3}$

۳۵۲- در شکل روبه‌رو طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{4}$  (۲)  $\frac{4}{3}$  (۳)  $\frac{3}{5}$  (۴)  $\frac{5}{3}$

۳۵۳- در شکل مقابل نسبت طول ضلع  $HC$  به طول ضلع  $BH$  چقدر است؟

(۱)  $\sqrt{3}$  (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)  $\sqrt{5}$

۳۵۴- مطابق شکل روبه‌رو از دو نقطه  $A$  و  $B$  روی زمین که ۲۴ متر از هم فاصله دارند، بالاترین قسمت یک ساختمان به ترتیب با زاویه‌های  $30^\circ$  و  $60^\circ$  دیده می‌شود. ارتفاع ساختمان کدام است؟

(۱)  $2\sqrt{3}$  (۲)  $6\sqrt{3}$  (۳)  $4\sqrt{3}$  (۴)  $3\sqrt{3}$

۳۵۵- در مثلث متساوی‌الساقین مقابل  $AB=BC$  و طول ارتفاع وارد بر ضلع  $BC$  برابر  $8\sqrt{3}$  است. طول ضلع  $BC$  کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳)  $8\sqrt{3}$  (۴)  $16\sqrt{3}$

۳۵۶- در شکل روبه‌رو  $CM=AB$  و  $\tan \theta=3 \tan \alpha$  حاصل عبارت  $\cot \alpha + \cot \theta$  کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۷

۳۵۷- در شکل مقابل  $BC=4$  مقدار  $\frac{BH}{HC}$  کدام است؟

(۱)  $\tan^2 \alpha$  (۲)  $\tan^2 \beta$  (۳)  $\sin \alpha \cos \alpha$  (۴)  $\sin \beta + \cos \beta$

۳۵۸- در نیم‌دایره شکل روبه‌رو،  $BD=x$  و  $DC=\lambda x$  مقدار  $\cos \alpha$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۳۵۹- در شکل مقابل طول ضلع  $AB$  چقدر است؟

(۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{2}$  (۳)  $4\sqrt{2}$  (۴)  $8\sqrt{2}$

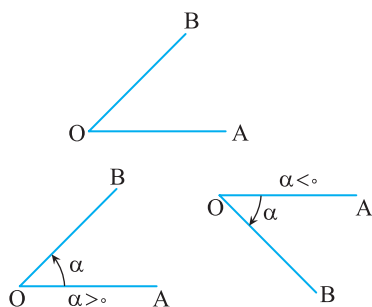
۳۶۰- در شکل روبه‌رو  $S_{ADE} + S_{ABC} = \frac{41}{4}$  اندازه زاویه حاده  $A$  کدام است؟

(۱)  $60^\circ$  (۲)  $45^\circ$  (۳)  $30^\circ$  (۴)  $15^\circ$

## درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی

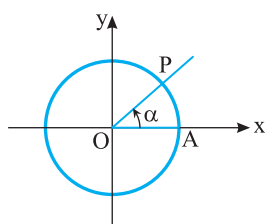
### تعاریف اولیه

#### زاویه مثلثاتی

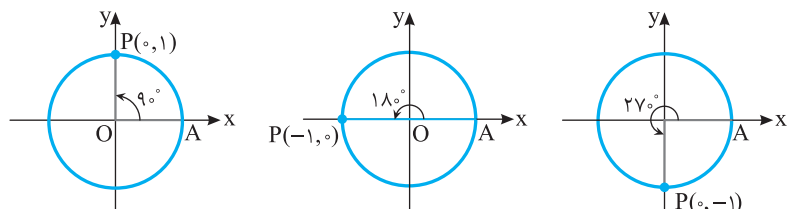


دو نیم‌خط  $OA$  و  $OB$  را در نظر بگیرید که در نقطه  $O$  مشترک‌اند. اگر نیم‌خط  $OA$  حول نقطه  $O$  دوران کند و بر نیم‌خط  $OB$  منطبق شود، **زاویه‌ای مثلثاتی** ایجاد می‌شود.  $OA$  را ضلع ابتدایی،  $OB$  را ضلع انتهایی و مقدار دوران را **مقدار زاویه مثلثاتی** می‌نامند. اگر دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (پادساعتگرد) باشد، اندازه زاویه را منفی در نظر می‌گیرند و اگر در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت (پادساعتگرد) باشد، اندازه زاویه را مثبت در نظر می‌گیرند. اگر رأس زاویه بر مبدأ مختصات واقع باشد و ضلع ابتدایی زاویه بر قسمت مثبت محور طول‌ها واقع باشد، می‌گوییم زاویه در **موقعیت استاندارد** است. از این پس تمام زاویه‌ها را در موقعیت استاندارد در نظر می‌گیریم.

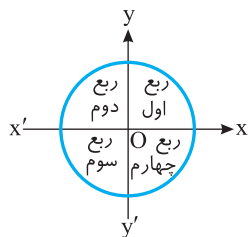
#### دایره مثلثاتی



دایره‌ای به شعاع ۱ واحد را که مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق باشد، **دایره مثلثاتی** می‌نامند. نقطه تقاطع دایره با محور طول‌ها  $A(1, 0)$  و  $OA$  ضلع ابتدایی تمام زاویه‌های مثلثاتی است. اگر  $OA$  به اندازه  $\alpha$  مطابق شکل روبه‌رو دوران کند، بر  $OP$  منطبق می‌شود.  $\alpha$  را اندازه زاویه مثلثاتی ایجاد شده و کمان  $AP$  را کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  می‌نامیم. چون ضلع ابتدایی تمام زاویه‌های مثلثاتی را  $OA$  فرض کرده‌ایم، پس با معلوم بودن نقطه  $P$  روی دایره و جهت دوران، زاویه  $\alpha$  مشخص می‌شود. مثلاً وقتی  $P$  در نقطه‌های  $(0, 1)$ ،  $(-1, 0)$  و  $(0, -1)$  قرار گیرد و جهت دوران پادساعتگرد باشد، زاویه‌های زیر مشخص می‌شوند:



#### ناحیه‌های مثلثاتی



محورهای  $x'Ox$  و  $y'Oy$  صفحه مختصات را به چهار ناحیه تقسیم کرده‌اند. ناحیه بین  $Ox$  و  $Oy$  را **ناحیه اول** یا **ربع اول** مثلثاتی می‌نامند. همچنین ناحیه بین  $Oy$  و  $Ox'$  را **ربع دوم** مثلثاتی، ناحیه بین  $Ox'$  و  $Oy'$  را **ربع سوم** مثلثاتی و ناحیه بین  $Ox$  و  $Oy'$  را **ربع چهارم** مثلثاتی می‌نامند.

### تذکر

اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  در نقطه‌های  $(0, 1)$ ،  $(-1, 0)$ ،  $(0, -1)$  یا  $(1, 0)$  قرار داشته باشد، زاویه  $\alpha$  در هیچ‌یک از چهار ناحیه مثلثاتی قرار ندارد.

### نکته

ناحیه‌ای که نقطه  $P$  انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$ ، در آن قرار می‌گیرد برای زاویه‌های مختلف از  $0^\circ$  تا  $360^\circ$  مطابق جدول زیر است:

حدود $\alpha$	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$
ناحیه‌ای که $P$ قرار دارد	اول	دوم	سوم	چهارم



**تست**

۱

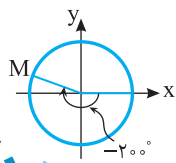
 انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $-20^\circ$  در کدام ناحیه قرار دارد؟

اول (۱)

دوم (۲)

سوم (۳)

چهارم (۴)


**راه‌حل**

 مطابق شکل روبه‌رو انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $-20^\circ$  در ناحیه دوم قرار دارد.

**تست**

۲

 اگر  $\alpha$  زاویه‌ای حاده باشد، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha + 18^\circ$  در کدام ناحیه قرار دارد؟

اول (۱)

دوم (۲)

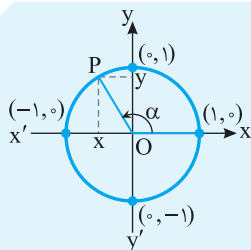
سوم (۳)

چهارم (۴)

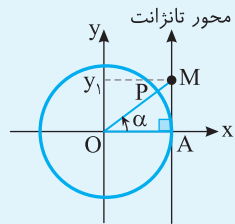
 چون  $\alpha$  زاویه‌ای حاده است، پس  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ، بنابراین  $18^\circ < \alpha + 18^\circ < 27^\circ$  و در نتیجه انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha + 18^\circ$  در ناحیه سوم قرار دارد.

**راه‌حل**

۷۴

**نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی**


در دایره مثلثاتی مقابل برای هر زاویه مانند  $\alpha$ ،  $\sin \alpha$  برابر عرض نقطه P یعنی y است. پس  $\sin \alpha$  با عددی روی محور  $y'Oy$  متناظر است. محور  $y'Oy$  را **محور سینوس** می‌نامند و چون  $-1 \leq y \leq 1$ ، پس  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ . همچنین برابر طول نقطه P یعنی x است. پس  $\cos \alpha$  با عددی روی محور  $x'Ox$  متناظر است. محور  $x'Ox$  را **محور کسینوس** می‌نامند و چون  $-1 \leq x \leq 1$ ، پس  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ .



در نقطه  $A(1, 0)$  محوری عمود بر محور x رسم می‌کنیم و جهت مثبت آن را مانند محور y انتخاب می‌کنیم. این محور را **محور تانژانت** می‌نامیم. مقدار تانژانت هر زاویه دلخواه، اگر تعریف شده باشد، روی این محور قابل نمایش است. در مثلث قائم‌الزاویه OAM در شکل مقابل می‌توان نوشت  $\tan \alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AM}{1} = AM$ . برای مشخص کردن تانژانت زاویه  $\alpha$ ، کافی است شعاع OP، ضلع انتهایی زاویه  $\alpha$ ، را امتداد دهیم تا محور تانژانت را در نقطه  $M(1, y_1)$  قطع کند. در این صورت  $y_1 = \tan \alpha$ .

**نکته**

 اگر ضلع انتهایی زاویه  $\alpha$  روی محور y قرار داشته باشد، تانژانت زاویه  $\alpha$  تعریف نمی‌شود.

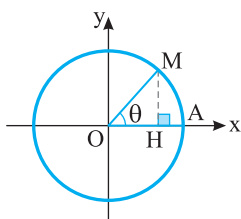
**تست**

۳

 در دایره مثلثاتی مقابل،  $\cos \theta = \frac{2}{3}$ . اندازه پاره خط AH چقدر است؟

۱ (۱)

۳ (۳)

 ۲ (۲)  
 $1 - \frac{\sqrt{8}}{3}$  (۴)

**راه‌حل**

با توجه به شکل،

$$OH = \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow AH = OA - OH = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

**تست**

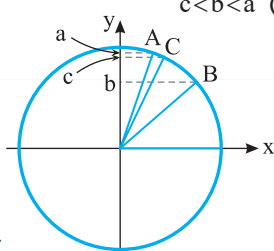
۴

 اگر  $a = \sin 71^\circ$ ،  $b = \sin 41^\circ$  و  $c = \sin 67^\circ$ ، کدام درست است؟

 ۱ (۱)  $a < b < c$ 

 ۲ (۲)  $b < c < a$ 

 ۳ (۳)  $a < c < b$ 

 ۴ (۴)  $c < b < a$ 

**راه‌حل**

فرض کنید نقاط A، B و C به ترتیب انتهای کمان‌های روبه‌رو به زاویه‌های  $71^\circ$ ،  $41^\circ$  و  $67^\circ$  روی دایره مثلثاتی باشند. از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که  $b < c < a$ .

تست

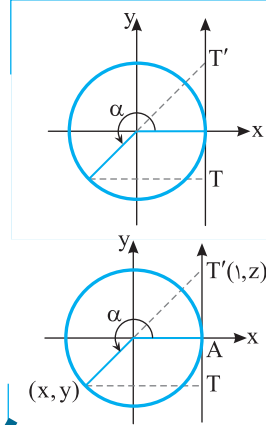
در دایرهٔ مثلثاتی مقابل، طول پاره‌خط  $TT'$  برابر کدام عبارت است؟

- (۱)  $\tan \alpha - \sin \alpha$
- (۲)  $\tan \alpha + \sin \alpha$
- (۳)  $\sin \alpha - \cos \alpha$
- (۴)  $\sin \alpha + \cos \alpha$

راه‌حل

با توجه به شکل روبه‌رو واضح است که  $\sin \alpha = y$  و  $\tan \alpha = z$ . بنابراین طول پاره‌خط  $TT'$  برابر است با

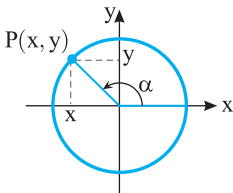
$$TT' = AT + AT' = |y| + |z| = -y + z = -\sin \alpha + \tan \alpha$$



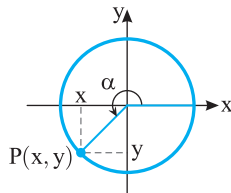
۷۵

علامت نسبت‌های مثلثاتی

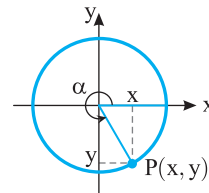
اگر نقطه  $P$  انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$ ، در ناحیهٔ اول مثلثاتی واقع باشد، طول و عرض آن مثبت است و تمام نسبت‌های مثلثاتی  $\alpha$  مثبت‌اند. اگر نقطه  $P$  در ناحیه‌های دوم، سوم و چهارم مثلثاتی قرار گیرد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\alpha$  می‌توانند مثبت یا منفی باشند، زیرا طول و عرض نقطه  $P$  در این ناحیه‌ها می‌توانند مثبت یا منفی باشند. به شکل‌های زیر دقت کنید:



$$\begin{aligned} \sin \alpha = y > 0, \quad \cos \alpha = x > 0 \\ \tan \alpha = \frac{y}{x} > 0, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} > 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin \alpha = y > 0, \quad \cos \alpha = x < 0 \\ \tan \alpha = \frac{y}{x} < 0, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} < 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin \alpha = y < 0, \quad \cos \alpha = x < 0 \\ \tan \alpha = \frac{y}{x} > 0, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} > 0 \end{aligned}$$

نکته

علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\alpha$ ، وقتی انتهای کمان روبه‌رو به آن در ناحیه‌های مختلف قرار می‌گیرد، مطابق جدول زیر است:

نسبت \ ناحیه	اول	دوم	سوم	چهارم
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

تست

اگر  $|\sin \alpha| = \sin \alpha$  و  $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟ ( $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱) اول
- (۲) دوم
- (۳) سوم
- (۴) چهارم

راه‌حل

با توجه به تساوی  $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ ، معلوم است که  $\cos \alpha \leq 0$ . با توجه به تساوی  $|\sin \alpha| = \sin \alpha$ ، معلوم است که  $\sin \alpha \geq 0$ . بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  در ربع دوم مثلثاتی قرار دارد.

تست

اگر  $\sin \alpha \cos \alpha < 0$  و  $\sin \alpha \tan \alpha > 0$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول
- (۲) دوم
- (۳) سوم
- (۴) چهارم

راه‌حل

با توجه به  $\sin \alpha \cos \alpha < 0$  مشخص است که مقادیر  $\sin \alpha$  و  $\cos \alpha$  مختلف‌العلامت هستند. پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  در ناحیهٔ دوم یا چهارم قرار دارد. با توجه به  $\sin \alpha \tan \alpha > 0$  واضح است که  $\sin \alpha$  و  $\tan \alpha$  هم‌علامت هستند. پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  در ناحیهٔ اول یا چهارم قرار دارد. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

تست ۸

کدام یک عددی مثبت است؟

- (۱)  $\sin 200^\circ$       (۲)  $\cos 200^\circ$       (۳)  $\sin 300^\circ$       (۴)  $\cos 300^\circ$

راه حل

انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $200^\circ$  در ربع سوم قرار دارد، پس  $\sin 200^\circ$  و  $\cos 200^\circ$  اعدادی منفی هستند. انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $300^\circ$  در ربع چهارم قرار دارد، پس  $\sin 300^\circ$  عددی منفی و  $\cos 300^\circ$  عددی مثبت است.

نسبت‌های مثلثاتی چند زاویه معروف

زاویه نسبت	$\alpha=0^\circ$	$\alpha=30^\circ$	$\alpha=45^\circ$	$\alpha=60^\circ$	$\alpha=90^\circ$	$\alpha=180^\circ$	$\alpha=270^\circ$	$\alpha=360^\circ$
$\sin \alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \alpha$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot \alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

نکته

برای هر زاویه دلخواه مانند  $\alpha$ ،  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ ،  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ ،  $\tan \alpha$  و  $\cot \alpha$  عددی در بازه  $(-\infty, +\infty)$  است.

تست ۹

حداکثر مقدار عبارت  $4 \cos \alpha - 1$  کدام است؟

- (۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

راه حل

طرفین نابرابری  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$  را در ۴ ضرب می‌کنیم  $-4 \leq 4 \cos \alpha \leq 4$ . یک واحد از طرفین نابرابری اخیر کم می‌کنیم  $-5 \leq 4 \cos \alpha - 1 \leq 3$ . بنابراین حداکثر مقدار عبارت ۳ است.

تست ۱۰

مجموع حداکثر و حداقل مقدار عبارت  $\frac{\sin \alpha}{2 + \sin \alpha}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{2}{3}$       (۳)  $-\frac{1}{3}$       (۴)  $-\frac{2}{3}$

راه حل

ابتدا عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A = \frac{\sin \alpha}{2 + \sin \alpha} = \frac{2 + \sin \alpha - 2}{2 + \sin \alpha} = \frac{2 + \sin \alpha}{2 + \sin \alpha} - \frac{2}{2 + \sin \alpha} = 1 - \frac{2}{2 + \sin \alpha}$$

اکنون با توجه به اینکه  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$  می‌توانیم محدوده A را بیابیم:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \sin \alpha \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin \alpha} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \frac{-2}{2 + \sin \alpha} \leq -\frac{2}{3} \Rightarrow -1 \leq 1 - \frac{2}{2 + \sin \alpha} \leq \frac{1}{3}$$

بنابراین حداقل مقدار A برابر ۱- و حداکثر مقدار آن  $\frac{1}{3}$  است. در نتیجه مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت، برابر  $-\frac{2}{3}$  است.

۷۸

حدود نسبت‌های مثلثاتی در نواحی مختلف

نکته

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$
$0 < \sin \alpha < 1$	$0 < \sin \alpha < 1$	$-1 < \sin \alpha < 0$	$-1 < \sin \alpha < 0$
$0 < \cos \alpha < 1$	$-1 < \cos \alpha < 0$	$-1 < \cos \alpha < 0$	$0 < \cos \alpha < 1$
$\tan \alpha > 0$	$\tan \alpha < 0$	$\tan \alpha > 0$	$\tan \alpha < 0$
$\cot \alpha > 0$	$\cot \alpha < 0$	$\cot \alpha > 0$	$\cot \alpha < 0$

تست

۱۱

اگر  $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$ ، اختلاف حداقل و حداکثر مقدار عبارت  $A = 3 - 2 \sin \alpha$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

راه‌حل

با توجه به  $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$ ، معلوم می‌شود  $\alpha$  در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد و می‌توان نتیجه گرفت  $-1 \leq \sin \alpha \leq 0$ . بنابراین  $-2 \leq -2 \sin \alpha \leq 0$  و در نتیجه  $3 \leq 3 - 2 \sin \alpha \leq 5$ . پس حداقل مقدار  $A$  برابر ۳ و حداکثر مقدار آن برابر ۵ است و اختلاف آن‌ها ۲ است.

۷۹

نکته

با افزایش مقادیر  $\alpha$  از  $0^\circ$  به  $360^\circ$ ، مقادیر  $\sin \alpha$  در ناحیه‌های اول و چهارم در حال افزایش و در ناحیه‌های دوم و سوم در حال کاهش هستند. مقادیر  $\cos \alpha$  در ناحیه‌های اول و دوم در حال کاهش و در ناحیه‌های سوم و چهارم در حال افزایش هستند. مقادیر  $\tan \alpha$  در هر چهار ناحیه در حال افزایش هستند.

تست

۱۲

کدام مقدار بزرگ‌تر است؟

- ۱ (۱)  $\sin 100^\circ$       ۲ (۲)  $\sin 140^\circ$       ۳ (۳)  $\sin 200^\circ$       ۴ (۴)  $\sin 240^\circ$

راه‌حل

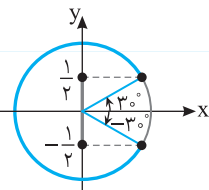
توجه کنید که انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های  $100^\circ$  و  $140^\circ$  در ناحیه دوم قرار دارد و سینوس این اعداد مثبت هستند و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های  $200^\circ$  و  $240^\circ$  در ناحیه سوم قرار دارند و سینوس این اعداد منفی هستند. از طرف دیگر در ناحیه دوم، زاویه بزرگ‌تر سینوس کوچک‌تری دارد. بنابراین  $\sin 100^\circ$  در بین مقادیر داده شده از همه بزرگ‌تر است.

تست

۱۳

اگر  $-60^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$  و  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{4}$ ، چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۴ (۳)      ۵ (۴)



از  $-60^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$  نتیجه می‌گیریم  $-30^\circ \leq \frac{\alpha}{2} \leq 30^\circ$ . با توجه به شکل روبه‌رو  $-\frac{1}{2} \leq \sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{2}$  و در نتیجه  $-\frac{1}{2} \leq \frac{m}{4} \leq \frac{1}{2}$ ، یعنی  $-2 \leq m \leq 2$ . بنابراین  $m$  می‌تواند مقادیر صحیح  $\pm 1$ ،  $\pm 2$  و صفر باشد.

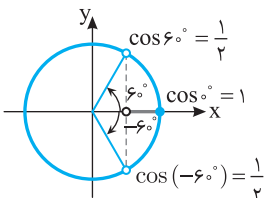
راه‌حل

تست

۱۴

اگر  $-60^\circ < \alpha < 60^\circ$  و  $\cos \alpha = 3m + 1$ ، حدود  $m$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $-\frac{1}{6} < m < 0$       ۲ (۲)  $0 \leq m < \frac{1}{6}$       ۳ (۳)  $-\frac{1}{6} < m < \frac{1}{6}$       ۴ (۴)  $-\frac{1}{6} < m \leq 0$



وقتی  $\alpha$  از  $-60^\circ$  تا  $60^\circ$  تغییر می‌کند، مقدار  $\cos \alpha$ ، از  $-60^\circ$  تا  $60^\circ$  افزایش می‌یابد و سپس از  $60^\circ$  تا  $0^\circ$  کاهش می‌یابد. بنابراین  $\cos \alpha$  در  $0^\circ$  به بیشترین مقدار خود، یعنی ۱ می‌رسد. پس

$$\frac{1}{2} < \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < 3m + 1 \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{6} < 3m \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{6} < m \leq 0$$

راه‌حل

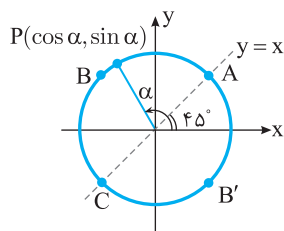
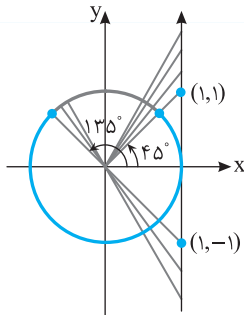
تست ۱۵

اگر  $45^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ$ ، مقادیر  $\tan \alpha$  در کدام محدوده قرار دارند؟

- (۱)  $[-1, 1]$  (۲)  $[-1, +\infty)$  (۳)  $(-\infty, 1]$  (۴)  $\mathbb{R} - (-1, 1)$

راه حل

با توجه به شکل روبه‌رو، وقتی  $45^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ$ ،  $\tan \alpha \geq 1$  یا  $\tan \alpha \leq -1$ ، یعنی مقادیر  $\tan \alpha$  در  $\mathbb{R} - (-1, 1)$  قرار دارند.

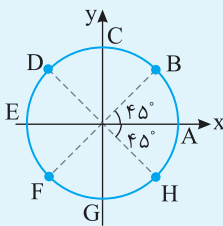


از روی شکل مقابل معلوم است که اگر نقطه  $(x, y)$  روی کمان ABC از دایره مثلثاتی باشد، آن‌گاه  $y > x$ . بنابراین اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  روی کمان ABC باشد، آن‌گاه  $\sin \alpha > \cos \alpha$ . همین‌طور، اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  روی کمان  $AB'C$  باشد، آن‌گاه  $\sin \alpha < \cos \alpha$ . به همین ترتیب نتایج زیر به دست می‌آید.

نکته

۸۰

شکل مقابل را در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه  $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$  انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  روی دایره مثلثاتی باشد. در این صورت



- اگر نقطه P روی کمان BDF باشد، آن‌گاه  $\sin \alpha > \cos \alpha$  و اگر نقطه P روی کمان BHF باشد، آن‌گاه  $\sin \alpha < \cos \alpha$ .
- اگر نقطه P روی کمان DBH باشد، آن‌گاه  $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$  و اگر نقطه P روی کمان DFH باشد، آن‌گاه  $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$ .

- اگر نقطه P روی کمان‌های AB، CD، EF یا GH باشد (به شرطی که  $\tan \alpha$  و  $\cot \alpha$  تعریف شوند)، آن‌گاه  $\tan \alpha < \cot \alpha$  و اگر نقطه P روی کمان‌های BC، DE، FG یا HA باشد، آن‌گاه  $\tan \alpha > \cot \alpha$ .
- اگر نقطه P روی کمان‌های ABC یا EFG باشد (به شرطی که  $\tan \alpha$  و  $\cot \alpha$  تعریف شوند)، آن‌گاه  $\tan \alpha + \cot \alpha > 0$  و اگر نقطه P روی کمان‌های CDE یا GHA باشد، آن‌گاه  $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ .

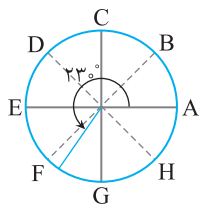
تست ۱۶

کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $\sin 25^\circ > \cos 25^\circ$  (۲)  $\tan 25^\circ > \cot 25^\circ$  (۳)  $\sin 23^\circ > \cos 23^\circ$  (۴)  $\tan 23^\circ > \cot 23^\circ$

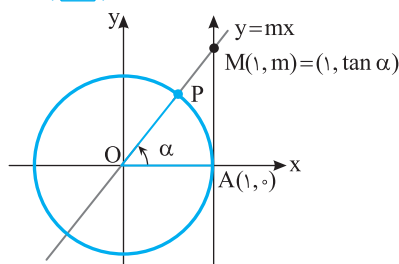
راه حل

با توجه به شکل مقابل، چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $23^\circ$  روی کمان FG است، پس  $\tan 23^\circ > \cot 23^\circ$ . خودتان بررسی کنید که گزینه‌های دیگر درست نیستند.



۸۱

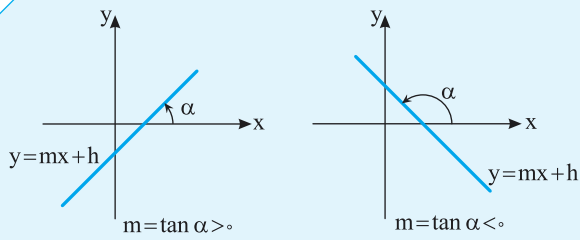
رابطه شیب خط با تانژانت زاویه



می‌دانیم مقدار  $\tan \alpha$  برابر عرض نقطه M، محل برخورد امتداد شعاع OP با محور تانژانت است (شکل روبه‌رو را ببینید). از طرف دیگر، طول نقطه M برابر ۱ است و این نقطه روی خط  $y=mx$  قرار دارد، پس عرض آن برابر m است. بنابراین  $m = \tan \alpha$ . اکنون توجه کنید که همه خط‌های موازی با خط  $y=mx$  شیب یکسان با این خط دارند و آن‌ها نیز محور طول‌ها را با زاویه  $\alpha$  قطع می‌کنند. بنابراین شیب تمام این خط‌ها همان  $\tan \alpha$  است.



نکته



اگر محور طول‌ها و خط  $y=mx+h$  یک زاویه مثلثاتی مثبت و کمتر از  $180^\circ$  به اندازه  $\alpha$  تشکیل دهند، آن‌گاه  $m=\tan \alpha$ .

تست

۱۷

معادله خطی که از نقطه  $(\sqrt{12}, -2)$  می‌گذرد و با محور طول‌ها زاویه مثلثاتی  $60^\circ$  می‌سازد، کدام است؟

- (۱)  $y=\sqrt{3}x+8$       (۲)  $y=\sqrt{3}x-8$       (۳)  $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-4$       (۴)  $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$

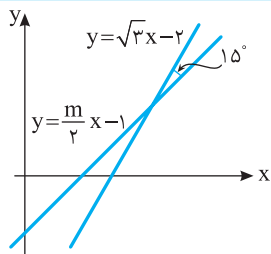
راه‌حل

با توجه به زاویه خط با محور طول‌ها که برابر زاویه مثلثاتی  $60^\circ$  است، شیب خط برابر  $\tan 60^\circ$  یا همان  $\sqrt{3}$  است. پس معادله خط به صورت  $y=\sqrt{3}x+b$  است و چون خط از نقطه  $(\sqrt{12}, -2)$  می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله خط صدق می‌کنند،  $-2=\sqrt{3}\sqrt{12}+b$ . بنابراین  $b=-8$ . پس معادله خط  $y=\sqrt{3}x-8$  است.

تست

۱۸

با توجه به شکل مقابل مقدار  $m$  کدام است؟



- (۱)  $\sqrt{2}$       (۲)  $2$   
(۳)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$       (۴)  $\frac{1}{2}$

راه‌حل

چون شیب خط  $y=\sqrt{3}x-2$  برابر  $\sqrt{3}$  است، زاویه مثلثاتی تشکیل شده بین محور طول‌ها و این خط  $60^\circ$  است. پس زاویه مثلثاتی تشکیل شده بین محور طول‌ها و خط  $y=\frac{m}{2}x-1$ ، برابر  $180^\circ-120^\circ-15^\circ=45^\circ$  است و در نتیجه  $\frac{m}{2}=\tan 45^\circ=1 \Rightarrow m=2$

دست‌گرمی

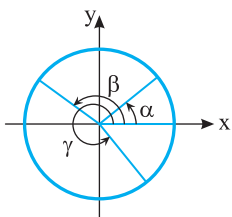
۶۴- انتهای کمان روبه‌رو به کدام یک از زاویه‌های زیر در ناحیه سوم قرار دارد؟

- (۱)  $170^\circ$       (۲)  $260^\circ$       (۳)  $280^\circ$       (۴)  $330^\circ$

۶۵- زاویه‌های  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  مانند شکل روبه‌رو در دایره مثلثاتی مشخص شده‌اند. اگر  $a=\cos \alpha$ ،

$b=\cos \beta$  و  $c=\cos \gamma$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $a>b>c$   
(۲)  $b>c>a$   
(۳)  $a>c>b$   
(۴)  $c>a>b$



۶۶- اگر  $\sin \alpha \cos \alpha > 0$  و  $\cos \alpha \cot \alpha < 0$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول      (۲) دوم      (۳) سوم      (۴) چهارم

۶۷- اگر  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  و  $\sin \alpha = \frac{m}{2}-1$ ، حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $2 \leq m \leq 4$       (۲)  $-2 \leq m \leq 0$       (۳)  $-2 \leq m \leq 2$       (۴)  $1 \leq m \leq 3$

۶۸- حاصل ضرب کمترین و بیشترین مقدار عبارت  $A=2+3\sin^2 x$  کدام است؟

- (۱)  $3$       (۲)  $4$       (۳)  $6$       (۴)  $10$

۶۹- معادله خطی که از نقطه  $(6, \sqrt{3})$  می‌گذرد و با محور طول‌ها زاویه مثلثاتی  $30^\circ$  می‌سازد، کدام است؟

- (۱)  $x-\sqrt{3}y-3=0$       (۲)  $x+\sqrt{3}y-9=0$       (۳)  $2x-\sqrt{3}y-9=0$       (۴)  $x-2\sqrt{3}y=0$

نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی (۱)

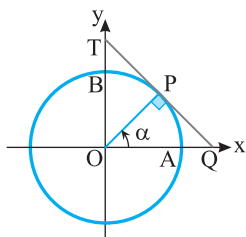
سؤال	گام
۳۶۱	۷۳ ۷۵
۳۶۲	۷۵
۳۶۳	۷۰ ۷۴
۳۶۴	۷۹
۳۶۵	۷۷
۳۶۶	۷۸
۳۶۷	۷۲ ۷۸
۳۶۸	۷۸
۳۶۹	۷۶ ۸۱
۳۷۰	۷۶ ۸۱

۳۶۱- کدام یک عددی مثبت است؟

- (۱)  $\sin 23^\circ$  (۲)  $\cos 23^\circ$  (۳)  $\sin 31^\circ$  (۴)  $\cos 31^\circ$

۳۶۲- اگر  $\cos x \sqrt{1+\tan^2 x} = 1$  و  $\tan x = -\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$  . انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $x$  در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم



۳۶۳- در دایره مثلثاتی مقابل  $\alpha$  زاویه‌ای حاده است. طول پاره‌خط BT کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{\cos \alpha}$  (۲)  $\frac{1}{\sin \alpha}$  (۳)  $\frac{1}{\cos \alpha} - 1$  (۴)  $\frac{1}{\sin \alpha} - 1$

۳۶۴- اگر  $15^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$  و  $\sin 2\alpha = \frac{m}{4}$  ، چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۶۵- اگر  $2 \sin \alpha + 5 \cos \beta = 7$  ، مقدار  $3 \sin \alpha - 4 \cos \beta$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۷

۳۶۶- اگر  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  ، حداکثر مقدار عبارت  $\frac{3}{2 \sin \alpha + 1}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

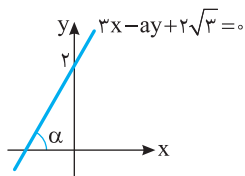
۳۶۷- اگر طول دو ضلع مثلثی  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{6}$  باشد. بیشترین مقدار ممکن مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳)  $3\sqrt{3}$  (۴)  $4\sqrt{3}$

۳۶۸- اگر  $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$  و  $\tan \alpha = 2m + 1$  ، حدود  $m$  کدام است؟

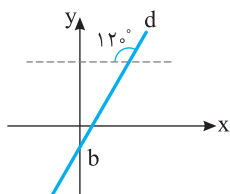
- (۱)  $m \leq -\frac{1}{2}$  (۲)  $m < -\frac{1}{2}$  (۳)  $m > -\frac{1}{2}$  (۴)  $m \geq -\frac{1}{2}$

۳۶۹- در شکل مقابل مقدار  $\sin \alpha$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

۳۷۰- معادله خط  $d$  در شکل مقابل به صورت  $y = a(x-2) + \sqrt{3}$  است. مقدار  $b$  کدام است؟



- (۱)  $-\sqrt{3}$  (۲)  $-2\sqrt{3}$  (۳)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی (۲)

آزمون ۳۸

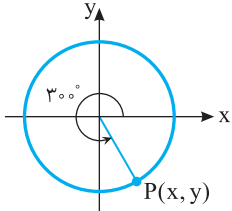
سؤال	گام
۳۷۱	۷۳ ۷۵
۳۷۲	۷۰ ۷۴
۳۷۳	۷۴
۳۷۴	۷۹
۳۷۵	۱۴ ۲۳ ۷۷ ۸۲
۳۷۶	۲۳ ۷۷
۳۷۷	۸۰ ۹۳
۳۷۸	۷۸
۳۷۹	۷۶ ۸۱
۳۸۰	۷۶ ۸۱

۳۷۱- کدام یک عددی منفی است؟

- (۱)  $\tan 17^\circ$       (۲)  $\tan 19^\circ$       (۳)  $\cot 7^\circ$       (۴)  $\cot 26^\circ$

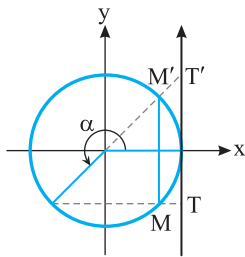
۳۷۲- در دایره مثلثاتی مقابل، مقدار  $\frac{y}{x-1}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$       (۲)  $-\sqrt{3}$   
(۳)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$       (۴)  $-\frac{\sqrt{3}}{4}$



۳۷۳- در دایره مثلثاتی مقابل طول پاره خط  $TT'$  چقدر از طول پاره خط  $MM'$  بیشتر است؟

- (۱)  $\tan \alpha - \sin \alpha$       (۲)  $\tan \alpha + \sin \alpha$   
(۳)  $\cot \alpha - \cos \alpha$       (۴)  $\sin \alpha + \cos \alpha$



۳۷۴- اگر  $-9^\circ < \alpha < 9^\circ$  و  $\cos \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{m}{4}$ ، مجموع مقادیر صحیح ممکن برای m کدام است؟

- (۱) ۳      (۲) ۶      (۳) ۷      (۴) ۱۰

۳۷۵- اختلاف حداکثر مقدار و حداقل مقدار عبارت  $A = 4 \cos^2 x - 2 \sin x$  کدام است؟

- (۱) ۳      (۲)  $\frac{9}{4}$       (۳)  $\frac{25}{4}$       (۴) ۴

۳۷۶- مقدار عبارت  $A = \frac{3 \cos \alpha + 1}{\cos \alpha + 3}$  با کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند برابر باشد؟

- (۱)  $\frac{9}{8}$       (۲)  $-\frac{7}{8}$       (۳)  $\frac{6}{7}$       (۴) ۱

۳۷۷- حاصل عبارت  $|\sin 2^\circ - \cos 2^\circ| - |\sin 7^\circ - \cos 7^\circ|$  کدام است؟

- (۱)  $-2 \sin 2^\circ$       (۲)  $2 \cos 2^\circ$       (۳)  $2 \sin 2^\circ$       (۴) صفر

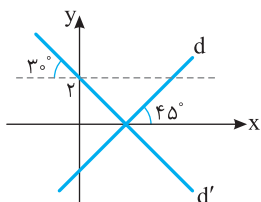
۳۷۸- اگر  $18^\circ \leq \alpha < 27^\circ$  و  $\tan \alpha = m^2 + m^2$ ، حدود m کدام است؟

- (۱)  $m \geq 0$       (۲)  $m \leq 0$       (۳)  $m \geq -1$       (۴)  $m \leq -1$

۳۷۹- در شکل مقابل خط‌های d و d' روی محور x متقاطع‌اند. معادله خط d کدام است؟

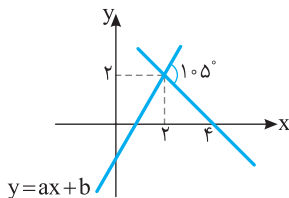
$$\left(\tan 15^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- (۱)  $y = x - 2\sqrt{3}$       (۲)  $y = 2x - \sqrt{3}$   
(۳)  $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$       (۴)  $y = x - \sqrt{3}$



۳۸۰- دو خط شکل مقابل از نقطه (۲, ۲) عبور می‌کنند. مقدار a+b کدام است؟

- (۱)  $2 - 2\sqrt{3}$       (۲)  $2 - \sqrt{3}$   
(۳)  $1 - \sqrt{3}$       (۴)  $2 - 3\sqrt{3}$



درس سوم: اتحادهای مثلثاتی

نکته زیر از تعریف روابط مثلثاتی نتیجه می‌شود.

۸۲

نکته رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی

اگر  $\alpha$  زاویه‌ای باشد که مخرج‌ها در عبارت‌های زیر صفر نباشند، آن‌گاه رابطه‌های زیر بین نسبت‌های مثلثاتی درست‌اند:

۱)  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

۲)  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

۳)  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

۴)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

۵)  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

۶)  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

تساوی (۳) را می‌توان به شکل  $\tan \alpha \cot \alpha = 1$  نیز نوشت. همین‌طور، از تساوی (۴) نتیجه می‌شود  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$  و  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ .

تست

مقدار عبارت  $\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}$  کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

راه‌حل

راه‌حل اول می‌دانیم  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ ، بنابراین

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}} = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = 1$$

راه‌حل دوم می‌دانیم  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  و  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ، بنابراین

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

تست

ساده شده عبارت  $\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$  کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

راه‌حل

می‌دانیم  $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$  و  $\tan \beta = \frac{1}{\cot \beta}$ ، بنابراین

$$\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\frac{1}{\cot \alpha} + \frac{1}{\cot \beta}} = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\frac{\cot \beta + \cot \alpha}{\cot \alpha \cot \beta}} = \cot \alpha \cot \beta$$

تست

اگر  $\frac{3 \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$ ، مقدار  $\tan x$  کدام است؟

۳ (۱)

۲ (۲)

۱ (۳)

۴ (۴)

راه‌حل

از تساوی  $\frac{3 \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$  نتیجه می‌شود  $6 \sin x = 2 \sin x + \cos x$ ، بنابراین  $4 \sin x = \cos x$  و در نتیجه  $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{4}$ ، پس  $\tan x = \frac{1}{4}$ .

تست

حاصل عبارت  $\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$  کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

راه‌حل

ابتدا مخرج کسر را به صورت  $1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha$  می‌نویسیم. پس  $\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cot \alpha$ .

تست

□□□□

اگر  $\sin \alpha = \sqrt{m}$  و  $\cos \alpha = \sqrt{2m-1}$  مقدار  $\tan^2 \alpha$  کدام است؟

(۱)

(۲)

(۳)

(۴)

راه حل

با توجه به رابطه  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  مقدار  $m$  را حساب می‌کنیم:

$$(\sqrt{m})^2 + (\sqrt{2m-1})^2 = 1 \Rightarrow m + 2m - 1 = 1 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2m-1}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2} \Rightarrow \tan^2 \alpha = 2$$

برای به دست آوردن  $\tan^2 \alpha$  از رابطه  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  استفاده می‌کنیم:

تست

□□□□

اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  در ربع سوم باشد و  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$  حاصل  $\sin \alpha - \cos \alpha$  کدام است؟

(۱)

(۲)

(۳)

(۴)

راه حل

توجه کنید که

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

تست

□□□□

اگر  $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$  و  $27^\circ < \alpha < 36^\circ$  مقدار  $15 \tan \alpha - 12 \cot \alpha$  کدام است؟

(۱)

(۲)

(۳)

(۴)

راه حل

راه حل اول ابتدا توجه کنید که اگر  $27^\circ < \alpha < 36^\circ$  آن‌گاه  $\cot \alpha$  مقداری منفی است. پس

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{169}{144} \Rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{25}{144} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{5}{12}, \tan \alpha = -\frac{12}{5}$$

$$\text{پس } 15 \tan \alpha - 12 \cot \alpha = -36 + 5 = -31$$

راه حل دوم از رابطه  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$  استفاده می‌کنیم. توجه کنید که اگر  $27^\circ < \alpha < 36^\circ$  آن‌گاه  $\cos \alpha > 0$  پس

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\text{پس } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{12}{5} \text{ و } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{5}{12} \text{ بنابراین } 15 \tan \alpha - 12 \cot \alpha = 15\left(-\frac{12}{5}\right) - 12\left(-\frac{5}{12}\right) = -31$$

تست

□□□□

اگر  $\tan \alpha = 3$  مقدار  $A = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - 4 \cos \alpha}$  کدام است؟

(۱)

(۲)

(۳)

(۴)

راه حل

راه حل اول از تساوی  $\tan \alpha = 3$  به دست می‌آید  $\sin \alpha = 3 \cos \alpha$ . با جای‌گذاری مقدار  $3 \cos \alpha$  به جای  $\sin \alpha$  در عبارت  $A$ ,

$$A = \frac{2(3 \cos \alpha) + \cos \alpha}{3 \cos \alpha - 4 \cos \alpha} = \frac{7 \cos \alpha}{-\cos \alpha} = -7$$

راه حل دوم صورت و مخرج عبارت  $A$  را بر  $\cos \alpha$  تقسیم می‌کنیم تا  $\tan \alpha$  در عبارت ظاهر شود:

$$A = \frac{\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha - 4 \cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{2 \tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 4} = \frac{2 \times 3 + 1}{3 - 4} = -7$$



**تست**

 اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $x$  در ربع اول باشد و  $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ ، حاصل  $\sin x + \cos x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{17}}{3}$       (۲)  $\frac{1}{3}$       (۳)  $\frac{\sqrt{17}}{9}$       (۴)  $\sqrt{\frac{5}{3}}$

**راه‌حل**

ابتدا توجه کنید که

$$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} - 2 \sin x \cos x + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2 \sin x \cos x = 2$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 2 - (\sin x - \cos x)^2 = 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2 - \frac{1}{9} = \frac{17}{9}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $x$  در ربع اول قرار دارد، پس  $\sin x + \cos x > 0$ . در نتیجه  $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{17}}{3}$ .

**تست**

 عبارت  $\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta$  با کدام یک از عبارتهای زیر برابر است؟

- (۱)  $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$       (۲)  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta$       (۳)  $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$       (۴)  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$

**راه‌حل**

در عبارت داده شده به جای  $\cos^2 \beta$  قرار می‌دهیم  $1 - \sin^2 \beta$  و به جای  $\cos^2 \alpha$  قرار می‌دهیم  $1 - \sin^2 \alpha$ . عبارت به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta &= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \end{aligned}$$

**تست**

 ساده شده عبارت  $\frac{\cos 1^\circ}{1 + \sin 1^\circ} - \frac{\cos 1^\circ}{1 - \sin 1^\circ}$  کدام است؟

- (۱)  $-2 \tan 1^\circ$       (۲)  $2 \tan 1^\circ$       (۳)  $\frac{2}{\cos^2 1^\circ}$       (۴)  $-\frac{2}{\cos 1^\circ}$

**راه‌حل**

به کمک مخرج مشترک گیری، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \cos 1^\circ \left( \frac{1}{1 + \sin 1^\circ} - \frac{1}{1 - \sin 1^\circ} \right) &= \frac{1 - \sin 1^\circ - (1 + \sin 1^\circ)}{(1 + \sin 1^\circ)(1 - \sin 1^\circ)} \cos 1^\circ = \frac{-2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ}{1 - \sin^2 1^\circ} \\ &= \frac{-2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ}{\cos^2 1^\circ} = \frac{-2 \sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} = -2 \tan 1^\circ \end{aligned}$$

**تست**

 هرگاه  $\tan^2 \theta + \tan \theta - 1 = 0$ ، حاصل  $\tan^4 \theta + \cot^4 \theta$  کدام است؟

- (۱) ۵      (۲) ۷      (۳) ۹      (۴) ۱۱

**راه‌حل**

چون  $\tan \theta \neq 0$ ، بنابراین تساوی داده شده را می‌توان به صورت  $\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} = -1$  نوشت. پس

$$\tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \left( \tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} \right)^2 + 2 = 3$$

$$\tan^4 \theta + \cot^4 \theta = \tan^4 \theta + \frac{1}{\tan^4 \theta} = \left( \tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

در نتیجه

**تست**

 اگر  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ، حاصل عبارت  $A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha}}$  کدام است؟

- (۱)  $\sin \alpha + \cos \alpha$       (۲)  $\sin \alpha - \cos \alpha$       (۳)  $\cos \alpha - \sin \alpha$       (۴)  $\sqrt{\sin \alpha - \cos \alpha}$

**راه‌حل**

توجه کنید که

$$A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}} = \sqrt{1 + 2|\sin \alpha \cos \alpha|}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  در ناحیه دوم است، پس  $\sin \alpha > 0$  و  $\cos \alpha < 0$ . در نتیجه

$$1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

از طرف دیگر

$$A = \sqrt{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha - \cos \alpha|$$

بنابراین

چون  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ، پس  $\sin \alpha > \cos \alpha$ ، بنابراین علامت  $\sin \alpha - \cos \alpha$  مثبت است و در نتیجه  $A = \sin \alpha - \cos \alpha$ .

## اتحاد مثلثاتی

هر تساوی بین دو عبارت مثلثاتی که به ازای تمام مقادیری از متغیرها (که هر دو عبارت به ازای آنها با معنی اند) برقرار باشد، یک اتحاد مثلثاتی است. تمام تساوی‌هایی که در نکته ابتدای درس برای نسبت‌های مثلثاتی آورده‌ایم، اتحاد هستند.

## تذکر

برای اثبات درستی یک اتحاد مثلثاتی می‌توان یک طرف تساوی را با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی و به کارگیری دیگر اتحادها، به طرف دیگر تبدیل کرد. برای اثبات نادرستی یک رابطه کافی است زاویه‌ای مثال بزنیم که به ازای آن، دو طرف تساوی مقادیر مختلفی داشته باشند.

## تست ۱۴

ساده شده عبارت  $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x$  کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{\sin x}$

(۳)  $\frac{1}{\cos x}$

(۲)  $\sin x$

(۱)  $\cos x$

راه حل اول از اتحاد  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(1 + \sin x)\cos x} = \frac{1 + \sin x}{(1 + \sin x)\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

راه حل دوم اگر  $x = 30^\circ$ ، آن‌گاه حاصل عبارت  $\frac{\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$  و گزینه‌ها به ترتیب  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ،  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  و  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  می‌شوند، پس گزینه (۳) درست است.

## تست ۱۵

اگر تساوی  $\frac{a}{\sin^2 x} + \frac{b}{\sin^4 x} + 1 = \cot^2 x$  یک اتحاد باشد، مقدار  $ab$  کدام است؟

(۴) -۱

(۳) -۲

(۲) ۲

(۱) ۱

راه حل اول تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{a \sin^2 x + b}{\sin^4 x} = \cot^2 x - 1 \Rightarrow \frac{a \sin^2 x + b}{\sin^4 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x}$$

$$a \sin^2 x + b = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$a \sin^2 x + b = \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow a \sin^2 x + b = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$$

بنابراین باید تساوی  $b + a \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$  یک اتحاد باشد که کافی است  $a = -2$  و  $b = 1$ ، یعنی  $ab = -2$ .

راه حل دوم چون تساوی یک اتحاد است، پس به ازای هر  $x$  دلخواه که  $\sin x \neq 0$ ، برقرار است. قرار می‌دهیم  $x = 30^\circ$ ، در نتیجه

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{16} + 1 = 9 \Rightarrow a + 4b = 2$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

قرار می‌دهیم  $x = 45^\circ$  و در نتیجه  $\frac{a}{2} + \frac{b}{4} + 1 = 1$ ، پس  $a + 2b = 0$ . از حل دستگاه  $\begin{cases} a + 4b = 2 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$  به دست می‌آید  $a = -2$  و  $b = 1$  و در نتیجه  $ab = -2$ .

## چند اتحاد مثلثاتی مهم

## نکته

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x, \quad \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x, \quad \tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

اگر  $2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 0$ ، مقدار  $\sin \alpha \cos \alpha$  کدام است؟

$$-\frac{13}{27} \quad (۴)$$

$$-\frac{9}{26} \quad (۳)$$

$$-\frac{4}{13} \quad (۲)$$

$$-\frac{6}{13} \quad (۱)$$

ابتدا توجه کنید که

راه حل

$$2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 0 \Rightarrow 2 \sin \alpha = -3 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{2} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{2}{3}$$

$$\text{بنابراین } \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{6}{13} \text{ و در نتیجه } \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \tan \alpha + \cot \alpha = -\frac{3}{2} + \frac{-2}{3} = -\frac{13}{6}$$

## دست‌گرمی

 -۷۰ اگر  $\frac{1 - \tan x}{\tan x} = 2$ ، مقدار  $\frac{\cot x}{\cot x - 1}$  کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۱)$$

 -۷۱ اگر  $\tan \alpha = \frac{1}{2m-1}$  و  $\cot \alpha = m+2$ ، مقدار  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$  کدام است؟

$$\frac{16}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{26}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{626}{25} \quad (۲)$$

$$\frac{65}{16} \quad (۱)$$

 -۷۲ اگر  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  و  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، مقدار  $\tan \alpha - \cos \alpha$  کدام است؟

$$\frac{1}{20} \quad (۴)$$

$$-\frac{31}{20} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{20} \quad (۲)$$

$$\frac{31}{20} \quad (۱)$$

 -۷۳ ساده شده عبارت  $A = \frac{\tan^2 x + \cot^2 x}{1 + \tan^2 x + 1 + \cot^2 x}$  کدام است؟

$$2 \quad (۴)$$

$$\cos^2 x \quad (۳)$$

$$\sin^2 x \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

 -۷۴ ساده شده عبارت  $\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^4 \theta$  کدام است؟

$$\cot^2 \theta \quad (۴)$$

$$\tan^2 \theta \quad (۳)$$

$$\cos^2 \theta \quad (۲)$$

$$\sin^2 \theta \quad (۱)$$

 -۷۵ اگر  $\tan \alpha + \cot \alpha = 3$ ، مقدار  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$  کدام است؟

$$13 \quad (۴)$$

$$7 \quad (۳)$$

$$11 \quad (۲)$$

$$9 \quad (۱)$$

 -۷۶ اگر  $\cos x \neq 0$  و  $3 \sin x + 2 \cos x = 3$ ، مقدار  $\cot x$  کدام است؟

$$-\frac{5}{12} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{12} \quad (۳)$$

$$-\frac{12}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{12}{5} \quad (۱)$$

اتحادهای مثلثاتی (۱)

آزمون ۳۹

۳۸۱- اگر  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$  و انتهای کمان متناظر با زاویه  $\alpha$  در ناحیه چهارم باشد، مقدار  $\tan \alpha - \cot \alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{2}$  (۲)  $-\frac{3}{2}$  (۳)  $-\frac{5}{2}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

۳۸۲- اگر  $\tan \alpha = \frac{1}{2m}$  و  $\cot \alpha = m+3$ ، مقدار  $\sin^2 \alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{35}$  (۲)  $\frac{16}{37}$  (۳)  $\frac{1}{37}$  (۴)  $\frac{2}{35}$

۳۸۳- ساده شده عبارت  $\frac{1}{1+\sin 1^\circ} + \frac{1}{1-\sin 1^\circ}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{2}{\sin^2 1^\circ}$  (۴)  $\frac{2}{\cos^2 1^\circ}$

۳۸۴- حاصل  $A = \frac{\sin 15^\circ - \sin^3 15^\circ}{\cos 15^\circ - \cos^3 15^\circ}$  کدام است؟

- (۱)  $\tan^2 15^\circ$  (۲)  $\tan 15^\circ$  (۳)  $\cot 15^\circ$  (۴)  $\cot^2 15^\circ$

۳۸۵- اگر  $3 \sin^2 x = 1 + 4 \cos^2 x$ ، مقدار  $\tan^2 x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴)  $\frac{2}{5}$

۳۸۶- انتهای کمان متناظر با زاویه  $\alpha$  در کدام ناحیه قرار گیرد تا نابرابری  $\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha} \geq 0$  برقرار باشد؟

- (۱) فقط اول یا دوم (۲) فقط اول یا سوم  
(۳) فقط دوم یا چهارم (۴) هر چهار ناحیه

۳۸۷- ساده شده عبارت  $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \cot \alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{\cos \alpha}$  (۲)  $\frac{1}{\sin \alpha}$  (۳)  $\sin \alpha$  (۴)  $\cos \alpha$

۳۸۸- اگر انتهای کمان متناظر با زاویه  $x$  در ناحیه دوم باشد و  $A = \cot^2 x (1 + \tan^2 x) + \tan^2 x (1 + \cot^2 x)$ ، حاصل  $\sqrt{A}$  کدام است؟

- (۱)  $\tan x - \cot x$  (۲)  $-\tan x - \cot x$   
(۳)  $\tan x + \cot x$  (۴)  $\cot x - \tan x$

۳۸۹- اگر  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ، مقدار  $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{27}{64}$  (۲)  $\frac{16}{81}$  (۳)  $\frac{23}{32}$  (۴)  $\frac{16}{27}$

۳۹۰- اگر  $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{2}{3}$  و انتهای کمان متناظر با زاویه  $\alpha$  در ناحیه دوم باشد، مقدار  $\sin \alpha \cos \alpha$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{\sqrt{6}}{6}$  (۲)  $-\frac{\sqrt{3}}{4}$  (۳)  $-\frac{\sqrt{3}}{6}$  (۴)  $-\frac{\sqrt{6}}{8}$

سؤال	گام
۳۸۱	۷۵ ۸۲
۳۸۲	۸۲
۳۸۳	۸۲
۳۸۴	۸۲
۳۸۵	۸۲
۳۸۶	۷۵ ۸۲
۳۸۷	۸۲ ۸۳
۳۸۸	۷۵ ۸۲ ۸۳
۳۸۹	۸۲ ۸۴
۳۹۰	۷۵ ۸۴

اتحادهای مثلثاتی (۲)

آزمون ۴۰

سؤال	گام
۳۹۱	۷۵ ۸۲
۳۹۲	۸۲
۳۹۳	۸۲ ۸۳
۳۹۴	۸۲ ۸۳
۳۹۵	۸۲
۳۹۶	۸۲ ۸۴
۳۹۷	۷۵ ۸۲
۳۹۸	۸۲
۳۹۹	۷۵ ۸۲ ۸۳
۴۰۰	۷۵ ۸۲ ۸۳

۳۹۱- اگر  $\cot x = \frac{2}{3}$  و انتهای کمان متناظر با زاویه  $x$  در ناحیه سوم باشد، مقدار  $2 \cos x - \sin x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{7}{\sqrt{13}}$  (۲)  $\frac{1}{\sqrt{13}}$  (۳)  $-\frac{7}{\sqrt{13}}$  (۴)  $-\frac{1}{\sqrt{13}}$

۳۹۲- اگر  $\sin \alpha = \sqrt{k-1}$  و  $\cos \alpha = \sqrt{2k-3}$ ، مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟

(۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $\sqrt{5}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

۳۹۳- مقدار  $\frac{(1+\tan 2^\circ)(1-\cot 2^\circ)}{(1+\cot 2^\circ)(1-\tan 2^\circ)}$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

۳۹۴- ساده شده عبارت  $\frac{\tan x}{1+\tan^2 x} \times \frac{1+\cot^2 x}{\cot x}$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲)  $\tan x$  (۳)  $\sin x$  (۴)  $\cos x$

۳۹۵- اگر  $\cot \alpha = \sin \alpha$ ، مقدار  $\cos \alpha$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$  (۳)  $\frac{\sqrt{5}+2}{8}$  (۴)  $\frac{\sqrt{5}-2}{4}$

۳۹۶- اگر  $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ ، حاصل  $\tan x + \cot x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{9}{4}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴)  $\frac{9}{2}$

۳۹۷- اگر زاویه‌ای حاده باشد و  $\sin x - \cos x = \frac{3}{4}$ ، حاصل  $\sin x + \cos x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{23}}{4}$  (۲)  $\frac{\sqrt{14}}{4}$  (۳)  $\frac{-\sqrt{23}}{4}$  (۴)  $\frac{-\sqrt{14}}{4}$

۳۹۸- اگر  $\tan x + \cot x = \sqrt{5}$ ، مقدار  $\tan^2 x + \cot^2 x$  کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۱۱

۳۹۹- اگر  $18^\circ < \alpha < 27^\circ$ ، عبارت  $\cos \alpha - \sqrt{\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$  با کدام یک برابر است؟

(۱)  $\cot \alpha$  (۲)  $\tan \alpha$  (۳)  $\frac{1}{\cos \alpha}$  (۴)  $\frac{1}{\sin \alpha}$

۴۰۰- اگر  $315^\circ < \alpha < 360^\circ$ ، حاصل عبارت  $\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}}$  کدام است؟

(۱)  $\sin \alpha + \cos \alpha$  (۲)  $\sin \alpha - \cos \alpha$  (۳)  $-\sin \alpha + \cos \alpha$  (۴)  $-\sin \alpha - \cos \alpha$



اتحادهای مثلثاتی (۳)

آزمون ۴۱

- ۴۰۱- اگر  $\frac{\sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$  ، مقدار  $\cot x$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{1}{8}$  (۲)  $\frac{1}{16}$  (۳) ۸ (۴)  $\frac{1}{16}$
- ۴۰۲- اگر  $\tan x = \sqrt{\frac{m+2}{2m+5}}$  و  $\cos x = \sqrt{\frac{m+2}{3m+7}}$  ، مقدار  $\tan x$  کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)  $\frac{1}{2}$
- ۴۰۳- ساده شده عبارت  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \cot \alpha$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{1}{\cos \alpha}$  (۲)  $\frac{1}{\sin \alpha}$  (۳)  $\sin \alpha$  (۴)  $\cos \alpha$
- ۴۰۴- مقدار  $\sin^2 15^\circ - \frac{\cos^2 15^\circ}{1 + \sin 15^\circ} + \cos 15^\circ$  کدام است؟
- (۱)  $-\cos 15^\circ$  (۲)  $-\sin 15^\circ$  (۳)  $\cos 15^\circ$  (۴)  $\sin 15^\circ$
- ۴۰۵- اگر  $\tan x = 3$  ، مقدار عبارت  $A = \frac{\sin^3 x - 2 \cos x}{4 \sin x - \cos^3 x}$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{47}{119}$  (۲)  $\frac{1}{17}$  (۳)  $\frac{7}{29}$  (۴)  $\frac{17}{29}$
- ۴۰۶- اگر  $\sin x - \cos x = \frac{2}{3}$  ، حاصل  $\sin^3 x - \cos^3 x$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{22}{27}$  (۲)  $\frac{23}{27}$  (۳)  $\frac{8}{9}$  (۴)  $\frac{25}{27}$
- ۴۰۷- اگر  $\tan x - \cot x = 3$  ، مقدار  $\tan^3 x - \cot^3 x$  کدام است؟
- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۷ (۴) ۳۶
- ۴۰۸- اگر  $\tan \alpha - 2 \cot \alpha = \sqrt{2}$  و انتهای کمان نظیر زاویه  $\alpha$  در ربع اول باشد، مقدار  $\tan^2 \alpha$  کدام است؟
- (۱)  $3 - \sqrt{3}$  (۲)  $2 - \sqrt{3}$  (۳)  $3 + \sqrt{5}$  (۴)  $3 - \sqrt{5}$
- ۴۰۹- حاصل عبارت  $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{1 - 2 \sin^2 x}{\cos^2 x (1 - \tan^2 x)}$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{2 \cot x}{1 - \cot x}$  (۲)  $\frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x}$  (۳)  $\frac{2 \tan x}{\tan x - 1}$  (۴)  $\frac{2 \sin x}{\sin x - \cos x}$
- ۴۱۰- اختلاف حداکثر مقدار و حداقل مقدار عبارت  $A = \cos^2 x - 2 \sin x$  کدام است؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

سؤال	گام
۴۰۱	۸۲
۴۰۲	۸۲
۴۰۳	۸۲ ۸۳
۴۰۴	۸۲ ۸۳
۴۰۵	۸۲
۴۰۶	۸۲ ۲۷۹ ۲۸۱
۴۰۷	۸۲ ۲۷۹
۴۰۸	۷۵ ۸۲
۴۰۹	۸۲ ۸۳
۴۱۰	۲۳ ۷۷ ۸۲

اتحادهای مثلثاتی (۴)

سؤال	گام
۴۱۱	۸۲
۴۱۲	۸۲ ۸۳
۴۱۳	۸۲ ۸۳
۴۱۴	۸۲ ۸۳ ۹۹
۴۱۵	۸۲
۴۱۶	۸۲ ۲۷۵ ۲۷۹
۴۱۷	۸۲
۴۱۸	۸۰ ۸۲ ۸۳
۴۱۹	۸۲ ۸۳
۴۲۰	۸۲ ۸۳ ۲۸۱

۴۱۱- اگر  $\tan x = \frac{1}{3}$  ، مقدار عبارت  $A = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 3 \cos x}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲) ۲      (۳)  $-\frac{1}{2}$       (۴) -۲

۴۱۲- مقدار عبارت  $A = \frac{\cot^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}$  کدام است؟

- (۱)  $\tan^6 15^\circ$       (۲)  $\cot^6 15^\circ$       (۳)  $1 + \tan^6 15^\circ$       (۴)  $1 + \cot^6 15^\circ$

۴۱۳- مقدار  $(\frac{1}{\cos 2^\circ} + \tan 2^\circ)(1 - \sin 2^\circ)$  کدام است؟

- (۱)  $\sin 2^\circ$       (۲)  $\cos 2^\circ$       (۳)  $\tan 2^\circ$       (۴)  $\cot 2^\circ$

۴۱۴- حاصل  $\frac{\sqrt{1 + \cos 36^\circ} + \sqrt{1 - \cos 36^\circ}}{\sqrt{1 + \sin 36^\circ}}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $\sqrt{2}$       (۴) ۱

۴۱۵- اگر  $\cos^6 \alpha - 5 \cos \alpha + 5 = 0$  ، مقدار  $\cos^6 \alpha$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲)  $\frac{1}{3}$       (۳)  $\frac{1}{4}$       (۴) صفر

۴۱۶- اگر  $\tan x + \cot x = \sqrt{5}$  ، مقدار  $\tan^6 x + \cot^6 x$  کدام است؟

- (۱) ۶      (۲) ۹      (۳) ۱۸      (۴) ۲۷

۴۱۷- اگر  $\sin^2 x + 3 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 2$  ، مقدار  $\tan x$  کدام است؟

- (۱)  $1 \pm \sqrt{2}$       (۲)  $-1 \pm \sqrt{2}$       (۳)  $2 \pm \sqrt{3}$       (۴)  $-2 \pm \sqrt{3}$

۴۱۸- حاصل عبارت  $\sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha}}$  به ازای  $\alpha = 200^\circ$  کدام است؟

- (۱)  $-\sin 200^\circ - \cos 200^\circ$       (۲)  $\sin 200^\circ - \cos 200^\circ$   
(۳)  $-\sin 200^\circ + \cos 200^\circ$       (۴)  $\sin 200^\circ + \cos 200^\circ$

۴۱۹- حاصل  $\frac{\sin^3 4^\circ - \cos^3 4^\circ}{\cos 4^\circ + \cos^2 4^\circ \sin 4^\circ} + 1$  کدام است؟

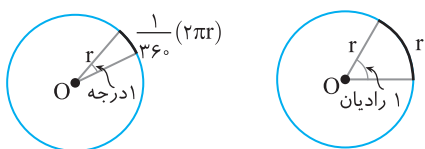
- (۱)  $\sin 4^\circ$       (۲)  $\cos 4^\circ$       (۳)  $\tan 4^\circ$       (۴) ۱

۴۲۰- اگر  $\frac{\tan^3 x - \cot^3 x}{\tan x - \cot x} = 7$  ، حاصل  $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$  کدام است؟

- (۱) ۶      (۲) ۸      (۳) ۹      (۴) ۱۰

## درس چهارم: واحدهای اندازه‌گیری زاویه

### درجه و رادیان



اگر دایره‌ای را به ۳۶۰ قسمت برابر تقسیم کنیم، کمان‌هایی برابر به دست می‌آیند که هر یک از آن‌ها روبه‌رو به یک زاویه مرکزی هستند. این زاویه‌ها با یکدیگر برابرند و اندازه هر یک از آن‌ها برابر ۱ درجه است. به همین ترتیب، اگر روی دایره کمانی با طول برابر با شعاع دایره انتخاب کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به این کمان برابر ۱ رادیان است.

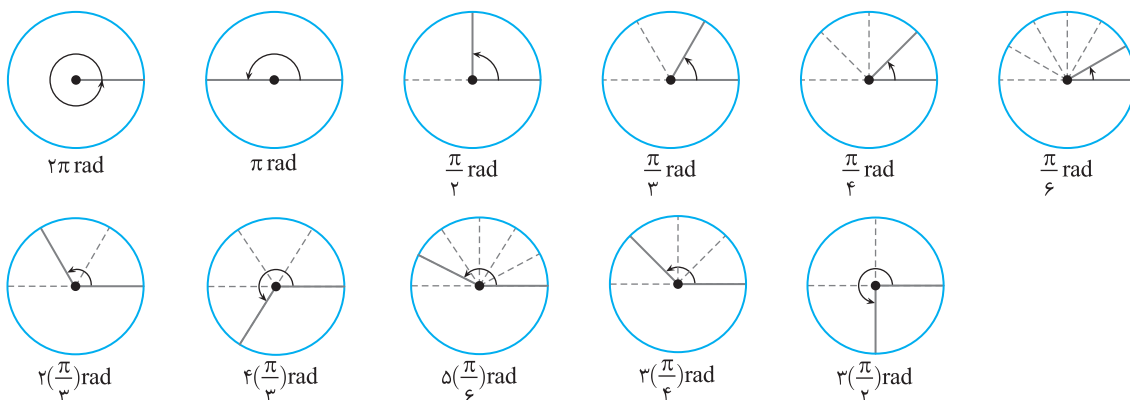
#### تعریف

- ۱ درجه برابر با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن  $\frac{1}{360}$  محیط دایره است.  $k$  درجه را می‌نویسیم  $k^\circ$ .
- ۱ رادیان برابر با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن برابر شعاع دایره است.  $k$  رادیان را می‌نویسیم  $k \text{ rad}$ .

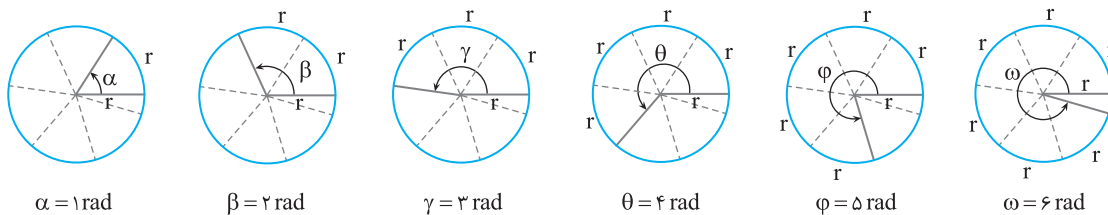
اگر واحد اندازه زاویه‌ای را مشخص نکرده‌ایم، منظورمان واحد رادیان است.

#### تذکر

**مثال:** در شکل‌های زیر زاویه‌های معروف با اندازه آن‌ها برحسب رادیان نشان داده شده‌اند.



**مثال:** چون  $2\pi = 6/28$ ، روی یک دایره کامل می‌توان پشت سر هم شش کمان به طول شعاع جدا کرد (شکل‌های زیر را ببینید).



انتهای کمان روبه‌رو به زاویه ۶- رادیان در کدام ناحیه قرار دارد؟

۴) چهارم

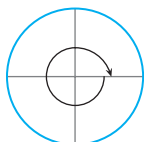
۳) سوم

۲) دوم

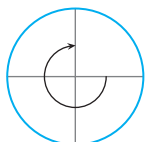
۱) اول

با توجه به شکل‌های زیر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه ۶- رادیان در ناحیه اول قرار دارد.

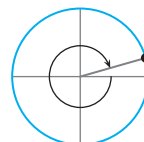
#### راه‌حل



رادیان  $(-2\pi) =$  رادیان



رادیان  $(-4/7) =$  رادیان  $(-3\pi/4) =$  رادیان



رادیان  $(-6) =$  رادیان

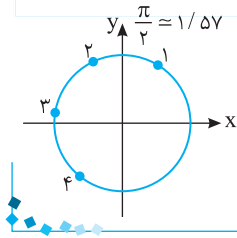
کدام یک از اعداد زیر بزرگتر است؟ (زویا بر حسب رادیان هستند).

$\sin 4$  (۴)

$\sin 3$  (۳)

$\sin 2$  (۲)

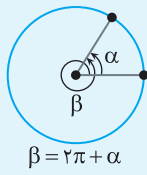
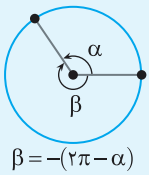
$\sin 1$  (۱)



با توجه به شکل روبه‌رو، واضح است که عرض نقطه‌ای که انتهای کمان نظیر زاویه ۲ رادیان است، بزرگتر از عرض سایر نقاط است، پس  $\sin 2$  از بقیه بزرگتر است.

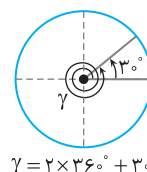
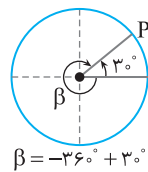
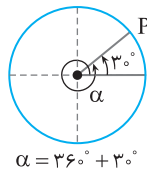
راه‌حل

زاویه‌های هم‌انتها



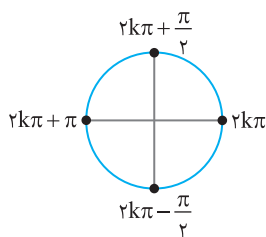
می‌دانیم یک زاویه مثلثاتی در موقعیت استاندارد، زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره مثلثاتی، ضلع ابتدایی آن روی قسمت مثبت محور X و ضلع دیگر آن از دوران ضلع ابتدایی حول رأس آن به اندازه دلخواه به دست آمده باشد. به این ترتیب، دو زاویه با اندازه‌های مختلف ممکن است ضلع ابتدایی و ضلع انتهایی مشترک داشته باشند. معلوم است که در این صورت نقطه انتهایی کمان متناظر با این زاویه‌ها بر هم منطبق است. این زاویه‌ها را **هم‌انتها** می‌نامیم.

مثال: زاویه‌های  $3^\circ$ ،  $36^\circ + 3^\circ$ ،  $-36^\circ + 3^\circ$  و  $2 \times 36^\circ + 3^\circ$  هم‌انتها هستند.

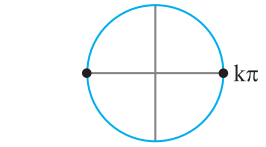


نکته

اگر عدد صحیح دلخواهی باشد،  
 • زاویه‌های  $\alpha^\circ$  و  $k \times 36^\circ + \alpha^\circ$  هم‌انتها هستند.  
 • زاویه‌های  $\alpha$  رادیان و  $2k\pi + \alpha$  رادیان هم‌انتها هستند.



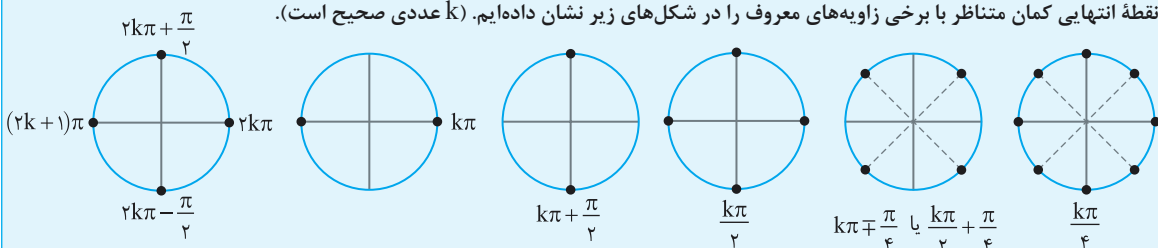
مثال: اندازه زاویه‌هایی که با زاویه‌های صفر رادیان،  $\frac{\pi}{2}$  رادیان،  $\pi$  رادیان و  $-\frac{\pi}{2}$  رادیان هم‌انتها هستند، به ترتیب برابر  $2k\pi$ ،  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ،  $2k\pi + \pi$  و  $2k\pi - \frac{\pi}{2}$  است (k عددی صحیح است).

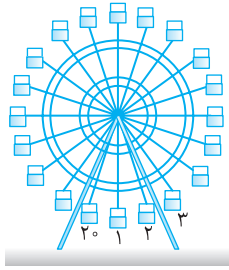


مثال: اندازه زاویه‌هایی که با زاویه‌های صفر رادیان یا  $\pi$  رادیان هم‌انتها هستند، به ترتیب  $2k\pi$  یا  $2k\pi + \pi$  است که می‌توان آن‌ها را به صورت  $k\pi$  نشان داد (k عددی صحیح است).

نکته

نقطه انتهایی کمان متناظر با برخی زاویه‌های معروف را در شکل‌های زیر نشان داده‌ایم. (k عددی صحیح است).





یک چرخ و فلک مطابق شکل مقابل ۲۰ کابین دارد. در لحظه حرکت چرخ و فلک، کابین شماره یک در پایین ترین نقطه قرار دارد. اگر چرخ و فلک به اندازه  $\frac{47\pi}{5}$  رادیان در جهت مثبت مثلثاتی دوران

کند، کابین شماره یک در محل فعلی کدام کابین قرار می‌گیرد؟

- (۱) ششم  
(۲) هفتم  
(۳) چهاردهم  
(۴) پانزدهم

تست  
□□□□

راه‌حل

زاویه بین هر دو کابین متوالی  $\frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$  رادیان است. از طرف دیگر  $\frac{47\pi}{5} = 8\pi + \frac{7\pi}{5} = 8\pi + 14 \times \frac{\pi}{10}$ . وقتی چرخ و فلک ۴ دور کامل می‌زند، یعنی

$8\pi$  رادیان می‌چرخد، هر کابین در جای اولیه خود قرار می‌گیرد. سپس چرخ و فلک به اندازه  $14 \times \frac{\pi}{10}$  دیگر دوران می‌کند که کابین شماره یک به مکان فعلی ۱۴ کابین جلوتر، یعنی کابین پانزدهم منتقل می‌شود.

### رابطه بین واحد درجه و واحد رادیان

با توجه به تعریف واحدهای درجه و رادیان اندازه زاویه‌های معروف را برحسب درجه و رادیان در جدول زیر نوشته‌ایم.

درجه	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$

نکته

اگر اندازه زاویه‌ای برحسب درجه برابر  $D$  و برحسب رادیان برابر  $R$  باشد، آن‌گاه  $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ .

$$\frac{12^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

مثال: اگر اندازه زاویه  $12^\circ$  برحسب رادیان برابر با  $R$  باشد، آن‌گاه

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\pi}{12} \Rightarrow D = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$$

همین‌طور اگر اندازه زاویه  $\frac{\pi}{12}$  رادیان برحسب درجه برابر با  $D$  باشد، آن‌گاه

$$\frac{1^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

مثال: اگر  $R$  اندازه زاویه  $1^\circ$  برحسب رادیان باشد، آن‌گاه

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180^\circ}{\pi}$$

بنابراین  $1 \text{ rad} \approx 0.17^\circ \approx 0.1^\circ$ . همین‌طور، اگر  $D$  اندازه زاویه ۱ رادیان برحسب درجه باشد، آن‌گاه

$$1 \text{ rad} \approx 57.3^\circ$$

تست  
□□□□

اندازه زاویه  $55^\circ$  برحسب رادیان کدام است؟

$$\frac{7\pi}{18} \quad (۴)$$

$$\frac{13\pi}{36} \quad (۳)$$

$$\frac{11\pi}{36} \quad (۲)$$

$$\frac{5\pi}{18} \quad (۱)$$

در تساوی  $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$  قرار می‌دهیم  $D = 55^\circ$ :

راه‌حل

$$\frac{55^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{11\pi}{36} \text{ رادیان}$$

تست

مجموع و تفاضل دو زاویه به ترتیب برابر  $110^\circ$  و  $\frac{2\pi}{9}$  رادیان است. اندازه زاویه بزرگتر چند رادیان است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{8}$       (۲)  $\frac{7\pi}{12}$       (۳)  $\frac{5\pi}{12}$       (۴)  $\frac{\pi}{7}$

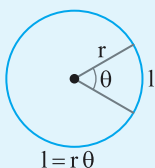
راه حل

ابتدا توجه کنید که  $110^\circ$  برابر  $\frac{11\pi}{18}$  رادیان است. اندازه زاویه بزرگتر را  $a$  و اندازه زاویه کوچکتر را  $b$  در نظر می‌گیریم:

$$a+b=\frac{11\pi}{18}, \quad a-b=\frac{2\pi}{9}$$

از حل این دستگاه به دست می‌آید  $a=\frac{5\pi}{12}$ .

طول کمان



به کمک اندازه‌گیری برحسب رادیان می‌توانیم رابطه‌ای بین طول کمان، شعاع دایره و اندازه زاویه مرکزی نظیر این کمان پیدا کنیم. فرض کنید شعاع دایره  $r$  باشد. اگر طول کمان برابر  $r$  باشد، اندازه زاویه مرکزی نظیر این کمان  $1$  رادیان است. اگر طول کمان برابر  $l$  باشد، اندازه زاویه مرکزی نظیر کمان برابر  $\frac{l}{r}$  رادیان است. بنابراین  $\theta = \frac{l}{r}$ .

نکته

اگر در دایره‌ای به شعاع  $r$  اندازه زاویه‌ای مرکزی  $\theta$  رادیان و طول کمان روبه‌رو به این زاویه  $l$  باشد، آن‌گاه  $l=r\theta$ .

توجه کنید که واحد  $r$  و  $l$  یکسان در نظر گرفته می‌شود.

تست

طول کمان نظیر زاویه مرکزی به اندازه  $15^\circ$  در دایره‌ای به شعاع  $18$  سانتی‌متر، چند سانتی‌متر است؟

- (۱)  $\frac{3\pi}{2}$       (۲)  $\frac{2\pi}{3}$       (۳)  $\frac{4\pi}{3}$       (۴)  $\frac{3\pi}{4}$

راه حل

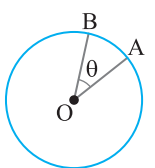
اگر اندازه زاویه  $15^\circ$  برحسب رادیان برابر  $R$  باشد، آن‌گاه

$$\frac{15^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{12}$$

بنابراین طول کمان مورد نظر برابر است با  $18 \times \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{2}$  سانتی‌متر.

تست

در شکل مقابل، دایره‌ای در نقطه  $A$  روی مسیری دایره‌ای به مرکز نقطه  $O$  و به شعاع  $1500$  متر ایستاده است. این دایره با سرعت  $5$  متر بر ثانیه می‌دود. اگر پس از  $10$  ثانیه در نقطه  $B$  باشد، اندازه  $\theta$  چند درجه است؟ (فرض کنید  $\pi=3$ )



- (۱)  $1^\circ$       (۲)  $2^\circ$       (۳)  $3^\circ$       (۴)  $4^\circ$

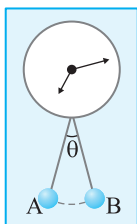
راه حل

مسافتی که این دایره در  $10$  ثانیه طی می‌کند برابر است با  $10 \times 5 = 50$  متر. بنابراین طول کمان  $AB$  برابر  $50$  متر است. در نتیجه

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{50}{1500} = \frac{1}{30} \text{ rad} = 180^\circ \left( \frac{1}{30} \right) = 180^\circ \left( \frac{1}{3} \right) = 2^\circ$$

تست

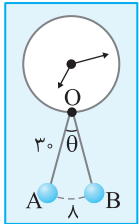
در شکل مقابل، طول پاندول ساعت  $30$  سانتی‌متر است و این پاندول در هر ثانیه از  $A$  به  $B$  و یا برعکس جابه‌جا می‌شود. اگر طول مسیری که نوک پاندول در یک ثانیه طی می‌کند برابر با  $8$  سانتی‌متر باشد، اندازه  $\theta$  چند درجه است؟ (فرض کنید  $\pi=3$ )



- (۱)  $12^\circ$       (۲)  $14^\circ$       (۳)  $16^\circ$       (۴)  $18^\circ$

راه حل

توجه کنید مسیری که نوک پاندول در یک ثانیه طی می کند، کمانی از دایره ای به مرکز نقطه O و شعاع ۳۰ سانتی متر است



(شکل مقابل را ببینید). بنابراین  $\theta = \frac{l}{r} = \frac{\lambda}{30} = \frac{4}{15} \text{ rad}$ ، در نتیجه

$$\theta = 18^\circ \left(\frac{4}{15}\right) = 18^\circ \left(\frac{15}{3}\right) = 16^\circ$$

در مدت زمان یک ساعت عقربه دقیقه شمار یک دور کامل می چرخد. پس اندازه زاویه ای که طی می کند،  $360^\circ$  یا  $2\pi$  رادیان است. در همین مدت، عقربه ساعت شمار، یک دوازدهم یک دایره را می چرخد. بنابراین اندازه زاویه ای که طی می کند برابر  $30^\circ$  یا  $\frac{\pi}{6}$  رادیان است.

نکته

در یک دقیقه عقربه دقیقه شمار  $6^\circ$  یا  $\frac{\pi}{30}$  رادیان را طی می کند. در همین مدت عقربه ساعت شمار  $(\frac{1}{5})^\circ$  یا  $\frac{\pi}{360}$  رادیان را طی می کند.

تست ۹

وقتی عقربه ساعت شمار به اندازه  $\frac{3\pi}{8}$  رادیان دوران می کند، چند دقیقه زمان سپری شده است؟

- ۱۰۵ (۱)      ۱۲۰ (۲)      ۱۳۵ (۳)      ۱۴۰ (۴)

راه حل اول

در هر ساعت عقربه ساعت شمار  $\frac{1}{12}$  دور می چرخد که معادل  $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$  رادیان است. بنابراین

$$\frac{6^\circ}{x} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{3\pi}{8}} \Rightarrow x = 135 \text{ دقیقه}$$

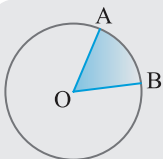
$$\frac{1}{x} = \frac{36^\circ}{\frac{3\pi}{8}} \Rightarrow x = 135$$

راه حل دوم با استفاده از نکته بالا نتیجه می گیریم:

مساحت قطاع دایره

تعریف

قسمتی از سطح دایره را که بین دو شعاع و کمانی از دایره است قطاع می نامند. زاویه مرکزی نظیر کمان مربوط به قطاع را زاویه قطاع می نامند (زاویه AOB در شکل روبه رو).



نکته

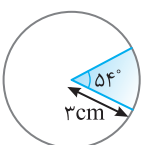
اگر در دایره ای به شعاع r اندازه زاویه قطاعی برابر با theta باشد، مساحت این قطاع برابر است با  $\frac{1}{2}r^2\theta$ .

تذکر

توجه کنید که اگر  $\theta = 2\pi \text{ rad}$ ، مساحت قطاع مورد نظر همان مساحت دایره است که برابر است با  $\frac{1}{2}r^2(2\pi) = \pi r^2$ .

تست ۱۰

در شکل روبه رو مساحت قطاع رنگی، کدام است؟



- $\frac{9\pi}{20}$  (۴)       $\frac{9\pi}{10}$  (۳)       $\frac{27\pi}{20}$  (۲)       $\frac{27\pi}{10}$  (۱)

راه حل

ابتدا اندازه  $54^\circ$  را برحسب رادیان پیدا می کنیم:

$$\frac{54^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{54^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{3\pi}{10}$$

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(3)^2 \times \left(\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{27\pi}{20} \text{ cm}^2$$

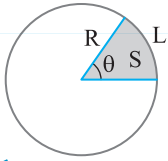
در نتیجه مساحت بخش رنگی، برابر است با



تست ۱۱

در دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی  $\theta$  رادیان برابر  $\frac{2\pi}{3}$  است. مساحت قطاع نظیر این زاویه کدام است؟

- (۱)  $\pi$       (۲)  $\frac{3\pi}{2}$       (۳)  $\frac{4\pi}{3}$       (۴)  $2\pi$



$$L = R\theta \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = 4\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

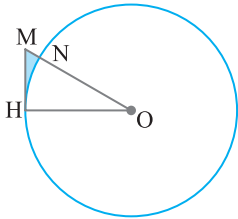
با توجه به شکل مقابل،

راه‌حل

بنابراین

تست ۱۲

در شکل مقابل O مرکز دایره و MH بر دایره مماس است.  $OM=6$  و  $MH=3$ . مساحت قسمت



رنگی کدام است؟

(۲)  $\frac{9}{2}(2\sqrt{3}-\pi)$

(۴)  $\frac{7}{2}(2\sqrt{3}-\pi)$

(۱)  $\frac{9}{4}(2\sqrt{3}-\pi)$

(۳)  $\frac{7}{4}(2\sqrt{3}-\pi)$

چون MH در نقطه H بر دایره مماس است، پس  $\widehat{OHM} = 90^\circ$ . اکنون، از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه MHO نتیجه می‌شود

$$OM^2 = MH^2 + HO^2 \Rightarrow 6^2 = 3^2 + HO^2 \Rightarrow HO = 3\sqrt{3}$$

مساحت قسمت رنگی برابر است با تفاضل مساحت مثلث MHO و مساحت قطاع HON. مساحت مثلث MHO برابر است با  $\frac{1}{2} MH \times HO = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ .

فرض کنید زاویه قطاع برحسب رادیان برابر  $\alpha$  باشد. در مثلث قائم‌الزاویه MHO،  $\sin \alpha = \frac{MH}{MO} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ . بنابراین  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ . در نتیجه، مساحت قطاع

HON برابر است با  $\frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} (3\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi}{4}$ . در نتیجه، مساحت قسمت رنگی برابر است با  $\frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{9\pi}{4} = \frac{9}{4}(2\sqrt{3}-\pi)$ .

راه‌حل

دست‌گرمی

۷۷- اندازه زاویه  $75^\circ$  برحسب رادیان کدام است؟

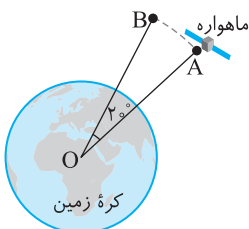
- (۱)  $\frac{11\pi}{12}$       (۲)  $\frac{13\pi}{12}$       (۳)  $\frac{7\pi}{12}$       (۴)  $\frac{5\pi}{12}$

۷۸- در دایره مثلثاتی انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $50^\circ$  در کدام ناحیه قرار دارد؟

- (۱) اول      (۲) دوم      (۳) سوم      (۴) چهارم

۷۹- مطابق شکل ماهواره‌ای در شعاع ۳۶۰۰۰ کیلومتری از مرکز زمین در حال گردش روی یک مسیر

دایره‌ای است. این ماهواره چند کیلومتر باید طی کند تا از نقطه A به نقطه B برسد؟



(۱)  $2000\pi$

(۲)  $2400\pi$

(۳)  $4000\pi$

(۴)  $4800\pi$

۸۰- آب‌پاش زمین چمنی آب را تا فاصله ۶ متر پرتاب می‌کند و به اندازه  $12^\circ$  دوران می‌کند. مساحت ناحیه‌ای از زمین که این آب‌پاش

خیس می‌کند چقدر است؟

- (۱)  $12\pi$       (۲)  $24\pi$       (۳)  $6\pi$       (۴)  $2\pi$

واحدهای اندازه گیری زاویه (۱)

آزمون ۴۳

۴۲۱- اندازه دو زاویه از مثلثی  $36^\circ$  و  $\frac{3\pi}{10}$  رادیان است. اندازه بزرگترین زاویه این مثلث برحسب رادیان کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{5}$       (۲)  $\frac{\pi}{2}$       (۳)  $\frac{3\pi}{10}$       (۴)  $\frac{2\pi}{5}$

۴۲۲- حاصل ضرب اندازه‌های یک زاویه برحسب درجه و برحسب رادیان برابر  $\frac{5\pi}{4}$  است. اندازه این زاویه برحسب درجه کدام است؟

- (۱)  $100^\circ$       (۲)  $60^\circ$       (۳)  $30^\circ$       (۴)  $15^\circ$

۴۲۳- انتهای کمان متناظر با زاویه‌های  $\frac{\pi}{4}$ ،  $\frac{3\pi}{4}$ ،  $\frac{4\pi}{3}$  و  $\frac{5\pi}{3}$  رادیان را روی دایره مثلثاتی به طور متوالی به هم وصل می‌کنیم.

چهارضلعی حاصل کدام است؟

- (۱) مربع      (۲) مستطیل      (۳) لوزی      (۴) ذوزنقه

۴۲۴- زاویه  $56^\circ$  روی دایره مثلثاتی با کدامیک از زاویه‌های زیر هم‌انتهاست؟

- (۱)  $160^\circ$       (۲)  $-160^\circ$       (۳)  $140^\circ$       (۴)  $-140^\circ$

۴۲۵- یک چرخ‌وفلک  $20^\circ$  کابین دارد. در لحظه حرکت چرخ‌وفلک، کابین شماره یک در پایین‌ترین نقطه قرار دارد. اگر چرخ‌وفلک به اندازه

رادیان در جهت مثبت مثلثاتی دوران کند، کابین شماره یک در محل فعلی کدام کابین قرار می‌گیرد؟

- (۱) چهاردهم      (۲) پانزدهم      (۳) شانزدهم      (۴) هفدهم

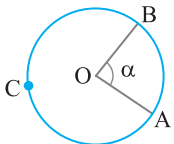
۴۲۶- کدامیک از اعداد زیر کوچکتر است؟ (زوایا برحسب رادیان هستند.)

- (۱)  $\sin 1$       (۲)  $\sin 2$       (۳)  $\sin 4$       (۴)  $\sin 6$

۴۲۷- وقتی عقربه ساعت شمار به اندازه  $\frac{5\pi}{8}$  رادیان دوران می‌کند، چند دقیقه زمان سپری شده است؟

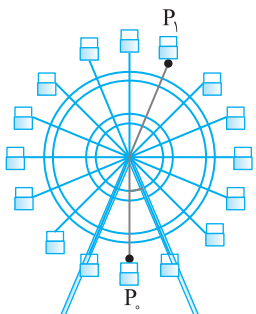
- (۱) ۱۲۵      (۲) ۱۷۵      (۳) ۲۲۵      (۴) ۲۷۵

۴۲۸- در شکل مقابل O مرکز دایره و اندازه شعاع دایره  $4\pi$  واحد است. اگر طول کمان ACB،  $\pi$  واحد بیشتر از طول کمان AB باشد، اندازه زاویه  $\alpha$  چند رادیان است؟



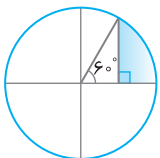
- (۱)  $\pi - \frac{1}{4}$       (۲)  $\pi - \frac{1}{8}$   
(۳)  $\pi - \frac{1}{2}$       (۴)  $\pi - \frac{3}{4}$

۴۲۹- شعاع چرخ‌وفلک شکل مقابل  $40$  متر است و در جهت مثلثاتی می‌چرخد. مسافران از نقطه  $P_0$  تا نقطه  $P_1$  چند متر روی چرخ‌وفلک طی می‌کنند؟



- (۱)  $35\pi$       (۲)  $25\pi$       (۳)  $36\pi$       (۴)  $32\pi$

۴۳۰- در شکل مقابل اندازه شعاع دایره  $6\sqrt{3}$  است. اندازه محیط قسمت رنگی کدام است؟



- (۱)  $2(1 + \sqrt{3} + \pi)$       (۲)  $2(1 + \sqrt{3} + \pi)$   
(۳)  $9 + \sqrt{3}(2\pi + 3)$       (۴)  $3(1 + \sqrt{3}) + 2\pi$

سؤال	گام
۴۲۱	۸۸
۴۲۲	۸۸
۴۲۳	۸۵
۴۲۴	۸۶
۴۲۵	۸۷
۴۲۶	۸۵
۴۲۷	۹۰
۴۲۸	۸۹
۴۲۹	۸۷ ۸۹
۴۳۰	۷۰ ۸۹

واحدهای اندازه گیری زاویه (۲)

۴۳۱- مجموع اندازه‌های دو زاویه  $400^\circ$  و تفاضل اندازه‌های آن‌ها  $\frac{4\pi}{9}$  رادیان است. اندازه زاویه بزرگ‌تر برحسب رادیان کدام است؟

- (۱)  $\frac{4\pi}{3}$  (۲)  $\frac{4\pi}{9}$  (۳)  $\frac{8\pi}{9}$  (۴)  $\frac{11\pi}{9}$

۴۳۲- اندازه یک زاویه برحسب رادیان از  $\frac{\pi}{80}$  برابر اندازه آن برحسب درجه  $\frac{5\pi}{36}$  کمتر است. اندازه این زاویه برحسب درجه کدام است؟

- (۱)  $15^\circ$  (۲)  $20^\circ$  (۳)  $40^\circ$  (۴)  $50^\circ$

۴۳۳- انتهای کمان‌های متناظر با زاویه‌های  $\frac{\pi}{3}$ ،  $\frac{2\pi}{3}$ ،  $\frac{4\pi}{3}$  و  $\frac{5\pi}{3}$  رادیان را روی دایره مثلثاتی به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل کدام است؟

- (۱) مستطیل (۲) مربع (۳) متوازی‌الاضلاع (۴) دوزنقه

۴۳۴- زاویه‌ای با اندازه  $\frac{28\pi}{3}$  رادیان روی دایره مثلثاتی با زاویه  $\alpha$  هم‌انتهاست. اندازه  $\alpha$  برحسب رادیان کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $\frac{\pi}{3}$  (۲)  $\frac{31\pi}{6}$  (۳)  $-\frac{2\pi}{3}$  (۴)  $-\frac{\pi}{3}$

۴۳۵- انتهای کمان نظیر زاویه‌هایی به صورت  $\alpha = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$  را به ازای مقادیر مختلف و صحیح  $k$  روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم. اگر این نقاط را متوالیاً به هم وصل کنیم، چه شکلی درست می‌شود؟

- (۱) مستطیل (۲) مربع (۳) پنج‌ضلعی منظم (۴) شش‌ضلعی منظم

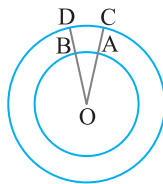
۴۳۶- کدام یک از اعداد زیر بزرگ‌تر است؟ (زاویه‌ها برحسب رادیان هستند).

- (۱)  $\tan 2$  (۲)  $\tan 3$  (۳)  $\tan 5$  (۴)  $\tan 6$

۴۳۷- اندازه زاویه‌ای که عقربه ساعت‌شمار بین ساعت ۹ و  $10:20$  طی می‌کند، چند رادیان است؟

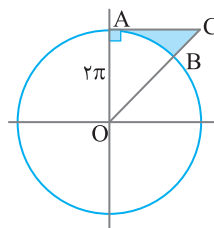
- (۱)  $\frac{2\pi}{9}$  (۲)  $\frac{\pi}{3}$  (۳)  $\frac{4\pi}{9}$  (۴)  $\frac{5\pi}{9}$

۴۳۸- در شکل مقابل دو دایره هم‌مرکز به شعاع ۶ و ۹ واحد رسم شده است و  $\widehat{DOC} = 25^\circ$ . طول کمان CD چقدر از طول کمان AB بیشتر است؟



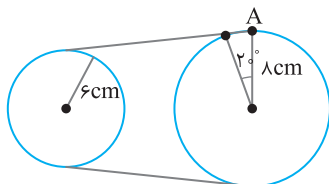
- (۱)  $\frac{5\pi}{36}$  (۲)  $\frac{\pi}{3}$  (۳)  $\frac{5\pi}{12}$  (۴)  $\frac{5\pi}{9}$

۴۳۹- در شکل روبه‌رو O مرکز دایره است و مساحت قسمت رنگی  $2\pi^2(1-\frac{\pi}{4})$  است. طول کمان AB چقدر است؟



- (۱)  $\frac{\pi^2}{3}$  (۲)  $\frac{\pi}{2}$  (۳)  $\frac{\pi}{4}$  (۴)  $\frac{\pi^2}{2}$

۴۴۰- در شکل مقابل اگر نقطه A،  $20^\circ$  روی چرخ بزرگ‌تر جابه‌جا شود، چرخ کوچک‌تر چند درجه جابه‌جا می‌شود؟



- (۱)  $\frac{4\pi}{27}$  (۲)  $\frac{9\pi}{27}$  (۳)  $\frac{40}{3}$  (۴)  $\frac{80}{3}$

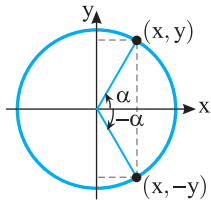
سؤال	گام
۴۳۱	۸۸
۴۳۲	۸۸
۴۳۳	۸۵
۴۳۴	۸۶
۴۳۵	۸۷
۴۳۶	۸۵
۴۳۷	۹۰
۴۳۸	۸۹
۴۳۹	۸۹ ۹۱
۴۴۰	۸۸ ۸۹

## درس پنجم: نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها

توجه کنید که نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $2k\pi + \alpha$  با نسبت‌های مثلثاتی نظیرشان از زاویه  $\alpha$  برابرند، زیرا این دو زاویه هم انتها هستند (k عددی صحیح است). بنابراین،

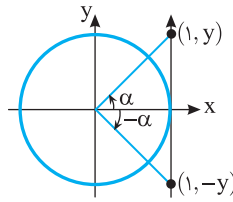
$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha, \quad \tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha, \quad \cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

همین‌طور، نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $-\alpha$  را می‌توان از روی نسبت‌های مثلثاتی نظیرشان از زاویه  $\alpha$  به کمک شکل‌های زیر به دست آورد.



$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$



$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{1}{\tan(-\alpha)} = \frac{1}{-\tan \alpha} = -\cot \alpha$$

۹۲

نکته

به روش زیر می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی برخی زاویه‌ها را بر حسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای دیگر حساب کنیم.

(۱) زاویه مورد نظر را به صورت  $k\pi \pm \alpha$  (k عددی صحیح است) یا  $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$  (k عددی صحیح و فرد است) می‌نویسیم.

(۲) با فرض اینکه  $\alpha$  زاویه‌ای حاده است، ناحیه‌ای را که انتهای کمان نظیر زاویه مورد نظر در آن قرار دارد مشخص می‌کنیم.

(۳) علامت نسبت مثلثاتی مورد نظر در ناحیه به دست آمده را یادداشت می‌کنیم.

(۴) عبارت  $k\pi \pm$  یا  $\frac{k\pi}{2} \pm$  را حذف می‌کنیم.

(۵) اگر در مرحله قبلی  $\frac{k\pi}{2} \pm$  را حذف کردیم، نسبت مثلثاتی را به صورت زیر تغییر می‌دهیم.

- سینوس به کسینوس
- کسینوس به سینوس
- تانژانت به کتانژانت
- کتانژانت به تانژانت

مثال:

$$۱) \sin 39^\circ = \sin(2 \times 18^\circ + 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

$$۲) \cos 11^\circ = \cos(9^\circ + 2^\circ) = -\sin 2^\circ$$

$$۳) \tan \frac{11\pi}{6} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$۴) \cot \frac{13\pi}{10} = \cot(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{10}) = \tan \frac{\pi}{10}$$

نکته

اگر  $\alpha$  زاویه‌ای دلخواه باشد و  $k \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه با استفاده از روش گفته شده نتیجه‌های زیر به دست می‌آیند.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin \alpha$	$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cot \alpha$	$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\tan \alpha$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin \alpha$	$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot \alpha$	$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan \alpha$
$\sin(2k\pi-\alpha)=-\sin \alpha$	$\cos(2k\pi-\alpha)=\cos \alpha$	$\tan(2k\pi-\alpha)=-\tan \alpha$	$\cot(2k\pi-\alpha)=-\cot \alpha$
$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin \alpha$	$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos \alpha$	$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan \alpha$	$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot \alpha$

**تست ۱** حاصل عبارت  $A = \frac{1+\cos(12\pi-\alpha)}{\sin^2(\Delta\pi-\alpha)} \times \frac{1+\cos(12\pi+\alpha)}{\sin(7\pi+\alpha)}$  به ازای  $\alpha = \frac{\Delta\pi}{6}$  کدام است؟

۱) ۲      ۲) -۲      ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴)  $-\frac{1}{2}$

**راه حل** ابتدا توجه کنید که  $\sin(7\pi+\alpha)=-\sin \alpha$  ،  $\sin(\Delta\pi-\alpha)=\sin \alpha$  ،  $\cos(12\pi+\alpha)=\cos \alpha$  ،  $\cos(12\pi-\alpha)=-\cos \alpha$  ، بنابراین

$$A = \frac{1-\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \times \frac{1+\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{1-\cos^2 \alpha}{-\sin^3 \alpha} = -\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^3 \alpha} = -\frac{1}{\sin \alpha}$$

بنابراین مقدار A به ازای  $\alpha = \frac{\Delta\pi}{6}$  برابر است با  $-\frac{1}{\sin \frac{\Delta\pi}{6}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$

**تست ۲** حاصل عبارت  $A = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + 4\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) + 5\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$  به ازای  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$  کدام است؟

۱) ۲      ۲) ۴      ۳) -۴      ۴) -۲

**راه حل** ابتدا توجه کنید که  $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos \alpha$  ،  $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos \alpha$  ،  $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos \alpha$  ،  $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos \alpha$  ، بنابراین  $A = 2\cos \alpha + 3\cos \alpha - 4\cos \alpha - 5\cos \alpha = -4\cos \alpha$  . پس مقدار A به ازای  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$  برابر است با  $-4\cos \frac{2\pi}{3} = -4\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$

**تست ۳** مقدار  $\sin 42^\circ \cos 39^\circ + \cos(-66^\circ) \sin(-33^\circ)$  کدام است؟

۱) ۱      ۲) -۱      ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**راه حل** توجه کنید که  $\sin 42^\circ = \sin(36^\circ + 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ،  $\cos 39^\circ = \cos(36^\circ + 3^\circ) = \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ،  $\cos(-66^\circ) = \cos 66^\circ = \cos(72^\circ - 6^\circ) = \cos 6^\circ = \frac{1}{2}$  ،  $\sin(-33^\circ) = -\sin 33^\circ = -\sin(36^\circ - 3^\circ) = -(-\sin 3^\circ) = \frac{1}{2}$  ، بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با  $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

**تست ۴** حاصل  $A = 3\sin \frac{3\pi}{4} + 5\sin \frac{\Delta\pi}{4} + 7\sin \frac{7\pi}{4}$  کدام است؟

۱)  $\frac{15\sqrt{2}}{2}$       ۲)  $\frac{9\sqrt{2}}{2}$       ۳)  $-\frac{9\sqrt{2}}{2}$       ۴)  $-\frac{15\sqrt{2}}{2}$

**راه حل** ابتدا توجه کنید که  $\sin \frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ،  $\sin \frac{\Delta\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ،  $\sin \frac{7\pi}{4} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ، بنابراین  $A = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 7\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{9\sqrt{2}}{2}$

## تست



اگر  $\tan 20^\circ = a$ ، مقدار  $\frac{\tan 20^\circ + \cot 16^\circ}{\tan 76^\circ + \cot 34^\circ}$  بر حسب  $a$  کدام است؟

(۴)  $\frac{a}{a-1}$

(۳)  $\frac{a}{a+1}$

(۲)  $a-1$

(۱)  $a+1$

می‌توان نوشت

راه‌حل

$$\tan 20^\circ = \tan(18^\circ + 2^\circ) = \tan 2^\circ = a$$

$$\cot 16^\circ = \cot(18^\circ - 2^\circ) = -\cot 2^\circ = -\frac{1}{a}$$

$$\tan 76^\circ = \tan(4 \times 18^\circ + 4^\circ) = \tan 4^\circ = 1$$

$$\cot 34^\circ = \cot(36^\circ - 2^\circ) = -\cot 2^\circ = -\frac{1}{a}$$

$$\frac{a - \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{a^2 - 1}{a - 1} = a + 1$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با  $a+1$ .

۹۳

## نکته

اگر زاویه‌های  $\alpha$  و  $\beta$  مکمل یکدیگر باشند، سینوس آن‌ها با هم برابر است و کسینوس آن‌ها قرینه یکدیگر، تانژانت آن‌ها قرینه یکدیگر و کتانژانت آن‌ها هم قرینه یکدیگر است.

$$\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta, \quad \cos \alpha = -\cos \beta$$

$$\tan \alpha = -\tan \beta, \quad \cot \alpha = -\cot \beta$$

## تست



مقدار عبارت  $A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5}}$  کدام است؟

(۴)  $-\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۲)  $-1$

(۱)  $1$

توجه کنید که اگر  $\alpha + \beta = \pi$ ، آن‌گاه  $\sin \alpha = \sin \beta$ . بنابراین

راه‌حل

$$\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{4\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5}, \quad \frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{5} = \sin \frac{2\pi}{5}$$

در نتیجه

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5}} = 1$$

## تست



مقدار عبارت  $A = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 180^\circ$  کدام است؟

(۴)  $180^\circ$

(۳)  $90^\circ$

(۲)  $-1$

(۱)  $1$

ابتدا توجه کنید که اگر  $\alpha + \beta = 180^\circ$ ، آن‌گاه  $\cos \beta = -\cos \alpha$  و در نتیجه  $\cos \alpha + \cos \beta = 0$ . بنابراین

راه‌حل

$$\cos 1^\circ + \cos 179^\circ = 0, \quad \cos 2^\circ + \cos 178^\circ = 0, \quad \dots, \quad \cos 89^\circ + \cos 91^\circ = 0$$

از طرف دیگر  $\cos 90^\circ = 0$  و  $\cos 180^\circ = -1$ . بنابراین  $A = -1$ .

تست

حاصل  $A = \cos^3 \frac{\pi}{11} + \cos^3 \frac{2\pi}{11} + \dots + \cos^3 \frac{10\pi}{11}$  کدام است؟

- (۱)  $5 \cos^3 \frac{\pi}{11}$  (۲)  $10 \cos^3 \frac{\pi}{11}$  (۳) ۱ (۴) صفر

راه حل

ابتدا توجه کنید که اگر  $\alpha + \beta = \pi$  آن گاه  $\cos \beta = -\cos \alpha$ . پس  $\cos^3 \beta = -\cos^3 \alpha$  و در نتیجه  $\cos^3 \alpha + \cos^3 \beta = 0$ . بنابراین

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{11} + \frac{10\pi}{11} = \pi &\Rightarrow \cos^3 \frac{\pi}{11} + \cos^3 \frac{10\pi}{11} = 0 \\ \frac{2\pi}{11} + \frac{9\pi}{11} = \pi &\Rightarrow \cos^3 \frac{2\pi}{11} + \cos^3 \frac{9\pi}{11} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{5\pi}{11} + \frac{6\pi}{11} = \pi &\Rightarrow \cos^3 \frac{5\pi}{11} + \cos^3 \frac{6\pi}{11} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 0$$

۹۴

نکته

اگر زاویه‌های  $\alpha$  و  $\beta$  متمم یکدیگر باشند، سینوس یکی برابر کسینوس دیگری است و تانژانت یکی برابر کتانژانت دیگری است.

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta, \quad \tan \alpha = \cot \beta$$

تست

مقدار  $\sin^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{2\pi}{5}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴) ۱

راه حل

توجه کنید که  $\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$ . پس  $\sin \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{10}$ . در نتیجه  $\sin^2 \frac{2\pi}{5} = \cos^2 \frac{\pi}{10}$ . بنابراین  $\sin^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{2\pi}{5} = \sin^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{\pi}{10} = 1$

دست‌گرمی

۸۱- حاصل عبارت  $A = \frac{2 \sin(\pi + \alpha) - 4 \sin(\pi - \alpha)}{3 \cos(\pi + \alpha) - \cos(\pi - \alpha)}$  کدام است؟

- (۱)  $3 \tan \alpha$  (۲)  $\frac{3}{2} \tan \alpha$  (۳)  $-\tan \alpha$  (۴)  $-3 \tan \alpha$

۸۲- اگر  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ، مقدار  $\frac{\cos(\pi - \alpha) - \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\sin(-\alpha) - \cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\cot \alpha$  (۲)  $-\cot \alpha$  (۳)  $\cos \alpha$  (۴)  $-\cos \alpha$

۸۳- حاصل عبارت  $\frac{\sin 135^\circ - \cos 12^\circ}{\sin 135^\circ + \cos 12^\circ}$  کدام است؟

- (۱)  $1 + 2\sqrt{2}$  (۲)  $2 - 3\sqrt{2}$  (۳)  $3 + 2\sqrt{2}$  (۴)  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

۸۴- حاصل عبارت  $A = \sin \frac{7\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{4} + \cot \frac{7\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{3}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۸۵- مقدار  $\cos^3 \frac{\pi}{8} + \cos^3 \frac{3\pi}{8} + \cos^3 \frac{5\pi}{8} + \cos^3 \frac{7\pi}{8}$  برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

## نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها (۱)

## آزمون ۴۵

- ۴۴۱- حاصل عبارت  $A = \tan \alpha \cot(-\alpha) + \sin^2(-\alpha) + \cos^2 \alpha$  کدام است؟  
 (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)  $-2 \sin^2 \alpha$
- ۴۴۲- حاصل  $\cos(x-90^\circ) \cot(-x-180^\circ)$  کدام است؟  
 (۱)  $-\sin x$  (۲)  $-\cos x$  (۳)  $\sin x$  (۴)  $\cos x$
- ۴۴۳- اگر  $\tan \theta = 0/4$ ، مقدار عبارت  $A = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) + \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) + \sin(3\pi - \theta)}$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{5}{4}$  (۳)  $-\frac{1}{4}$  (۴)  $-\frac{3}{4}$
- ۴۴۴- اگر  $x + 3y = \frac{\pi}{2}$ ، حاصل  $\tan(2x + 3y)$  کدام است؟  
 (۱)  $-\tan x$  (۲)  $-\cot x$  (۳)  $\tan x$  (۴)  $\cot x$
- ۴۴۵- اگر  $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = 2 \sin(\frac{5\pi}{2} + x)$ ، حاصل  $\tan x$  کدام است؟  
 (۱) ۲ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) -۲ (۴)  $-\frac{1}{2}$
- ۴۴۶- حاصل  $\cos 51^\circ$  کدام است؟  
 (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ۴۴۷- حاصل  $\cos \frac{43\pi}{6}$  کدام است؟  
 (۱)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ۴۴۸- حاصل  $\sin \frac{23\pi}{6} \cos \frac{16\pi}{3} \tan \frac{25\pi}{4} \cot(-\frac{43\pi}{4})$  کدام است؟  
 (۱)  $-\frac{\sqrt{3}}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- ۴۴۹- مقدار عبارت  $A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5}}$  کدام است؟  
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $-\frac{3}{2}$
- ۴۵۰- مقدار عبارت  $A = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$  کدام است؟  
 (۱) ۱ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴) صفر

سؤال	گام
۴۴۱	۸۲ ۹۲
۴۴۲	۸۲ ۹۲
۴۴۳	۸۲ ۹۲
۴۴۴	۹۴
۴۴۵	۹۲
۴۴۶	۹۲
۴۴۷	۹۲
۴۴۸	۹۲
۴۴۹	۹۳
۴۵۰	۹۳



## نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۲)

سؤال	گام
۴۵۱	۹۲
۴۵۲	۸۲ ۹۲
۴۵۳	۸۲ ۹۲
۴۵۴	۸۲ ۹۲
۴۵۵	۷۵ ۸۲ ۹۲
۴۵۶	۹۲
۴۵۷	۹۲ ۲۸۴
۴۵۸	۹۲
۴۵۹	۹۳ ۹۴
۴۶۰	۹۴

۴۵۱- حاصل عبارت  $A = 3 \sin(3\pi - \alpha) + 4 \sin(4\pi + \alpha) + 5 \sin(\delta\pi + \alpha)$  کدام است؟

- ۴ sin  $\alpha$  (۱)      ۸ sin  $\alpha$  (۲)      ۲ sin  $\alpha$  (۳)      ۱۲ sin  $\alpha$  (۴)

۴۵۲- حاصل عبارت  $A = \frac{3 \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{2 \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \cot(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$  کدام است؟ ( $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ )

- ۲ cot<sup>۲</sup>  $\alpha$  (۱)       $\frac{4}{3}$  cot<sup>۲</sup>  $\alpha$  (۲)      ۲ tan<sup>۲</sup>  $\alpha$  (۳)       $\frac{4}{3}$  tan<sup>۲</sup>  $\alpha$  (۴)

۴۵۳- اگر  $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 2 \sin(2\pi - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - 2 \cos(3\pi + \alpha)} = 3$  ، مقدار  $\tan(\alpha - \frac{5\pi}{2})$  کدام است؟

- ۵ (۱)      -۵ (۲)       $\frac{1}{5}$  (۳)       $-\frac{1}{5}$  (۴)

۴۵۴- اگر  $\alpha - \beta = \frac{3\pi}{2}$  ، حاصل  $\frac{1}{1 - \cot \alpha} + \frac{1}{1 + \cot \beta}$  کدام است؟

- ۱ (۱)      -۱ (۲)      tan  $\beta$  (۳)      cot  $\alpha$  (۴)

۴۵۵- اگر  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  و  $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \frac{12}{13}$  ، مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟

- $-\frac{3}{4}$  (۱)       $-\frac{5}{6}$  (۲)       $-\frac{1}{2}$  (۳)       $-\frac{5}{12}$  (۴)

۴۵۶- حاصل کسر  $\frac{\cos(-60^\circ) + \cot 675^\circ}{\tan 945^\circ - \sin(-33^\circ)}$  کدام است؟

- ۳ (۱)      -۱ (۲)       $\frac{1}{2}$  (۳)      ۱ (۴)

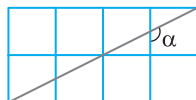
۴۵۷- اگر  $\tan 15^\circ = a$  ، حاصل عبارت  $A = \frac{2 \tan 75^\circ + \tan 105^\circ}{3 \tan 165^\circ - \tan 255^\circ}$  بر حسب a کدام است؟

- $\frac{3}{3a^2 + 1}$  (۱)       $\frac{3}{3a^2 - 1}$  (۲)       $\frac{1}{3a^2 - 1}$  (۳)       $\frac{-1}{3a^2 + 1}$  (۴)

۴۵۸- مقدار عبارت  $A = 4 \sin^2 \frac{101\pi}{3} - 2 \cos \frac{98\pi}{3}$  کدام است؟

- ۶ (۱)       $1 + \sqrt{3}$  (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۴۵۹- در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر با یک واحد است. مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟



- ۴ (۱)      -۳ (۲)      -۲ (۳)      -۱ (۴)

۴۶۰- حاصل عبارت  $A = \tan \frac{\pi}{14} \tan \frac{2\pi}{14} \dots \tan \frac{6\pi}{14}$  کدام است؟

- ۱ (۱)       $\frac{1}{2}$  (۲)       $\frac{1}{4}$  (۳)      ۲ (۴)

## نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها (۳)

## آزمون ۴۷

- ۴۶۱- حاصل عبارت  $A = \frac{\tan(\pi-\alpha)+3\tan(\pi+\alpha)}{\tan(2\pi-\alpha)-\tan(2\pi+\alpha)}$  کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲
- ۴۶۲- مقدار عبارت  $A = \frac{4\sin(\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{3})+2\cos(\frac{7\pi}{2}-\frac{\pi}{6})}{3\tan(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{3})-6\cot(\frac{7\pi}{2}+\frac{\pi}{6})}$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{3\sqrt{3}}$  (۳)  $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$  (۴)  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
- ۴۶۳- در مثلث قائم‌الزاویه ABC حاصل عبارت  $\frac{\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C}}{\sin^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C}}$  کدام است؟
- (۱) ۱ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۲ (۴)  $\frac{3}{2}$
- ۴۶۴- اگر  $a+b = \frac{5\pi}{2}$ ، حاصل  $\frac{\sin a + \tan a \tan b - 1}{\sin b - \cos^2 a - \cos^2 b + 1}$  کدام است؟
- (۱)  $\tan b$  (۲)  $\cot b$  (۳)  $-\cot b$  (۴)  $-\tan b$
- ۴۶۵- اگر  $3a+2b = \pi$  و  $\cos(a+b) = \frac{3}{5}$ ، مقدار  $\sin \frac{a}{2}$  کدام است؟
- (۱)  $-\frac{2}{5}$  (۲)  $-\frac{3}{5}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{3}{5}$
- ۴۶۶- حاصل عبارت  $\frac{\sin^2 41^\circ + \sin^2 40^\circ}{\tan 73^\circ \times \cot 11^\circ}$  کدام است؟
- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲
- ۴۶۷- اگر  $a = \cot 25^\circ$ ، حاصل عبارت  $A = \frac{\cos 115^\circ - 3 \cos 155^\circ}{3 \cos 295^\circ + \cos 335^\circ}$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{3a+1}{3-a}$  (۲)  $\frac{3a-1}{a-3}$  (۳)  $\frac{3a-1}{a+3}$  (۴)  $\frac{a+1}{3a-1}$
- ۴۶۸- حاصل عبارت  $A = \sin \frac{11\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{4} - \cot \frac{9\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{3}$  کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲
- ۴۶۹- حاصل عبارت  $A = \cos^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{3\pi}{16} + \cos^2 \frac{5\pi}{16} + \cos^2 \frac{7\pi}{16}$  کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{5}{2}$
- ۴۷۰- مقدار عبارت  $A = \frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 89^\circ}{\cos 91^\circ + \cos 92^\circ + \dots + \cos 179^\circ}$  کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۲

سؤال	گام
۴۶۱	۹۲
۴۶۲	۹۲
۴۶۳	۹۴
۴۶۴	۸۲ ۹۲
۴۶۵	۹۴
۴۶۶	۹۲
۴۶۷	۸۲ ۹۲
۴۶۸	۹۲
۴۶۹	۸۲ ۹۴
۴۷۰	۹۳

## درس ششم: سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه

در این درس به رابطه‌هایی اشاره می‌کنیم که به کمک آن‌ها می‌توان سینوس و کسینوس مجموع یا تفاضل دو زاویه را برحسب سینوس و کسینوس این دو زاویه پیدا کرد.

۹۵

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه

نکته

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو زاویه دلخواه باشند، آن‌گاه

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

مثال:

$$۱) \sin ۷۵^\circ = \sin(۴۵^\circ + ۳۰^\circ) = \sin ۴۵^\circ \cos ۳۰^\circ + \cos ۴۵^\circ \sin ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$۲) \cos ۷۵^\circ = \cos(۴۵^\circ + ۳۰^\circ) = \cos ۴۵^\circ \cos ۳۰^\circ - \sin ۴۵^\circ \sin ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$۳) \sin ۱۵^\circ = \sin(۴۵^\circ - ۳۰^\circ) = \sin ۴۵^\circ \cos ۳۰^\circ - \cos ۴۵^\circ \sin ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(البته توجه کنید که  $(\sin ۱۵^\circ = \sin(۹۰^\circ - ۷۵^\circ) = \cos ۷۵^\circ)$ .)

تست

۱

مقدار عبارت  $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

۱)  $-\frac{1}{2}$

۲)  $\frac{1}{2}$

۳)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

عبارت مورد نظر به شکل  $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$  است، که در این‌جا  $\alpha = \frac{\pi}{12}$  و  $\beta = \frac{\pi}{4}$ . در نتیجه، اگر در تساوی

راه‌حل

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \text{قرار دهیم } \alpha = \frac{\pi}{12} \text{ و } \beta = \frac{\pi}{4} \text{ به دست می‌آید}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

تست

۲

مقدار عبارت  $\frac{\sin ۲۰^\circ \cos ۵۰^\circ + \cos ۲۰^\circ \sin ۵۰^\circ}{\cos ۳۰^\circ \cos ۱۰^\circ + \sin ۳۰^\circ \sin ۱۰^\circ}$  کدام است؟

۱) ۱

۲) -۱

۳)  $\tan ۷۰^\circ$

۴)  $\tan ۲۰^\circ$

توجه کنید که

راه‌حل

$$\sin ۲۰^\circ \cos ۵۰^\circ + \cos ۲۰^\circ \sin ۵۰^\circ = \sin(۲۰^\circ + ۵۰^\circ) = \sin ۷۰^\circ, \quad \cos ۳۰^\circ \cos ۱۰^\circ + \sin ۳۰^\circ \sin ۱۰^\circ = \cos(۳۰^\circ - ۱۰^\circ) = \cos ۲۰^\circ$$

از طرف دیگر، چون زاویه‌های  $۷۰^\circ$  و  $۲۰^\circ$  متمم یکدیگرند، پس  $\sin ۷۰^\circ = \cos ۲۰^\circ$ . بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر با ۱ است.

تست

۳

مقدار عبارت  $\sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \sin \alpha$  کدام است؟

۱)  $\cos \alpha$

۲)  $-\cos \alpha$

۳)  $\sin \alpha$

۴)  $-\sin \alpha$

می‌توان نوشت

راه‌حل

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \sin \alpha &= \sqrt{2} \left(\sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha\right) - \sin \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha\right) - \sin \alpha \\ &= \sin \alpha - \cos \alpha - \sin \alpha = -\cos \alpha \end{aligned}$$

تست

۴

مقدار عبارت  $\frac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$  کدام است؟

cot( $\alpha+\beta$ ) (۴)

tan( $\alpha+\beta$ ) (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

صورت عبارت داده شده برابر است با

راه‌حل

$$\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+2\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$$

و مخرج عبارت داده شده برابر است با

$$2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \\ =\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$$

در نتیجه، عبارت مورد نظر برابر است با  $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\tan(\alpha+\beta)$ 

تست

۵

اگر  $\sin\alpha=\frac{8}{17}$ ،  $\cos\beta=\frac{4}{5}$  و  $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$ ، مقدار  $\sin(\alpha+\beta)$  کدام است؟

$\frac{4}{105}$  (۴)

$\frac{44}{945}$  (۳)

$\frac{77}{85}$  (۲)

$\frac{13}{75}$  (۱)

ابتدا توجه کنید که چون  $\alpha$  و  $\beta$  هر دو زاویه‌های حاده هستند، پس  $\cos\alpha=\sqrt{1-(\frac{8}{17})^2}=\frac{15}{17}$  و  $\sin\beta=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}$  بنابراین

راه‌حل

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\frac{8}{17}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{15}{17}=\frac{32+45}{85}=\frac{77}{85}$$

تست

۶

اگر  $\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$  و  $\pi<\alpha<\frac{4\pi}{3}$ ، مقدار  $\sin\alpha$  کدام است؟

$-\frac{4}{5}$  (۴)

$\frac{3}{5}$  (۳)

$\frac{4}{5}$  (۲)

$-\frac{3}{5}$  (۱)

توجه کنید که

راه‌حل

$$\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{10}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{10} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{10}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{10}\Rightarrow\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{1}{5}$$

در نتیجه  $\cos\alpha=\sin\alpha-\frac{1}{5}$ . اکنون اگر در تساوی  $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ، به جای  $\cos\alpha$  قرار دهیم  $\sin\alpha-\frac{1}{5}$ ، به دست می‌آید

$$\sin^2\alpha+(\sin\alpha-\frac{1}{5})^2=1\Rightarrow\sin^2\alpha+\sin^2\alpha-\frac{2}{5}\sin\alpha+\frac{1}{25}=1\Rightarrow\sin^2\alpha-\frac{1}{5}\sin\alpha-\frac{12}{25}=0\Rightarrow\sin\alpha=\frac{4}{5}, \sin\alpha=-\frac{3}{5}$$

اکنون توجه کنید که چون  $\pi<\alpha<\frac{4\pi}{3}$ ، پس انتهای کمان نظیر  $\alpha$  در ربع سوم است، در نتیجه  $\sin\alpha$  عددی منفی است. به این ترتیب،

$$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$$

تست

۷

اگر  $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{5}$  و  $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$ ، حاصل  $\tan\alpha\cot\beta$  کدام است؟

$\frac{1}{10}$  (۴)

۱۰ (۳)

۵ (۲)

$\frac{1}{5}$  (۱)

از تساوی‌های فرض مسئله نتیجه می‌شود  $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$  و  $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$ . با جمع و تفریق طرفین این

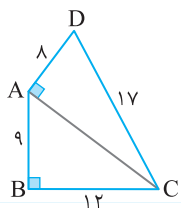
راه‌حل

دو تساوی معلوم می‌شود  $\sin\alpha\cos\beta=\frac{5}{12}$  و  $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{12}$ . در نتیجه

$$\tan\alpha\cot\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{12}}=5$$

تست ۸

در شکل مقابل مقدار  $\cos(\widehat{BCD})$  کدام است؟



$\frac{32}{85}$  (۴)

$\frac{36}{85}$  (۳)

$\frac{76}{85}$  (۲)

$\frac{84}{85}$  (۱)

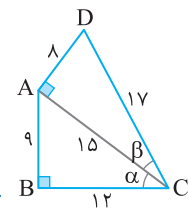
راه حل

توجه کنید که با نمادگذاری شکل مقابل  $\widehat{BCD} = \alpha + \beta$ . از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \Rightarrow AC = 15$$

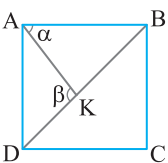
در نتیجه

$$\cos(\widehat{BCD}) = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{12}{15} \times \frac{15}{17} - \frac{9}{15} \times \frac{8}{17} = \frac{180}{255} - \frac{72}{255} = \frac{108}{255} = \frac{36}{85}$$



تست ۹

در شکل مقابل مربع ABCD مقدار  $\cos \beta$  و  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$  کدام است؟



$-\frac{1}{5}$  (۲)

$\frac{1}{5}$  (۱)

$-\frac{\sqrt{2}}{10}$  (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{10}$  (۳)

راه حل

چون ABCD مربع است، پس  $\widehat{ABD} = 45^\circ$ . از طرف دیگر، چون  $\widehat{AKD} = \beta$  برای مثلث  $\widehat{AKB}$  زاویه‌ای خارجی است، پس  $\beta = 45^\circ + \alpha$ . به

این ترتیب

$$\cos \beta = \cos(45^\circ + \alpha) = \cos 45^\circ \cos \alpha - \sin 45^\circ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) \quad (1)$$

توجه کنید که چون  $\alpha$  زاویه حاده است،  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$

همین‌طور  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$ . پس  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ . در نتیجه از تساوی (۱) به‌دست می‌آید  $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$

۹۶

نکته

اگر  $\alpha$  زاویه‌ای دلخواه باشد،

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right), \quad \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

تست ۱۰

اگر  $\sin x = \frac{4+3 \cos x}{3}$ ، مقدار  $\cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$  کدام است؟

$\frac{2\sqrt{2}}{3}$  (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{3}$  (۳)

$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$  (۲)

$-\frac{\sqrt{2}}{3}$  (۱)

راه حل

از فرض سؤال نتیجه می‌شود

$$3 \sin x - 3 \cos x = 4 \Rightarrow \sin x - \cos x = \frac{4}{3}$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

در نتیجه

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

تذکر

عبارت  $a \sin x + b \cos x$  را با فرض اینکه  $\frac{b}{a} = \tan \theta$  و  $\theta$  زاویه‌ای معلوم است، می‌توانیم به صورت  $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta)$  بنویسیم.

همچنین با فرض  $\frac{a}{b} = \tan \alpha$  می‌توانیم آن را به صورت  $\sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$  بنویسیم.

تست

۱۱

مقدار عبارت  $\frac{\sqrt{3} \sin 2^\circ + \cos 2^\circ}{\cos 14^\circ}$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴) -۲

توجه کنید که  $\sqrt{3} = \tan 60^\circ$ . بنابراین

راهحل

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3} \sin 2^\circ + \cos 2^\circ}{\cos 14^\circ} &= \frac{\tan 60^\circ \sin 2^\circ + \cos 2^\circ}{\cos 14^\circ} = \frac{\sin 60^\circ \sin 2^\circ + \cos 2^\circ \cos 60^\circ}{\cos 14^\circ} \\ &= \frac{\sin 60^\circ \sin 2^\circ + \cos 60^\circ \cos 2^\circ}{\cos 60^\circ \cos 14^\circ} = \frac{\cos(60^\circ - 2^\circ)}{\frac{1}{2} \cos 14^\circ} = \frac{2 \cos 4^\circ}{\cos 14^\circ - \cos 4^\circ} = -2 \end{aligned}$$

تست

۱۲

حداقل و حداکثر عبارت  $\sin x + \sqrt{3} \cos x$  به ترتیب کدام است؟

- ۱ (۱) و -۱ (۲)      ۲ (۲) و -۲ (۳)      ۳ (۳) و -۳ (۴)      ۴ (۴)  $\sqrt{3}$  و  $-\sqrt{3}$

ابتدا توجه کنید که  $\sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$ . در نتیجه

راهحل

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sin x + \tan \frac{\pi}{3} \cos x = \sin x + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cos x = \frac{\cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{3} + x)}{\frac{1}{2}} = 2 \sin(\frac{\pi}{3} + x)$$

از طرف دیگر، چون  $-1 \leq \sin(\frac{\pi}{3} + x) \leq 1$ ، پس  $-2 \leq 2 \sin(\frac{\pi}{3} + x) \leq 2$ ، بنابراین  $-2 \leq \sin x + \sqrt{3} \cos x \leq 2$ . بنابراین حداقل مقدار عبارت مورد نظر

برابر ۲- است (که مثلاً به ازای  $x = \frac{7\pi}{6}$  به دست می‌آید) و حداکثر مقدار این عبارت برابر ۲ است (که مثلاً به ازای  $x = \frac{\pi}{6}$  به دست می‌آید).

دست‌گرمی

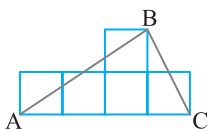
۸۶- حاصل  $\frac{\cos 2^\circ \cos 4^\circ - \sin 2^\circ \sin 4^\circ}{\sin 2^\circ \cos 4^\circ + \sin 4^\circ \cos 2^\circ}$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       ۲ (۲)  $\sqrt{3}$       ۳ (۳) ۱      ۴ (۴)  $\tan 2^\circ$

۸۷- مقدار  $\sin 3x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x$  به ازای  $x = \frac{\pi}{15}$  کدام است؟

- ۱ (۱) صفر      ۲ (۲) ۱      ۳ (۳)  $\frac{1}{2}$       ۴ (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۸۸- در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر ۱ است. مقدار  $\cos(\widehat{ABC})$  کدام است؟



- ۱ (۱)  $\frac{7\sqrt{65}}{65}$       ۲ (۲)  $\frac{\sqrt{65}}{65}$

- ۳ (۳)  $\frac{4}{65}$       ۴ (۴)  $\frac{56}{65}$

۸۹- حاصل عبارت  $\frac{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ}{\cos 2^\circ}$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $\sqrt{2}$       ۲ (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ۳ (۳) ۲      ۴ (۴) ۱

۹۰- حاصل عبارت  $A = \sqrt{3} \sin 15^\circ + \cos 15^\circ$  برابر است با

- ۱ (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       ۲ (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ۳ (۳)  $\sqrt{2}$       ۴ (۴)  $\sqrt{3}$

سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۱)

سؤال	گام
۴۷۱	۹۵
۴۷۲	۷۵ ۹۵
۴۷۳	۹۵
۴۷۴	۹۶
۴۷۵	۷۵ ۹۵
۴۷۶	۹۴ ۹۵
۴۷۷	۹۶
۴۷۸	۹۲ ۹۶
۴۷۹	۹۵
۴۸۰	۹۵

۴۷۱- مقدار  $\sin \frac{\pi}{12}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{4}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

۴۷۲- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه A در ناحیه اول باشد و  $\sin \hat{A} = \frac{3}{5}$  و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه B در ناحیه سوم باشد و

مقدار  $\cos(\hat{A}+\hat{B})$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{12}{65}$  (۲)  $\frac{1}{5}$  (۳)  $\frac{16}{65}$  (۴)  $\frac{1}{13}$

۴۷۳- اگر  $\sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{10}$  و  $\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}$  مقدار  $\sin \alpha \cos \beta$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{5}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{4}{5}$

۴۷۴- مقدار  $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۴۷۵- اگر  $\frac{\pi}{2} < \beta < \alpha < \frac{3\pi}{4}$  و  $\cos(\alpha-\beta) = \frac{12}{13}$  و  $\sin(\alpha+\beta) = -\frac{3}{5}$  مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{14}{65}$  (۲)  $-\frac{16}{65}$  (۳)  $-\frac{56}{65}$  (۴)  $-\frac{8}{65}$

۴۷۶- مقدار  $\frac{\sin 61^\circ \sin 31^\circ + \sin 59^\circ \sin 29^\circ}{\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \sin 18^\circ \cos 12^\circ}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

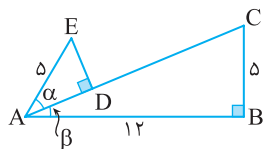
۴۷۷- مقدار عبارت  $A = \sin 15^\circ - \sqrt{3} \cos 15^\circ$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $-\sqrt{2}$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴)  $-\sqrt{3}$

۴۷۸- حاصل  $\frac{\sin(\pi-x) - \cos(\pi+x)}{\cos(x-\frac{\pi}{4})}$  کدام است؟

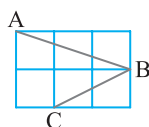
- (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳) ۱ (۴)  $2\sqrt{2}$

۴۷۹- در شکل مقابل  $AD=4$  مقدار  $\cos(\alpha+\beta)$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{27}{65}$  (۲)  $\frac{33}{65}$  (۳)  $\frac{42}{65}$  (۴)  $\frac{47}{65}$

۴۸۰- در شکل روبه‌رو طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر با ۱ است. مقدار  $\cos(\hat{ABC})$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{5}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

آزمون ۴۹

سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۲)

۴۸۱- ساده شده عبارت  $\sin(x+\frac{\pi}{3})-\cos(x+\frac{\pi}{6})$  کدام است؟

- (۱)  $-\cos x$       (۲)  $-\sin x$       (۳)  $\cos x$       (۴)  $\sin x$

۴۸۲- اگر  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ،  $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ ،  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$  و  $\cos \beta = \frac{3}{5}$ ، مقدار  $\sin(\alpha+\beta)$  چند برابر  $\sqrt{5}$  است؟

- (۱)  $\frac{11}{25}$       (۲)  $\frac{1}{5}$       (۳)  $\frac{2}{5}$       (۴)  $\frac{3}{25}$

۴۸۳- اگر  $\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{3}$  و  $\cos(\alpha-\beta) = -\frac{1}{4}$ ، مقدار  $\cos \alpha \cos \beta$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{24}$       (۲)  $\frac{1}{24}$       (۳)  $\frac{1}{12}$       (۴)  $-\frac{1}{12}$

۴۸۴- مقدار  $\sin 55^\circ \cos 65^\circ + \sin 25^\circ \cos 25^\circ$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$       (۲)  $\sqrt{3}$       (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴۸۵- اگر  $\sin(x+\frac{\pi}{4}) = 3 \cos(x+\frac{\pi}{4})$ ، مقدار  $\tan x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$       (۲)  $\frac{1}{3}$       (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴)  $\frac{2}{3}$

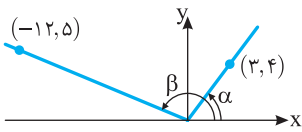
۴۸۶- اگر  $3 \cos x + \sqrt{3} \sin x = 3$ ، مقدار  $\cos(x-\frac{\pi}{6})$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴۸۷- مقدار  $\frac{\cos 10^\circ + \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\cos 50^\circ}$  کدام است؟

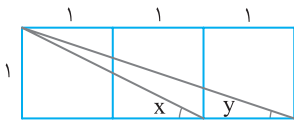
- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (۲)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴) ۲

۴۸۸- در شکل روبه‌رو مقدار  $\sin(\alpha+\beta)$  کدام است؟



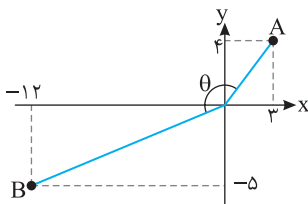
- (۱)  $-\frac{33}{65}$       (۲)  $\frac{63}{65}$       (۳)  $\frac{33}{65}$       (۴)  $-\frac{63}{65}$

۴۸۹- در شکل مقابل سه مربع به ضلع ۱ واحد وجود دارد. مقدار  $\sin(x-y)$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{\sqrt{75}}$       (۲)  $\frac{2}{\sqrt{50}}$       (۳)  $\frac{1}{\sqrt{50}}$       (۴)  $\frac{2}{\sqrt{75}}$

۴۹۰- در شکل مقابل مقدار  $\cos \theta$  کدام است؟



- (۱)  $-\frac{61}{65}$       (۲)  $-\frac{56}{65}$       (۳)  $-\frac{31}{65}$       (۴)  $-\frac{27}{65}$

سؤال	گام
۴۸۱	۹۵
۴۸۲	۷۵ ۹۵
۴۸۳	۹۵
۴۸۴	۹۴ ۹۵
۴۸۵	۹۶
۴۸۶	۹۶
۴۸۷	۹۶
۴۸۸	۹۵
۴۸۹	۹۵
۴۹۰	۹۲ ۹۵



## سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۳)

## آزمون ۵۰

سؤال	گام
۴۹۱	۹۵
۴۹۲	۷۵ ۹۵
۴۹۳	۹۵
۴۹۴	۹۵
۴۹۵	۹۵
۴۹۶	۷۵ ۹۵
۴۹۷	۹۲ ۹۵
۴۹۸	۹۵
۴۹۹	۹۵
۵۰۰	۹۴ ۹۵

۴۹۱- ساده شده عبارت  $A = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$  کدام است؟

$\tan \alpha$  (۱)       $\cot \alpha$  (۲)       $\tan \beta$  (۳)       $\cot \beta$  (۴)

۴۹۲- اگر  $\cos \theta = -\frac{12}{13}$  و  $\theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$  حاصل  $\cos(\theta + \frac{\pi}{4})$  کدام است؟

$-\frac{3\sqrt{2}}{26}$  (۱)       $\frac{3\sqrt{2}}{26}$  (۲)       $\frac{7\sqrt{2}}{26}$  (۳)       $-\frac{7\sqrt{2}}{26}$  (۴)

۴۹۳- اگر  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{8}$  و  $\tan \alpha \tan \beta = 4$  مقدار  $\cos(\alpha + \beta)$  کدام است؟

$\frac{11}{32}$  (۱)       $-\frac{9}{32}$  (۲)       $\frac{15}{32}$  (۳)       $-\frac{15}{32}$  (۴)

۴۹۴- اگر  $x + y = \frac{5\pi}{6}$  مقدار  $(\sin x + \cos y)^2 + (\cos x + \sin y)^2$  کدام است؟

$3$  (۱)       $1$  (۲)       $3$  (۳)       $2 + \sqrt{3}$  (۴)

۴۹۵- اگر  $\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = 1$  حاصل  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$  کدام است؟

$\frac{17}{32}$  (۱)       $\frac{17}{16}$  (۲)       $\frac{15}{32}$  (۳)       $\frac{15}{16}$  (۴)

۴۹۶- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  حاده باشند،  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  و  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$  مقدار  $\sin \beta$  کدام است؟

$\frac{17}{25}$  (۱)       $\frac{3}{5}$  (۲)       $\frac{7}{25}$  (۳)       $\frac{1}{5}$  (۴)

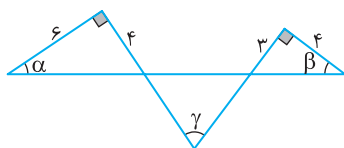
۴۹۷- در مثلث ABC، اگر  $\cos \hat{A} = \frac{3}{5}$  و  $\cos \hat{B} = \frac{1}{3}$  مقدار  $15 \cos \hat{C}$  کدام است؟

$8\sqrt{2} - 3$  (۱)       $8\sqrt{2} + 3$  (۲)       $3 - 8\sqrt{2}$  (۳)       $-3 - 8\sqrt{2}$  (۴)

۴۹۸- اگر  $\sin a = f \sin b \sin(a+b)$  و  $\cos a = -f \cos b \cos(a+b)$  مقدار  $\tan a$  کدام است؟

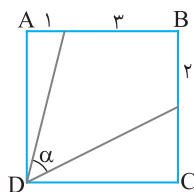
$3$  (۱)       $5$  (۲)       $\frac{1}{5}$  (۳)       $\frac{1}{3}$  (۴)

۴۹۹- در شکل مقابل مقدار  $\sin \gamma$  کدام است؟



$\frac{8}{5\sqrt{13}}$  (۱)       $\frac{2}{5\sqrt{13}}$  (۲)       $\frac{17}{5\sqrt{13}}$  (۳)       $\frac{18}{5\sqrt{13}}$  (۴)

۵۰۰- در شکل مقابل ABCD مربع است. مقدار  $\cos \alpha$  کدام است؟



$\frac{1}{\sqrt{15}}$  (۱)       $\frac{2}{\sqrt{15}}$  (۲)       $\frac{3}{\sqrt{15}}$  (۳)       $\frac{6}{\sqrt{15}}$  (۴)

## آزمون ۵۱

## سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۴)

۵۰۱- اگر  $\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)} = \frac{3}{2}$  و  $\tan a = \frac{1}{5}$ ، مقدار  $\cot b$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $-\frac{1}{5}$  (۳) ۵ (۴) -۱

۵۰۲- اگر  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{4}$ ، حاصل  $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $3\sqrt{2}$  (۳) ۴ (۴)  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

۵۰۳- اگر  $\sin a - \cos b = \frac{2}{3}$  و  $\cos a - \sin b = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ، مقدار  $\sin(a+b)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $-\frac{1}{4}$

۵۰۴- اگر  $\cos x + \cos y = \frac{1}{2}$  و  $\sin x + \sin y = \frac{1}{4}$ ، حاصل  $\cos(x-y)$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{13}{32}$  (۲)  $-\frac{27}{32}$  (۳)  $\frac{27}{32}$  (۴)  $\frac{13}{32}$

۵۰۵- اگر  $k^2 = \sin 28^\circ + \cos 28^\circ$ ، مقدار  $\cos 17^\circ$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{k}{\sqrt{2}}$  (۲)  $\frac{k}{2}$  (۳)  $\frac{k^2}{\sqrt{2}}$  (۴)  $\frac{k^2}{2}$

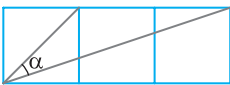
۵۰۶- در مثلث ABC می‌دانیم  $\frac{1}{2} \sin \hat{A} \sin \hat{B} = \cos \hat{A} \cos \hat{B} - \cos \hat{C}$ ، مقدار  $\cos \hat{C}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۵۰۷- در مثلث ABC،  $\sin \hat{A} \sin \hat{B} = \cos \hat{A} \cos \hat{B}$ ، مقدار  $\frac{\cos \hat{B}}{\sin \hat{A}} + \sin \hat{C}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

۵۰۸- در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر با ۱ است. مقدار  $\sin \alpha$  کدام است؟



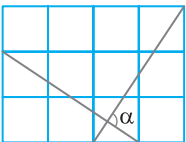
- (۱)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  (۲)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

- (۳)  $\frac{3}{\sqrt{13}}$  (۴)  $\frac{2}{\sqrt{15}}$

۵۰۹- حداقل و حداکثر عبارت  $\sqrt{3} \sin x - \cos x$  به ترتیب کدام است؟

- (۱) ۱ و -۱ (۲) ۲ و -۲ (۳) ۳ و -۳ (۴)  $\sqrt{3}$  و  $-\sqrt{3}$

۵۱۰- در شکل مقابل طول هر ضلع مربع‌های کوچک برابر با ۱ است. مقدار  $\sin \alpha$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $\frac{1}{2}$

- (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴) ۱

سؤال	گام
۵۰۱	۹۵
۵۰۲	۹۶
۵۰۳	۹۵
۵۰۴	۹۵
۵۰۵	۹۵
۵۰۶	۹۲ ۹۵
۵۰۷	۹۴ ۹۵
۵۰۸	۹۴ ۹۵
۵۰۹	۹۶
۵۱۰	۹۵

درس هفتم: سینوس و کسینوس زاویه  $2\alpha$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $2\alpha$

اگر در دستور  $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$  قرار دهیم  $\beta=\alpha$ ، به دست می‌آید  
 $\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$

بنابراین  $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

همین‌طور، اگر در دستور  $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$  قرار دهیم  $\beta=\alpha$ ، به دست می‌آید

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$

بنابراین  $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

اگر در این اتحاد به جای  $\cos^2\alpha$  قرار دهیم  $1-\sin^2\alpha$ ، به دست می‌آید

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$$

همین‌طور، اگر به جای  $\sin^2\alpha$  قرار دهیم  $1-\cos^2\alpha$ ، به دست می‌آید

۹۷

نکته

اگر  $\alpha$  زاویه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه  $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ ،  $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

مثال: اگر  $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ ، آن‌گاه  $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{119}{169}$

تست

۱ اگر  $\sin\alpha=\frac{3}{5}$  و انتهای کمان نظیر زاویه  $\alpha$  در ناحیه دوم دایره مثلثاتی باشد، مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟

۴)  $-\frac{12}{25}$

۳)  $\frac{12}{25}$

۲)  $\frac{24}{25}$

۱)  $-\frac{24}{25}$

ابتدا توجه کنید که  $\cos\alpha$  عددی منفی است. پس

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\frac{9}{25}+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-4}{5}, \cos\alpha=\frac{4}{5} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{3}{5}\times\frac{-4}{5}=-\frac{24}{25}$$

راه‌حل

تست

۲ حاصل عبارت  $\frac{2\cos^2x-\cos 2x}{2\sin^2x+\cos 2x}$  کدام است؟

۴)  $\cot x$

۳)  $\tan x$

۲)  $-1$

۱)  $1$

توجه کنید که  $\cos 2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x$ ، بنابراین

$$\frac{2\cos^2x-\cos 2x}{2\sin^2x+\cos 2x}=\frac{2\cos^2x-(2\cos^2x-1)}{2\sin^2x+(1-2\sin^2x)}=\frac{1}{1}=1$$

راه‌حل

تست

۳ حاصل عبارت  $A=\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}\sin x-1}-\frac{\sqrt{2}\cos 2x}{\sin x+\cos x}+\sqrt{2}\cos x$  کدام است؟

۴)  $2\sqrt{2}\cos x$

۳)  $2\sqrt{2}\sin x$

۲)  $1$

۱)  $-1$

از اتحاد  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$  استفاده می‌کنیم:

راه‌حل

$$A = \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x = \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x$$

$$= \frac{(1 - \sqrt{2} \sin x)(1 + \sqrt{2} \sin x)}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x$$

$$= -1 - \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x = -1$$

تست ۴ حاصل  $\frac{2\sin^2 40^\circ - 1}{\sin 20^\circ}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2\cos 10^\circ}$  (۲)  $-\frac{1}{2\cos 10^\circ}$  (۳)  $2\cos 10^\circ$  (۴)  $-\frac{1}{\cos 10^\circ}$

توجه کنید که  $1 - 2\sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$  و  $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$  بنابراین

راه‌حل

$$\frac{2\sin^2 40^\circ - 1}{\sin 20^\circ} = \frac{-\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 10^\circ)}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{1}{2\cos 10^\circ}$$

تست ۵ مقدار  $\sin 105^\circ \cos 105^\circ$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $-\frac{1}{4}$

ابتدا توجه کنید که  $\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$ ،  $\cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$

راه‌حل

بنابراین  $\sin 105^\circ \cos 105^\circ = -\sin 15^\circ \cos 15^\circ = -\frac{1}{2}(2\sin 15^\circ \cos 15^\circ) = -\frac{1}{2}\sin(2 \times 15^\circ) = -\frac{1}{2}\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

تست ۶ مقدار عبارت  $A = (\cos 75^\circ - \frac{1}{\sin 75^\circ})(\sin 75^\circ - \frac{1}{\cos 75^\circ})$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{11}{4}$  (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳)  $\frac{9}{4}$  (۴)  $2$

می‌توان نوشت

راه‌حل

$$A = (\cos 75^\circ - \frac{1}{\sin 75^\circ})(\sin 75^\circ - \frac{1}{\cos 75^\circ}) = \frac{(\cos 75^\circ \sin 75^\circ - 1)}{\sin 75^\circ} \frac{(\sin 75^\circ \cos 75^\circ - 1)}{\cos 75^\circ}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}\sin 150^\circ - 1)(\frac{1}{2}\sin 150^\circ - 1)}{\sin 75^\circ \cos 75^\circ} \quad \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \rightarrow A = \frac{(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 1)}{\frac{1}{2}\sin 150^\circ} = \frac{(-\frac{3}{4})(-\frac{3}{4})}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{9}{4}$$

تست ۷ مقدار  $\frac{\sin 72^\circ}{\sin 24^\circ} - \frac{\cos 72^\circ}{\cos 24^\circ}$  کدام است؟

- (۱)  $2$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $2\sin 48^\circ$  (۴)  $\frac{1}{2}\sin 48^\circ$

می‌توان نوشت

راه‌حل

$$\frac{\sin 72^\circ}{\sin 24^\circ} - \frac{\cos 72^\circ}{\cos 24^\circ} = \frac{\sin 72^\circ \cos 24^\circ - \cos 72^\circ \sin 24^\circ}{\sin 24^\circ \cos 24^\circ} = \frac{\sin(72^\circ - 24^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 48^\circ} = \frac{2\sin 48^\circ}{\frac{1}{2}\sin 48^\circ} = 2$$

تست ۸ مقدار عبارت  $A = \sin x \cos x(1 - 2\sin^2 x)$  به‌ازای  $x = \frac{\pi}{24}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{8}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{8}$

$$A = \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \times \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

را حل راه ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{4} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{8}$$

بنابراین به ازای  $x = \frac{\pi}{24}$  به دست می‌آید

تست ۹

مقدار عبارت  $\cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{8}$       (۲)  $\frac{1}{4}$       (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

فرض کنید  $A = \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ$ . دو طرف این تساوی را در  $\sin 2^\circ$  ضرب می‌کنیم و از دستور  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  استفاده می‌کنیم:

$$\sin 2^\circ \cdot A = \sin 2^\circ \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ = \frac{1}{2} \sin 4^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \sin 8^\circ \right) \cos 8^\circ = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \sin 16^\circ \right) = \frac{1}{8} \sin 16^\circ$$

اکنون توجه کنید که  $\sin 16^\circ = \sin(18^\circ - 2^\circ) = \sin 2^\circ$ . بنابراین  $\sin 16^\circ = \sin 2^\circ$ . پس  $A = \frac{1}{8}$ .

را حل راه

۹۸

نکته

چون نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های  $30^\circ$  و  $45^\circ$  را می‌دانیم، می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های  $15^\circ$  و  $22.5^\circ$  را حساب کنیم.

مثال: مقدار  $\cos 15^\circ$  را حساب می‌کنیم. اگر در تساوی  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$  قرار دهیم  $\alpha = 15^\circ$ ، به دست می‌آید

$$\cos 30^\circ = 2 \cos^2 15^\circ - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos^2 15^\circ - 1 \Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{3} + 2}}{2}$$

تست ۱۰

اگر  $\sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a}}{2}$ ، مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۵      (۴) ۶

در اتحاد  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$  قرار می‌دهیم  $\alpha = 22.5^\circ$ . در این صورت

$$\cos 45^\circ = 1 - 2 \sin^2 22.5^\circ \Rightarrow \sin^2 22.5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow a = 2$$

را حل راه

۹۹

نکته

اتحادهای  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$  و  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$  را می‌توانیم به صورت‌های زیر نیز بنویسیم:

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha, \quad 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

تست ۱۱

مقدار  $2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{8}$  کدام است؟

- (۱) -۱      (۲) صفر      (۳) ۱      (۴) ۲

توجه کنید که  $2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{8} = 1$ . بنابراین  $2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} = 1 - \cos \frac{5\pi}{8} = 1 - \cos \frac{5\pi}{8}$ .

را حل راه

عبارت‌های  $1 + \sin 2\alpha$  و  $1 - \sin 2\alpha$  را می‌توانیم به صورت مربع کامل بنویسیم:

$$1 \pm \sin 2\alpha = 1 \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2$$

۱۰۰

نکته

$$1 - \sin 2\alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2, \quad 1 + \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$$

تست ۱۲

ساده شده عبارت  $A = \sqrt{1 - \sin 1^\circ} + \sqrt{1 + \sin 1^\circ}$  کدام است؟

- (۱)  $2 \sin 5^\circ$       (۲)  $2 \cos 5^\circ$       (۳)  $\sin 1^\circ$       (۴)  $\cos 1^\circ$

راهحل

ابتدا توجه کنید که  $1 - \sin 10^\circ = (\sin 5^\circ - \cos 5^\circ)^2$  ،  $1 + \sin 10^\circ = (\sin 5^\circ + \cos 5^\circ)^2$  به همین ترتیب

$$A = \sqrt{(\sin 5^\circ - \cos 5^\circ)^2} + \sqrt{(\sin 5^\circ + \cos 5^\circ)^2} = |\sin 5^\circ - \cos 5^\circ| + |\sin 5^\circ + \cos 5^\circ|$$

بنابراین

با توجه به اینکه  $\cos 5^\circ > \sin 5^\circ > 0$  نتیجه می‌شود  $A = -\sin 5^\circ + \cos 5^\circ + \sin 5^\circ + \cos 5^\circ = 2 \cos 5^\circ$

تست

اگر  $\frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x} = 7 - 4\sqrt{3}$  ، مقدار  $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$  کدام است؟

- (۱)  $\pm(\frac{2 - \sqrt{3}}{2})$  (۲)  $\pm(\frac{3 - \sqrt{2}}{2})$  (۳)  $\pm(3 - \sqrt{2})$  (۴)  $\pm(2 - \sqrt{3})$

راهحل

توجه کنید که  $\frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x} = \frac{1 - 2 \sin x \cos x}{1 + 2 \sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} = \frac{(\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$

از طرف دیگر  $7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$  ، در نتیجه  $\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^2 = (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \pm(2 - \sqrt{3})$

مجموع و تفاضل تانژانت و کتانژانت زاویه  $\alpha$  را می‌توانیم برحسب نسبت‌های مثلثاتی  $2\alpha$  بنویسیم:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = -2 \cot 2\alpha$$

نکته

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} , \quad \cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

تست

مقدار  $\tan 75^\circ + \cot 75^\circ$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

راهحل

می‌توان نوشت  $\tan 75^\circ + \cot 75^\circ = \frac{2}{\sin 15^\circ} = \frac{2}{\sin(18^\circ - 3^\circ)} = \frac{2}{\sin 3^\circ} = 4$

توجه کنید که

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin^2 \alpha / \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1} = \sin 2\alpha$$

$$\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{1} = \cos 2\alpha$$

نکته

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} , \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

تست

اگر  $\cot x = \frac{1}{2}$  ، مقدار  $\frac{1 + 2 \cos 2x}{\sin 2x}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $-\frac{1}{8}$  (۴)  $-\frac{1}{16}$
- توجه کنید که  $\tan x = \frac{1}{2} = \frac{1}{\cot x}$  پس  $\frac{1 + 2 \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = -\frac{3}{5}$  و  $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{4}{5}$  ، در نتیجه  $\frac{1 + 2 \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{1}{4}$

راهحل

توجه کنید که

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha \\ \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3(\sin \alpha \cos \alpha)^2 \\ &= 1 - 3 \left( \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \right) = 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} \right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha \end{aligned}$$

۱۰۳

نکته

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha, \quad \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$$

تست ۱۶

اگر  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{9}{16}$  مقدار  $\frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}{\cos 4\alpha}$  کدام است؟

$\frac{-7}{8}$  (۴)       $-\frac{11}{24}$  (۳)       $-\frac{5}{8}$  (۲)       $-\frac{3}{8}$  (۱)

توجه کنید که

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \cos 4\alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \left(-\frac{3}{4}\right)}{-\frac{3}{4}} = -\frac{11}{24}$$

بنابراین

راه حل

### دست گرمی

۹۱- اگر  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  و  $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$  مقدار  $\sin \alpha$  کدام است؟

$-\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)       $-\frac{\sqrt{3}}{6}$  (۳)       $-\frac{\sqrt{6}}{6}$  (۲)       $-\frac{\sqrt{6}}{3}$  (۱)

۹۲- حاصل  $\frac{1 - 2 \sin^2(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos x}$  کدام است؟

$2 \cos x$  (۴)       $\cos x$  (۳)       $2 \sin x$  (۲)       $\sin x$  (۱)

۹۳- مقدار  $\frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ}$  کدام است؟

$4$  (۴)       $16$  (۳)       $9$  (۲)       $1$  (۱)

۹۴- مقدار  $\cos \frac{3\pi}{8}$  کدام است؟

$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$  (۴)       $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$  (۳)       $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$  (۲)       $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$  (۱)

۹۵- مقدار  $3 \cos^2 105^\circ + \sin^2 105^\circ$  کدام است؟

$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$  (۴)       $\sqrt{3}-1$  (۳)       $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$  (۲)       $1+\sqrt{3}$  (۱)

۹۶- مقدار  $\tan 22/5^\circ - \cot 22/5^\circ$  کدام است؟

$-2$  (۴)       $2$  (۳)       $-1$  (۲)       $1$  (۱)

۹۷- ساده شده عبارت  $\frac{\tan 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ}$  کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)       $\frac{1}{2}$  (۳)       $\frac{1}{4}$  (۲)       $\frac{1}{8}$  (۱)

سینوس و کسینوس زاویه  $2\alpha$  (۱)

## آزمون ۵۲

- ۵۱۱- حاصل  $\frac{\cos 2x}{1-\tan^2 x}$  برابر کدام است؟  
 (۱)  $\cos^2 x$  (۲)  $\sin^2 x$  (۳)  $\frac{1}{\cos^2 x}$  (۴)  $\frac{1}{\sin^2 x}$
- ۵۱۲- مقدار  $\cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8}$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- ۵۱۳- مقدار  $\cos 15^\circ \sin 75^\circ$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$  (۲)  $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$
- ۵۱۴- اگر  $\pi < \theta < 2\pi$  و  $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ، مقدار  $\sin 2\theta$  کدام است؟  
 (۱)  $-\frac{24}{25}$  (۲)  $\frac{24}{25}$  (۳)  $\frac{12}{25}$  (۴)  $-\frac{12}{25}$
- ۵۱۵- اگر  $\sin 2\alpha = \frac{1}{4}$ ، مقدار  $\tan \alpha + \cot \alpha$  کدام است؟  
 (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶
- ۵۱۶- اگر  $\cot x = 3$ ، مقدار عبارت  $A = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$  کدام است؟  
 (۱) ۳ (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳) ۹ (۴)  $\frac{1}{9}$
- ۵۱۷- حاصل  $\frac{1-\cos 4^\circ}{\sin 4^\circ}$  برابر کدام است؟  
 (۱)  $\sin 2^\circ$  (۲)  $\cos 2^\circ$  (۳)  $\tan 2^\circ$  (۴)  $\cot 2^\circ$
- ۵۱۸- مقدار  $\frac{\cos 8^\circ}{\cos 4^\circ - \sin 4^\circ} - \sin 4^\circ$  برابر کدام است؟  
 (۱)  $\sin 4^\circ$  (۲)  $\cos 4^\circ$  (۳)  $-\cos 4^\circ$  (۴)  $-\sin 4^\circ$
- ۵۱۹- اگر  $\sin 2x = \frac{1}{3}$ ، مقدار  $A = \sin^2 x + \cos^2 x$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{7}{9}$  (۲)  $\frac{5}{6}$  (۳)  $\frac{1}{9}$  (۴)  $\frac{17}{18}$
- ۵۲۰- اگر  $\frac{\sin^3 x}{2 \sin x - \sin 2x} = \frac{2}{3}$ ، مقدار  $\cos 2x$  کدام است؟  
 (۱)  $-\frac{1}{9}$  (۲)  $\frac{1}{9}$  (۳)  $-\frac{7}{9}$  (۴)  $\frac{7}{9}$

سؤال	گام
۵۱۱	۹۷
۵۱۲	۹۷ ۲۷۶
۵۱۳	۹۴ ۹۷
۵۱۴	۷۵ ۸۲ ۹۷
۵۱۵	۸۲ ۹۷ ۱۰۱
۵۱۶	۹۷ ۹۹
۵۱۷	۹۷
۵۱۸	۹۷ ۲۷۶
۵۱۹	۱۰۳
۵۲۰	۸۲ ۹۷ ۲۷۶



سینوس و کسینوس زاویه  $2\alpha$  (۲)

## آزمون ۵۳

سؤال	گام
۵۲۱	۹۴ ۹۵ ۹۷
۵۲۲	۹۷
۵۲۳	۹۴ ۹۷
۵۲۴	۱۰۲
۵۲۵	۹۷
۵۲۶	۹۴ ۹۷
۵۲۷	۷۵ ۱۰۳
۵۲۸	۹۴ ۹۷
۵۲۹	۹۴ ۹۷
۵۳۰	۹۴ ۹۷ ۱۰۱

- ۵۲۱- مقدار  $\frac{\sin 78^\circ}{\sin 86^\circ} - \frac{\sin 12^\circ}{\sin 4^\circ}$  کدام است؟  
 (۱) ۲ (۲) -۲ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{1}{2}$
- ۵۲۲- مقدار  $\sin \frac{\pi}{12} (2 \cos^2 \frac{\pi}{24} - 1)$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{1}{4}$
- ۵۲۳- مقدار  $\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8}$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{\sqrt{2+2}}{4}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2-2}}{4}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2+1}}{4}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2+2}}{2}$
- ۵۲۴- اگر  $\tan x = \frac{1}{3}$ ، مقدار  $\sin 2x + \cos 2x$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{5}$  (۲)  $\frac{6}{5}$  (۳)  $\frac{7}{5}$  (۴)  $\frac{4}{5}$
- ۵۲۵- اگر  $\cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} = 10$ ، مقدار  $\cos 2\theta$  کدام است؟ ( $\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ )  
 (۱)  $-\frac{71}{81}$  (۲)  $-\frac{79}{81}$  (۳)  $-\frac{7}{9}$  (۴)  $-\frac{1}{3}$
- ۵۲۶- اگر  $\cos 3^\circ = a$ ، مقدار  $\sin 84^\circ$  برحسب  $a$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1-a^2}{2}$  (۲)  $\frac{a^2-1}{2}$  (۳)  $2a^2-1$  (۴)  $1-2a^2$
- ۵۲۷- اگر  $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{2}{3}$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد، مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟  
 (۱)  $-\frac{\sqrt{6}}{3}$  (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$
- ۵۲۸- مقدار  $\frac{\sin 5^\circ \sin 4^\circ}{\cos 1^\circ}$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۲ (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{8}$
- ۵۲۹- اگر  $x = \frac{\pi}{24}$ ، مقدار  $\cos 10x \cos 2x$  کدام است؟  
 (۱) -۱ (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{4}$
- ۵۳۰- مقدار  $\frac{\tan 5^\circ - \tan 4^\circ}{2}$  کدام است؟  
 (۱)  $\tan 1^\circ$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\cot 1^\circ$

سینوس و کسینوس زاویه  $2\alpha$  (۳)

آزمون ۵۴

- ۵۳۱- ساده شده عبارت  $A = \sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{1}{4} \sin 4x$  (۲)  $\frac{1}{2} \sin 2x$  (۳)  $\frac{1}{4} \cos 4x$  (۴)  $\frac{1}{2} \cos 2x$
- ۵۳۲- اگر  $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ ، مقدار  $\sin 2x$  کدام است؟
- (۱)  $-\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $-\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{3}{4}$
- ۵۳۳- اگر  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ، مقدار  $\tan 2\alpha$  کدام است؟ ( $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ )
- (۱)  $\frac{29}{7}$  (۲)  $\frac{24}{7}$  (۳)  $\frac{23}{7}$  (۴)  $\frac{18}{7}$
- ۵۳۴- اگر  $2 \sin x = 5 \cos x$ ، مقدار  $\sin 2x$  کدام است؟
- (۱) صفر (۲)  $\frac{10}{29}$  (۳)  $\frac{20}{29}$  (۴)  $\frac{1}{29}$
- ۵۳۵- اگر  $\sin x = f \sin y$  و  $\cos y = 3 \cos x$ ، مقدار  $\frac{\sin 2x}{\sin 2y}$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{4}{3}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{2}{3}$
- ۵۳۶- اگر  $\sin x - \cos x = \frac{4}{3}$ ، مقدار عبارت  $A = \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos 2x}$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{25}{24}$  (۲)  $-\frac{25}{24}$  (۳)  $1$  (۴)  $\frac{1}{2}$
- ۵۳۷- مقدار  $\frac{\sin^2 11^\circ - \sin^2 2^\circ}{\sin 5^\circ}$  کدام است؟
- (۱) صفر (۲)  $1$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $2$
- ۵۳۸- حاصل  $\frac{1 + \cos 4^\circ}{\cos 55^\circ \cos 35^\circ}$  کدام است؟
- (۱)  $\cos 2^\circ$  (۲)  $2 \cos 2^\circ$  (۳)  $4 \cos 2^\circ$  (۴)  $\frac{1}{2} \cos 2^\circ$
- ۵۳۹- اگر  $\cos a \cos 2a = \frac{1}{16 \sin a}$ ، مقدار  $\cos 8a$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{8}$  (۳)  $\frac{7}{8}$  (۴)  $\frac{3}{4}$
- ۵۴۰- اگر  $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{4}{5}$ ، مقدار  $\cos^2 2x$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{1}{60}$  (۲)  $\frac{59}{60}$  (۳)  $\frac{13}{15}$  (۴)  $\frac{11}{15}$

سؤال	گام
۵۳۱	۹۷
۵۳۲	۹۷
۵۳۳	۷۵ ۸۲ ۹۷
۵۳۴	۸۲ ۹۷ ۱۰۱
۵۳۵	۹۷
۵۳۶	۹۷ ۲۷۵ ۲۷۶ ۲۸۱
۵۳۷	۹۴ ۹۷
۵۳۸	۹۴ ۹۷ ۹۹
۵۳۹	۹۷
۵۴۰	۸۲ ۱۰۳

سینوس و کسینوس زاویه  $2\alpha$  (۴)

سؤال	گام
۵۴۱	۹۵ ۹۷ ۱۰۱
۵۴۲	۷۵ ۹۹
۵۴۳	۷۵ ۹۹
۵۴۴	۱۰۳
۵۴۵	۹۷ ۱۰۱ ۲۷۵
۵۴۶	۷۵ ۱۰۱ ۲۷۶
۵۴۷	۹۴ ۹۷ ۲۷۶
۵۴۸	۸۲ ۹۷ ۱۰۳ ۲۹۶
۵۴۹	۹۷ ۱۰۱ ۲۷۵
۵۵۰	۸۲ ۹۷

- ۵۴۱- مقدار  $\tan 75^\circ - \tan 15^\circ$  کدام است؟  
 (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳)  $3\sqrt{3}$  (۴)  $4\sqrt{3}$
- ۵۴۲- اگر  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  و  $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = 2$ ، مقدار  $\tan x + 2 \cot x$  کدام است؟  
 (۱)  $-\frac{\sqrt{2}}{3}$  (۲)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳)  $-3\sqrt{2}$  (۴)  $-2\sqrt{2}$
- ۵۴۳- مقدار  $A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{\lambda}}}$  کدام است؟  
 (۱)  $2 \sin \frac{\pi}{32}$  (۲)  $2 \cos \frac{\pi}{32}$  (۳)  $\sin \frac{\pi}{32}$  (۴)  $\cos \frac{\pi}{32}$
- ۵۴۴- مقدار  $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{\pi}{12}$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{8}$  (۲)  $\frac{3}{8}$  (۳)  $\frac{5}{8}$  (۴)  $\frac{7}{8}$
- ۵۴۵- مقدار  $\tan^2 \frac{\pi}{8} + \cot^2 \frac{\pi}{8}$  کدام است؟  
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸
- ۵۴۶- اگر  $x$  زاویه‌ای حاده باشد و  $\tan x = \frac{4}{3}$ ، مقدار  $\tan^2 \frac{x}{2} - \cot^2 \frac{x}{2}$  کدام است؟  
 (۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{15}{4}$  (۳)  $-\frac{7}{4}$  (۴)  $-\frac{11}{4}$
- ۵۴۷- حاصل  $\frac{\cos 2^\circ}{\sqrt{2} \cos 1^\circ + 1} + 1$  چند برابر  $\sin 8^\circ$  است؟  
 (۱) ۲ (۲) -۲ (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)  $-\sqrt{2}$
- ۵۴۸- اگر  $\tan \alpha$  و  $\cot \alpha$  جواب‌های معادله  $x^2 - (m+3)x + 2m - 1 = 0$  باشند، مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{8}$
- ۵۴۹- اگر  $\tan^2 x + \cot^2 x = 5$ ، مقدار  $\sin^2 2x$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{4}{7}$  (۳)  $\frac{3}{7}$  (۴)  $\frac{8}{9}$
- ۵۵۰- ساده شده عبارت  $\frac{1 + \sin 4^\circ - \cos 4^\circ}{1 + \sin 4^\circ + \cos 4^\circ}$  کدام است؟  
 (۱)  $\tan 2^\circ$  (۲)  $\cot 2^\circ$  (۳)  $\tan 4^\circ$  (۴)  $\cot 4^\circ$

## درس هشتم: تانژانت مجموع دو زاویه

۱۰۴

## تانژانت مجموع دو زاویه

به کمک روابط مربوط به سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه می‌توانیم تانژانت مجموع دو زاویه را بر حسب تانژانت‌های این دو زاویه حساب کنیم (البته، به شرطی که تانژانت‌ها معنی داشته باشند). در حقیقت،

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

اگر صورت و مخرج کسر آخر را بر  $\cos\alpha\cos\beta$  تقسیم کنیم، به دست می‌آید

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

اگر در این تساوی به جای  $\beta$  قرار دهیم  $-\beta$ ، چون  $\tan(-\beta) = -\tan\beta$ ، نتیجه می‌شود

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

## نکته

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو زاویه باشند، آن‌گاه (به شرطی که عبارت‌ها بامعنی باشند)

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}, \quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

## تست

اگر  $\tan\alpha = \frac{1}{3}$  و  $\tan\beta = -\frac{1}{2}$ ، مقدار  $\tan(\alpha-\beta)$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) -۱      (۳)  $\frac{6}{7}$       (۴)  $\frac{5}{6}$

با توجه به تساوی  $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$ ، مقدار  $\tan(\alpha-\beta)$  را به دست می‌آوریم

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\frac{1}{3} - (-\frac{1}{2})}{1 + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

## راه‌حل

## تست

اگر  $\tan a = \frac{1}{3}$  و  $\tan b = \frac{1}{2}$ ، مقدار  $a+b$  برابر می‌تواند باشد؟

- (۱)  $\frac{3\pi}{4}$       (۲)  $\frac{5\pi}{4}$       (۳)  $\frac{7\pi}{4}$       (۴)  $\frac{11\pi}{4}$

توجه کنید که

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = 1$$

## راه‌حل

بنابراین  $a+b$  می‌تواند برابر  $\frac{5\pi}{4}$  باشد، تانژانت بقیه گزینه‌ها برابر -۱ است.

## تست

اگر  $\tan(a-\frac{b}{2}) = 2$  و  $\tan(a+\frac{b}{2}) = 3$ ، مقدار  $\cot b$  کدام است؟

- (۱) ۴      (۲) ۵      (۳) ۷      (۴) ۸

فرض کنید  $\alpha = a - \frac{b}{2}$  و  $\beta = a + \frac{b}{2}$ . در این صورت  $b = \beta - \alpha$  و در نتیجه

$$\tan b = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{3 - 2}{1 + 3 \times 2} = \frac{1}{7} \Rightarrow \cot b = 7$$

## راه‌حل

**تست ۴**

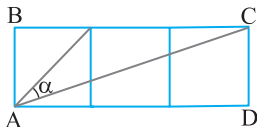
 اگر  $\tan(x + \frac{\pi}{6}) = 3$ ، مقدار  $\tan(x - \frac{\pi}{12})$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $-1$       (۳)  $1$       (۴)  $-\frac{1}{2}$

**راه حل**

توجه کنید که  $x - \frac{\pi}{12} = (x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{4}$  بنابراین  $\tan(x - \frac{\pi}{12}) = \tan((x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan(x + \frac{\pi}{6}) - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan(x + \frac{\pi}{6}) \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{3 - 1}{1 + 3 \times 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

**تست ۵**

 شکل مقابل از سه مربع به طول ضلع ۱ درست شده است. مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟


- (۱)  $1$       (۲)  $\frac{1}{3}$       (۳)  $\frac{2}{3}$       (۴)  $\frac{1}{2}$

**راه حل**

 توجه کنید با نمادگذاری شکل مقابل  $\alpha = \theta - \beta$ ،  $\tan \theta = 1$  و  $\tan \beta = \frac{1}{3}$  پس

$$\tan \alpha = \tan(\theta - \beta) = \frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \tan \beta} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

**تست ۶**

 حاصل عبارت  $A = \tan 1^\circ + \tan 35^\circ + \tan 1^\circ \tan 35^\circ$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $1$       (۳)  $-1$       (۴)  $-\frac{1}{2}$

**راه حل**

 چون عبارت‌های  $\tan \alpha + \tan \beta$  و  $\tan \alpha \tan \beta$  در عبارت A وجود دارند، از بسط  $\tan(\alpha + \beta)$  استفاده می‌کنیم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \xrightarrow[\beta = 35^\circ]{\alpha = 1^\circ} \tan 45^\circ = \frac{\tan 1^\circ + \tan 35^\circ}{1 - \tan 1^\circ \tan 35^\circ}$$

$$1 = \frac{\tan 1^\circ + \tan 35^\circ}{1 - \tan 1^\circ \tan 35^\circ} \Rightarrow 1 - \tan 1^\circ \tan 35^\circ = \tan 1^\circ + \tan 35^\circ \Rightarrow 1 = \tan 1^\circ + \tan 35^\circ + \tan 1^\circ \tan 35^\circ$$

 بنابراین  $A = 1$ .

**تست ۷**

 مقدار عبارت  $A = (1 + \cot 72^\circ)(1 - \tan 18^\circ)$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$       (۲)  $2$       (۳)  $2\sqrt{2}$       (۴)  $4$

**راه حل**

توجه کنید که

$$A = (1 + \cot(90^\circ - 18^\circ))(1 - \tan(18^\circ - 27^\circ)) = (1 + \tan 18^\circ)(1 + \tan 27^\circ) = 1 + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ + \tan 18^\circ \tan 27^\circ$$

$$\tan 45^\circ = \tan(18^\circ + 27^\circ) = \frac{\tan 18^\circ + \tan 27^\circ}{1 - \tan 18^\circ \tan 27^\circ} = 1 \Rightarrow \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1 - \tan 18^\circ \tan 27^\circ$$

از طرف دیگر،

$$A = 1 + 1 + 2 = 2 \text{ بنابراین } \tan 18^\circ + \tan 27^\circ + \tan 18^\circ \tan 27^\circ = 1$$

اگر در رابطه  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$  قرار دهیم  $\alpha = \beta$ ، به دست می‌آید  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

**نکته**

 به شرطی که تانژانت‌ها با معنی باشند،  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

تست ۸

اگر  $\sin x - 2 \cos x = 0$ ، مقدار  $\tan 2x$  کدام است؟

$$-\frac{4}{5} \quad (۴)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۱)$$

$$\sin x - 2 \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = 2 \cos x \Rightarrow \tan x = 2$$

ابتدا توجه کنید که

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \times 2}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$$
 بنابراین

راه حل

تست ۹

اگر  $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$  و انتهای کمان  $x$  در ربع چهارم باشد، مقدار  $\tan 2x$  کدام است؟

$$-\frac{1}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۱)$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = 5 \Rightarrow \tan^2 x = 4 \Rightarrow \tan x = \pm 2$$

مقدار  $\tan x$  را حساب می‌کنیم:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{4}{3}$$
 بنابراین  $\tan x = -2$  پس  $\tan x = -2$  در نتیجه، چون انتهای کمان  $x$  در ربع چهارم است، پس

راه حل

تست ۱۰

اگر  $\alpha$  زاویه‌ای حاده باشد و  $\tan 2\alpha = \frac{3}{4}$ ، مقدار  $\sin \alpha$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{10}}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{3\sqrt{10}}{10} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{10}}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

ابتدا توجه کنید که  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$  و چون  $\tan 2\alpha = \frac{3}{4}$ ، پس

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{3}{4} \Rightarrow 8 \tan \alpha = 3 - 3 \tan^2 \alpha \Rightarrow 3 \tan^2 \alpha + 8 \tan \alpha - 3 = 0 \Rightarrow (3 \tan \alpha - 1)(\tan \alpha + 3) = 0$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}, \tan \alpha = -3 \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است}} \tan \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$
 به این ترتیب  $\cot \alpha = 3$  و  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{10} = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{1+\cot^2 \alpha}$  چون  $\alpha$  حاده است، پس

راه حل

اگر در رابطه  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$  قرار دهیم  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  و  $\beta = x$ ، چون  $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ ، نتیجه می‌شود

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan x} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

اگر در این تساوی به جای  $x$  قرار دهیم  $-x$ ، به دست می‌آید  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ 

۱۰۵

نکته

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$$

به شرطی که تانژانت‌ها بامعنی باشند،

تست ۱۱

حاصل عبارت  $B = \frac{\cot 75^\circ + 1}{\cot 75^\circ - 1}$  کدام است؟

$$\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۳)$$

$$-\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۱)$$

ابتدا توجه کنید که  $\cot 75^\circ = \tan 15^\circ$  چون  $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ ، پس

$$B = \frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} = \tan(45^\circ + 15^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

راه حل

## دست‌گرمی

۹۸- اگر  $\tan(\frac{\pi}{4}+x)=7$  و  $x$  زاویه حاده باشد. مقدار  $\sin x$  کدام است؟

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{5} \quad (۱)$$

۹۹- مقدار  $\tan 285^\circ$  کدام است؟

$$-1-\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$1-\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$-2-\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$2-\sqrt{3} \quad (۱)$$

۱۰۰- اگر  $\tan(a+b)=3$  و  $\tan(a-b)=-4$  مقدار  $\cot 2b$  کدام است؟

$$-13 \quad (۴)$$

$$-\frac{1}{13} \quad (۳)$$

$$-\frac{7}{11} \quad (۲)$$

$$-\frac{11}{7} \quad (۱)$$

۱۰۱- اگر  $\cot(\alpha+35^\circ)=2$  مقدار  $\tan(1^\circ-\alpha)$  کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$4 \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$3 \quad (۱)$$

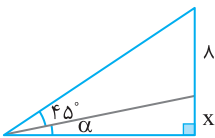
۱۰۲- در شکل مقابل  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$  مقدار  $x$  کدام است؟

$$1/5 \quad (۱)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1/6 \quad (۳)$$

$$2/5 \quad (۴)$$



## آزمون ۵۶

## تانژانت مجموع دو زاویه (۱)

۵۵۱- مقدار  $\tan \frac{\pi}{12}$  کدام است؟

- (۱)  $2-\sqrt{3}$  (۲)  $3-\sqrt{2}$  (۳)  $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$  (۴)  $\frac{3+\sqrt{2}}{4}$

۵۵۲- اگر  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$  و  $\tan \beta = \frac{1}{4}$  مقدار  $\tan(\alpha+\beta)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{7}$  (۲)  $\frac{6}{7}$  (۳)  $\frac{4}{5}$  (۴)  $\frac{3}{5}$

۵۵۳- اگر  $\tan \alpha = m$ ،  $\tan \beta = \frac{2}{m}$  و  $\tan(\alpha+\beta) = 3 - \frac{2}{m}$  مقدار  $\tan(\alpha-\beta)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{7}{9}$  (۲)  $\frac{5}{9}$  (۳)  $\frac{-7}{9}$  (۴)  $\frac{-5}{9}$

۵۵۴- اگر  $\tan \alpha$  و  $\tan \beta$  جواب‌های معادله  $x^2 - 5x - 2 = 0$  باشند، مقدار  $\tan(\alpha+\beta)$  کدام است؟

- (۱)  $-5$  (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳)  $\frac{5}{3}$  (۴)  $5$

۵۵۵- حاصل عبارت  $A = \frac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $-\sqrt{3}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۵۵۶- اگر  $\tan(\delta^\circ + \alpha) = \frac{1}{3}$  مقدار  $\tan(\delta^\circ + \alpha)$  کدام است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

۵۵۷- مقدار  $(1+\tan 20^\circ)(1+\tan 70^\circ)$  کدام است؟

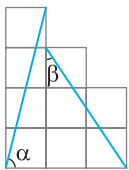
- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

۵۵۸- در مثلث  $ABC$ ،  $\cot \hat{A} = 3$  و  $\cot \hat{B} = \frac{1}{2}$  مقدار  $\tan \hat{C}$  کدام است؟

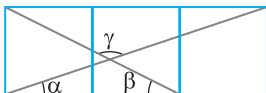
- (۱)  $-6$  (۲)  $7$  (۳)  $6$  (۴)  $-7$

۵۵۹- در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌ها برابر یک واحد است. مقدار  $\tan(\alpha+\beta)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{14}{11}$  (۲)  $\frac{-14}{5}$  (۳)  $\frac{13}{11}$  (۴)  $\frac{-13}{5}$

۵۶۰- شکل مقابل از سه مربع به طول ضلع ۱ درست شده است. اندازه  $\gamma$  کدام است؟

- (۱)  $105^\circ$  (۲)  $120^\circ$  (۳)  $135^\circ$  (۴)  $150^\circ$



سؤال	گام
۵۵۱	۱۰۵
۵۵۲	۱۰۴
۵۵۳	۱۰۴
۵۵۴	۱۰۴ ۲۹۶
۵۵۵	۱۰۵
۵۵۶	۱۰۵
۵۵۷	۱۰۴
۵۵۸	۹۲ ۱۰۴
۵۵۹	۱۰۴
۵۶۰	۱۰۴

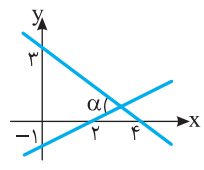


تانژانت مجموع دو زاویه (۲)

آزمون ۵۷

سؤال	گام
۵۶۱	۱۰۵
۵۶۲	۱۰۴
۵۶۳	۱۰۵
۵۶۴	۱۰۴ ۲۹۶
۵۶۵	۹۴ ۱۰۴
۵۶۶	۱۰۴
۵۶۷	۱۰۴
۵۶۸	۹۲ ۱۰۴
۵۶۹	۱۰۴
۵۷۰	۱۰۱ ۱۰۴

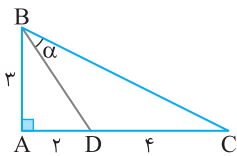
- ۵۶۱- مقدار  $\tan 105^\circ$  کدام است؟  
 (۱)  $2-\sqrt{3}$  (۲)  $-2-\sqrt{3}$  (۳)  $1-\sqrt{3}$  (۴)  $-1-\sqrt{3}$
- ۵۶۲- اگر  $\tan \alpha = 2$  و  $\tan(\alpha - \beta) = 3$ ، مقدار  $\tan \beta$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{7}$  (۲)  $-1$  (۳)  $\frac{5}{7}$  (۴)  $-\frac{1}{7}$
- ۵۶۳- اگر  $\tan(x - \frac{\pi}{4}) = 4$ ، مقدار  $\tan x$  کدام است؟  
 (۱)  $-\frac{5}{3}$  (۲)  $-\frac{3}{5}$  (۳)  $\frac{5}{3}$  (۴)  $\frac{3}{5}$
- ۵۶۴- اگر  $\cot \alpha$  و  $\cot \beta$  جوابهای معادله  $x^2 - 6x - 2 = 0$  باشند، مقدار  $\cot(\alpha + \beta)$  کدام است؟  
 (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $-2$  (۳)  $2$  (۴)  $\frac{1}{2}$
- ۵۶۵- مقدار  $\frac{\tan 5^\circ - \cot 5^\circ}{1 + \tan 5^\circ \cot 5^\circ}$  برابر کدام است؟  
 (۱)  $\tan 10^\circ$  (۲)  $\tan 20^\circ$  (۳)  $\cot 10^\circ$  (۴)  $\cot 40^\circ$
- ۵۶۶- اگر  $\tan \alpha \tan \beta = \frac{-1}{3}$  و  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ، مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟ (زاویه حاده‌ای است).  
 (۱)  $\frac{2+\sqrt{7}}{3}$  (۲)  $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$  (۳)  $\frac{2+\sqrt{7}}{6}$  (۴)  $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$
- ۵۶۷- اگر  $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ ، مقدار عبارت  $A = (1 - \tan \alpha)(1 - \tan \beta)$  کدام است؟  
 (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $-1$  (۴)  $-2$
- ۵۶۸- اگر  $2x + 3y = 90^\circ$ ،  $\tan x = 2$  و  $\tan y = 3$ ، مقدار  $\tan(\delta x + \gamma y)$  کدام است؟  
 (۱)  $-1$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $-\frac{1}{3}$  (۴)  $-\frac{1}{6}$
- ۵۶۹- در شکل مقابل مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟  
 (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $4$  (۴)  $3$
- ۵۷۰- اگر  $\tan x - \cot x = \frac{1}{2}$ ، مقدار  $\tan 4x$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{8}{15}$  (۲)  $\frac{3}{10}$  (۳)  $-\frac{7}{12}$  (۴)  $\frac{9}{7}$



تانژانت مجموع دو زاویه (۳)

آزمون ۵۸

- ۵۷۱- مقدار  $\tan \frac{5\pi}{12}$  کدام است؟  
 (۱)  $2+\sqrt{3}$  (۲)  $3+\sqrt{2}$  (۳)  $2+\sqrt{2}$  (۴)  $3+\sqrt{3}$
- ۵۷۲- اگر  $\tan a - \tan b = 2$  و  $\cot a \cot b = 3$ ، مقدار  $\cot(a-b)$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳) ۳ (۴)  $\frac{3}{2}$
- ۵۷۳- اگر  $\cos x = \frac{3}{5}$  و  $x$  زاویه‌ای حاده باشد، مقدار  $\tan(\frac{\pi}{4}+x)$  کدام است؟  
 (۱) ۷ (۲) -۷ (۳)  $\frac{1}{7}$  (۴)  $-\frac{1}{7}$
- ۵۷۴- اگر  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ،  $0 < y < \pi$ ،  $\sin x = \frac{3}{5}$  و  $\sin y = \frac{5}{13}$ ، مقدار  $\tan(x+y)$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{23}{63}$  (۲)  $\frac{20}{63}$  (۳)  $\frac{17}{63}$  (۴)  $\frac{16}{63}$
- ۵۷۵- اگر  $\tan(x+\frac{\pi}{4}) = 2$ ، مقدار  $\tan(x+\frac{\pi}{6})$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{6-5\sqrt{3}}{3}$  (۲)  $\frac{6+5\sqrt{3}}{3}$  (۳)  $\frac{6+5\sqrt{3}}{13}$  (۴)  $\frac{6-5\sqrt{3}}{13}$
- ۵۷۶- اگر  $\alpha - \beta = \frac{7\pi}{4}$  و  $\tan \alpha \tan \beta = -6$ ، مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟  
 (۱) ۲ یا -۳ (۲) -۲ یا ۳ (۳) ۲ یا ۳ (۴) ۴ یا ۱
- ۵۷۷- حاصل  $\tan 25^\circ \tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 20^\circ$  کدام است؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۵۷۸- اگر  $\sin(\alpha+\beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$  و  $\tan \alpha \tan \beta = -3$ ، مقدار  $\tan(\alpha+\beta)$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $-\frac{3}{2}$  (۴)  $-\frac{2}{3}$
- ۵۷۹- اگر  $\tan \alpha = 3$  و  $\tan(\alpha+\beta) = -1$ ، مقدار  $\tan 2\beta$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $-\frac{3}{2}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $-\frac{4}{3}$
- ۵۸۰- در شکل مقابل مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{7}$  (۲)  $\frac{2}{7}$  (۳)  $\frac{3}{7}$  (۴)  $\frac{4}{7}$



سؤال	گام
۵۷۱	۱۰۵
۵۷۲	۷۵ ۱۰۴
۵۷۳	۷۵ ۱۰۵
۵۷۴	۷۵ ۱۰۴
۵۷۵	۱۰۴ ۱۰۵
۵۷۶	۱۰۴
۵۷۷	۱۰۴
۵۷۸	۹۵ ۱۰۴
۵۷۹	۱۰۴
۵۸۰	۱۰۴

تانژانت مجموع دو زاویه (۴)

سؤال	گام
۵۸۱	۱۰۴
۵۸۲	۱۰۴
۵۸۳	۱۰۴
۵۸۴	۱۰۵
۵۸۵	۱۰۵
۵۸۶	۱۰۴
۵۸۷	۱۰۴
۵۸۸	۱۰۵
۵۸۹	۱۰۴
۵۹۰	۹۴ ۱۰۴

۵۸۱- کدام یک برابر  $\cot(\alpha+\beta)$  است؟

(۱)  $\frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \alpha - \cot \beta}$  (۲)  $\frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$  (۳)  $\frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha - \cot \beta}$  (۴)  $\frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$

۵۸۲- اگر  $\cot \alpha - \cot \beta = 2$  و  $\tan \alpha \tan \beta = 3$ ، مقدار  $\tan(\alpha - \beta)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $-\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $-\frac{3}{2}$

۵۸۳- اگر  $\tan(\alpha + \beta) = -2$  و  $\tan(\alpha - \beta) = 3$ ، مقدار  $\tan 2\alpha$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{7}$  (۲)  $\frac{5}{7}$  (۳)  $-\frac{1}{7}$  (۴)  $-\frac{5}{7}$

۵۸۴- مقدار  $\frac{\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4})}{\cot(x + \frac{\pi}{4}) + \cot(x - \frac{\pi}{4})}$  کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) -۱

۵۸۵- اگر  $\tan(\alpha + \frac{5\pi}{36}) = \frac{1}{2}$ ، مقدار  $\tan(\frac{\pi}{9} - \alpha)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{4}{5}$

۵۸۶- مقدار  $\tan 40^\circ + 2 \tan 10^\circ$  کدام است؟

(۱)  $\tan 50^\circ$  (۲)  $2 \tan 50^\circ$  (۳)  $\frac{\tan 50^\circ}{2}$  (۴)  $\frac{\tan 50^\circ}{3}$

۵۸۷- مقدار  $\tan 20^\circ - \tan 80^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 80^\circ$  کدام است؟

(۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $-\sqrt{3}$  (۳)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۵۸۸- اگر  $\frac{1}{2} \leq \tan \alpha < 1$ ، حداقل مقدار  $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$  کدام است؟

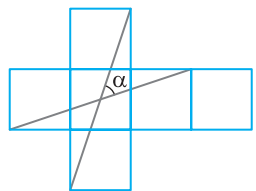
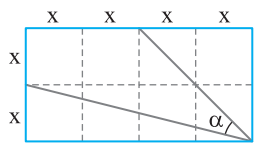
(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۵۸۹- در شکل مقابل مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟

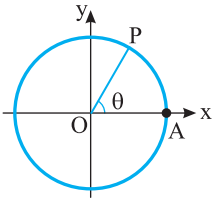
(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{3}{5}$

۵۹۰- شکل مقابل از شش مربع به طول ضلع ۱ درست شده است. مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳) ۱ (۴)  $\frac{4}{3}$



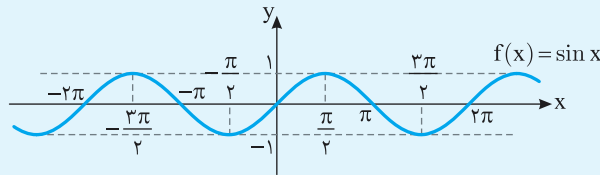
درس نهم: توابع مثلثاتی



فرض کنید در دایره مثلثاتی شعاع OA را به اندازه  $\theta$  رادیان دوران دهیم. در این صورت، مسافتی را که نقطه A روی دایره طی کرده است (طول AP) با در نظر گرفتن علامت  $\theta$  با  $x$  نشان می‌دهیم. یعنی اگر جهت دوران مثبت باشد،  $x$  را مثبت و اگر جهت دوران منفی باشد،  $x$  را منفی می‌گیریم. در این صورت  $x = \theta$ ، که در این جا  $x$  عددی حقیقی است (معلوم است که اگر  $\theta = 0$ ، آن گاه  $x = 0$ ). به این ترتیب می‌توانیم سینوس عدد حقیقی  $x$  را برابر با  $\sin \theta$  تعریف کنیم. به همین ترتیب می‌توانیم کسینوس عدد حقیقی  $x$  را برابر با  $\cos \theta$  تعریف کنیم. به تابعی که به عدد حقیقی  $x$  سینوس آن را نسبت می‌دهد تابع سینوس و به تابعی که به عدد حقیقی  $x$  کسینوس آن را نسبت می‌دهد تابع کسینوس می‌گویند. این توابع را به ترتیب با  $\sin$  و  $\cos$  نشان می‌دهیم. توجه کنید که دامنه این توابعها مجموعه اعداد حقیقی است.

ویژگی‌های تابع سینوس

نمودار تابع سینوس در شکل زیر رسم شده است.



(۱) از روی نمودار معلوم است که  $R_f = [-1, 1]$ .

(۲) صفرهای تابع  $f$  نقطه‌های با طول  $x = k\pi$  هستند، که در این جا  $k$  هر عدد صحیحی می‌تواند باشد.

(۳) کمترین مقدار تابع  $f$  برابر با  $-1$  است که در نقطه‌های با طول  $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$  پیش می‌آید ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

(۴) بیشترین مقدار تابع  $f$  برابر با  $1$  است که در نقطه‌های با طول  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$  پیش می‌آید ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

(۵) از روی نمودار معلوم است که تابع  $f$  غیریکنواست، ولی روی هر بازه به صورت  $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$  اکیداً صعودی و روی هر بازه به صورت

$[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$  اکیداً نزولی است ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

اگر نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = 2a - b \sin x$  محور عرض‌ها را در نقطه  $4$  و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول  $\frac{\pi}{6}$  قطع

تست ۱

کند، مقدار  $a+b$  کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

نمودار تابع از نقاط  $(0, 4)$  و  $(\frac{\pi}{6}, 0)$  عبور می‌کند. پس

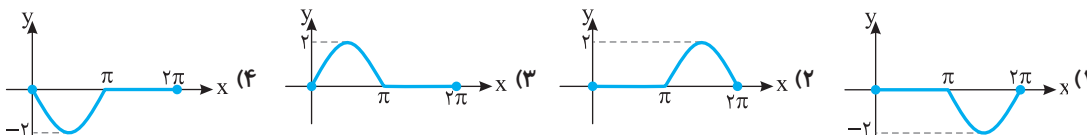
راه‌حل

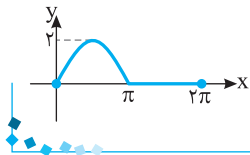
$$f(0) = 4 \Rightarrow 2a - b \sin 0 = 4 \Rightarrow a = 2, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow 2a - b \sin \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow 2a - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = 4a = 8$$

بنابراین  $a+b=10$ .

نمودار تابع  $f(x) = \sin x + |\sin x|$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

تست ۲



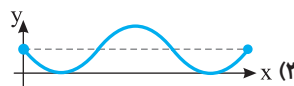
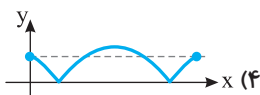
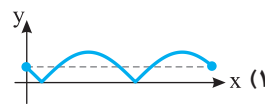
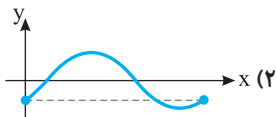


توجه کنید که اگر  $0 \leq x \leq \pi$ ، آن گاه  $\sin x \geq 0$ ، پس  $f(x) = \sin x + \sin x = 2 \sin x$ ، از طرف دیگر، اگر  $\pi < x \leq 2\pi$ ، آن گاه  $\sin x \leq 0$ ، در نتیجه  $f(x) = \sin x - \sin x = 0$ ، بنابراین نمودار تابع  $f$  به شکل روبه‌رو است.

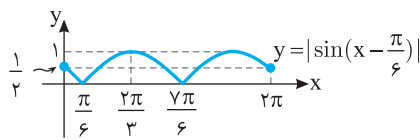
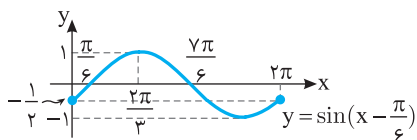
راه‌حل

تست ۳

نمودار تابع  $y = |\sin(x - \frac{\pi}{6})|$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟



ابتدا نمودار تابع  $y = \sin x$  را به اندازه  $\frac{\pi}{6}$  واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $y = \sin(x - \frac{\pi}{6})$  به دست آید. سپس قرینه قسمت‌هایی را که پایین محور  $x$  هاست، نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم و در آخر قسمت‌هایی را که پایین محور  $x$  است، حذف می‌کنیم، تا نمودار تابع  $y = |\sin(x - \frac{\pi}{6})|$  به دست آید.



راه‌حل

تست ۴

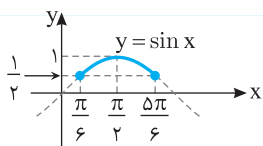
برد تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{\sin x + 2}$  و دامنه  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$  کدام است؟

(۴)  $[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}]$

(۳)  $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

(۲)  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]$

(۱)  $[\frac{1}{3}, 1]$



ابتدا توجه کنید که از روی نمودار تابع  $y = \sin x$  معلوم می‌شود که

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{5}{2} \leq \sin x + 2 \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sin x + 2} \leq \frac{2}{5} \Rightarrow R_f = [\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]$$

راه‌حل

تست ۵

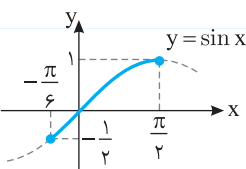
برد تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sin^2 x - \sin x$  و دامنه  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$  کدام است؟

(۴)  $[-\frac{1}{4}, 1]$

(۳)  $[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$

(۲)  $[-\frac{1}{4}, 0]$

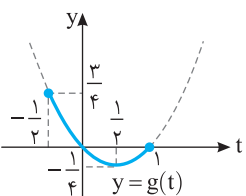
(۱)  $[0, 2]$



ابتدا توجه کنید که از روی نمودار تابع  $y = \sin x$  معلوم می‌شود که  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  در نتیجه  $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$ .

راه‌حل

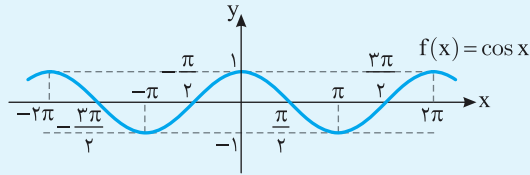
بنابراین اگر فرض کنیم  $\sin x = t$ ، باید برد تابع  $g(t) = t^2 - t$  را با دامنه  $[-\frac{1}{2}, 1]$  پیدا کنیم. از روی نمودار



این تابع معلوم می‌شود که  $R_g = [-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ .

## ویژگی‌های تابع کسینوس

نمودار تابع کسینوس در شکل زیر رسم شده است:



(۱) از روی نمودار معلوم است که  $R_f = [-1, 1]$ .

(۲) صرفه‌های تابع  $f$  نقطه‌های با طول  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  هستند، که در این جا  $k$  هر عدد صحیحی می‌تواند باشد.

(۳) کمترین مقدار تابع  $f$  برابر با  $-1$  است که در نقطه‌های با طول  $x = (2k+1)\pi$  پیش می‌آید ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

(۴) بیشترین مقدار تابع  $f$  برابر با  $1$  است که در نقطه‌های با طول  $x = 2k\pi$  پیش می‌آید ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

(۵) از روی نمودار معلوم است که تابع  $f$  غیریکنواست، ولی روی هر بازه به صورت  $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$  اکیداً صعودی و روی هر بازه به صورت  $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$  اکیداً نزولی است ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

## تست ۶

اگر  $A$  و  $B$  به ترتیب نقطه‌های ماکزیمم و مینیمم تابع  $f(x) = 2 \cos \pi x$  روی بازه  $[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$  باشند، طول پاره‌خط  $AB$  کدام است؟

(۴)  $\sqrt{17}$

(۳)  $2\sqrt{2}$

(۲)  $\sqrt{3}$

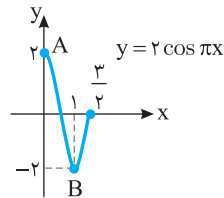
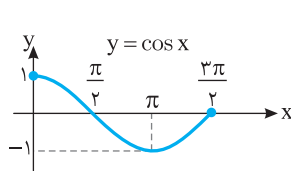
(۱)  $\sqrt{5}$

## راه‌حل

اگر در نمودار تابع  $y = \cos x$  روی بازه  $[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$  طول نقطه‌ها را بر  $\pi$  تقسیم کنیم و عرض نقطه‌ها را در  $2$  ضرب کنیم، نمودار تابع  $f$  مانند شکل

زیر به دست می‌آید. بنابراین  $A$  نقطه  $(0, 2)$  و  $B$  نقطه  $(1, -2)$  است، پس

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{17}$$



## تست ۷

اگر  $\cos x = \frac{2m+1}{4}$  و  $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ ، مجموعه مقادیر  $m$  کدام است؟

(۴)  $[-\frac{5}{2}, \frac{2\sqrt{2}-1}{2}]$

(۳)  $[-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}]$

(۲)  $[-\frac{5}{2}, -\frac{2\sqrt{2}+1}{2}]$

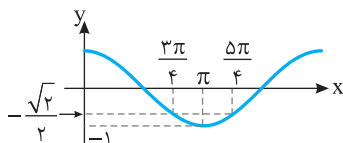
(۱)  $[-\frac{2\sqrt{2}-1}{2}, \frac{2\sqrt{2}-1}{2}]$

## راه‌حل

از روی نمودار تابع  $y = \cos x$  در شکل زیر معلوم است که اگر  $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ ، آن‌گاه  $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x < -1$ . بنابراین

$$-1 \leq \frac{2m+1}{4} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -4 \leq 2m+1 < -2\sqrt{2}$$

$$-5 \leq 2m < -2\sqrt{2}-1 \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq m < -\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$$



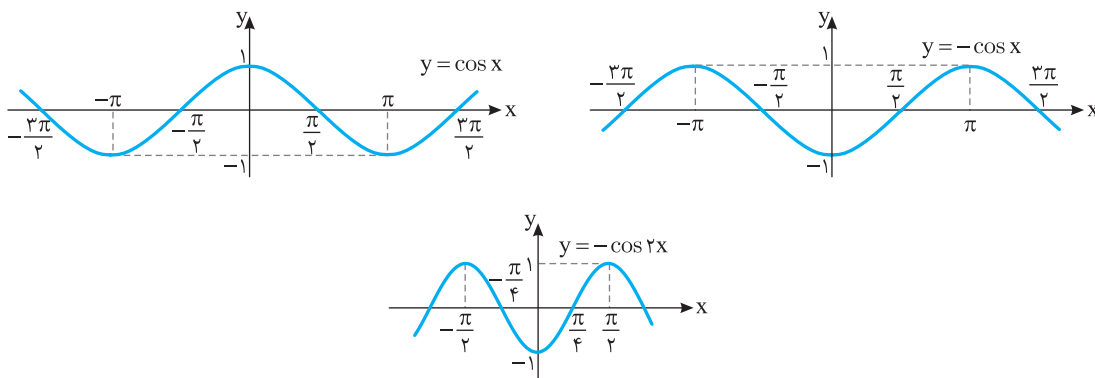
تست ۸

تابع  $f(x) = -\cos 2x$  روی بازه  $[a, 0]$  اکیداً نزولی است. حداقل مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{\pi}{4}$       (۲)  $-\frac{\pi}{3}$       (۳)  $-\frac{\pi}{2}$       (۴)  $-\pi$

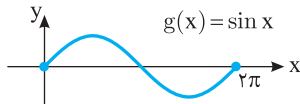
راه حل

اگر نمودار تابع  $y = \cos x$  را رسم کنیم و نسبت به محور طول‌ها فرینه کنیم، نمودار تابع  $y = -\cos x$  به دست می‌آید. اگر طول هر نقطه از این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع  $y = -\cos 2x$  به دست می‌آید (شکل‌ها را ببینید). تابع  $f$  روی بازه  $[-\frac{\pi}{2}, 0]$  اکیداً نزولی است، پس حداقل مقدار  $a$  برابر  $-\frac{\pi}{2}$  است.

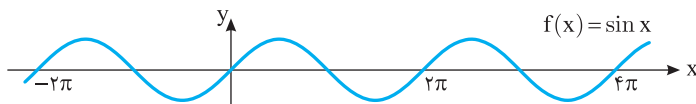


تابع متناوب

نمودار تابع  $g(x) = \sin x$  روی بازه  $[0, 2\pi]$  به شکل مقابل است.



نمودار تابع  $f(x) = \sin x$  با دامنه  $\mathbb{R}$  به شکل زیر است:



از روی این نمودار معلوم است که نمودار تابع  $f$  روی بازه‌های  $[0, 2\pi]$ ،  $[-2\pi, 0]$ ،  $[2\pi, 4\pi]$  و  $[4\pi, 2\pi]$  مانند هم است. در حقیقت، نمودار تابع  $f$  از تکرار نمودار تابع  $g$  به دست آمده است. اگر نمودار تابعی از تکرار قسمتی از آن به دست بیاید، می‌گوییم این تابع متناوب است. نمودار تابع  $f$  از تکرار نمودار تابع  $g$  به دست آمده چون نمودار تابع  $g$  روی بازه‌ای به طول  $2\pi$  رسم شده است، پس می‌گوییم دوره تناوب تابع  $f$  برابر  $2\pi$  است.

تعریف

فرض کنید عددی حقیقی و غیر صفر مانند  $T$  وجود دارد که به ازای هر  $x \in D_f$  (۱)  $x \pm T \in D_f$  (۲)  $f(x \pm T) = f(x)$  در این صورت می‌گوییم  $f$  تابعی متناوب است. کوچک‌ترین مقدار مثبت  $T$  را که در شرایط فوق صدق می‌کند، دوره تناوب تابع  $f$  می‌نامیم.

تابع‌های  $f(x) = \sin x$  و  $g(x) = \cos x$  متناوب‌اند و دوره تناوب آن‌ها برابر  $2\pi$  است، زیرا دامنه آن‌ها  $\mathbb{R}$  است و

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x$$

اکنون توجه کنید که نمودار تابع  $y = a \sin(x+b) + c$  از روی نمودار تابع  $y = \sin x$  به صورت زیر به دست می‌آید:

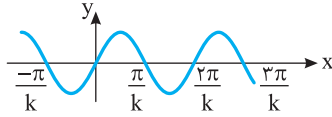
(۱) عرض هر نقطه روی نمودار تابع  $y = \sin x$  را  $a$  برابر می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = a \sin x$  به دست بیاید.

(۲) نمودار تابع  $y = a \sin x$  را  $b$  واحد در راستای محور  $x$  انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $y = a \sin(x+b)$  به دست بیاید.

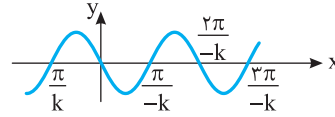
(۳) نمودار تابع  $y = a \sin(x+b)$  را  $c$  واحد در راستای محور  $y$  انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $y = a \sin(x+b) + c$  به دست بیاید.

معلوم است که در هیچ یک از این مراحل دوره تناوب تابع عوض نمی‌شود، بنابراین دوره تناوب تابع  $y = a \sin(x+b) + c$  هم برابر  $2\pi$  است.

از طرف دیگر، برای رسم تابع  $y = \sin kx$ ، طول هر نقطه روی نمودار تابع  $y = \sin x$  را در  $\frac{1}{k}$  ضرب می‌کنیم، پس نمودار تابع  $y = \sin x$  در راستای محور  $x$  منقبض یا منبسط می‌شود. پس دوره تناوب تابع  $y = \sin kx$  نیز از ضرب کردن  $\frac{1}{|k|}$  در دوره تناوب تابع  $y = \sin x$  به دست می‌آید (توجه کنید که چون دوره تناوب تابع عددی مثبت است و  $k$  می‌تواند منفی باشد، برای  $k$  قدر مطلق گذاشته‌ایم).



$y = \sin kx$  ,  $k > 0$ .



$y = \sin kx$  ,  $k < 0$ .

به این ترتیب، در مورد توابع  $y = a \sin(bx+c)+d$  و  $y = a \cos(bx+c)+d$  دوره تناوب برابر  $\frac{2\pi}{|b|}$  است.

۱۰۹

نکته

اگر  $a, b, c, d$  عددهایی حقیقی باشند که  $a, b \neq 0$ ، آن‌گاه تابع‌های  $y = a \sin(bx+c)+d$  و  $y = a \cos(bx+c)+d$  متناوب‌اند و دوره تناوب آن‌ها برابر با  $\frac{2\pi}{|b|}$  است. ماکزیمم مقدار این توابع برابر  $|a|+d$  و مینیمم مقدار آن‌ها برابر  $-|a|+d$  است.

تست ۹ دوره تناوب تابع  $f(x) = 2 \cos(1-2x) + 5$  کدام است؟

- (۱)  $\pi$       (۲)  $\frac{\pi}{2}$       (۳)  $2\pi$       (۴)  $\frac{\pi}{4}$

راه‌حل دوره تناوب تابع  $y = a \cos(bx+c)+d$  برابر  $\frac{2\pi}{|b|}$  است. بنابراین دوره تناوب تابع  $f$  برابر است با  $\frac{2\pi}{|-2|} = \pi$ .

تست ۱۰ دوره تناوب تابع  $f(x) = -3 \sin \frac{\pi x}{4}$  دو برابر دوره تناوب تابع  $g(x) = 2 \cos(\frac{\pi}{4} - ax)$  مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) فقط  $\frac{\pi}{2}$       (۲) فقط  $-2\pi$       (۳)  $\pm \frac{\pi}{2}$       (۴)  $\pm 2\pi$

راه‌حل می‌دانیم دوره تناوب توابع  $y = a \sin(bx+c)$  و  $y = a \cos(bx+c)$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  است. پس  $T_f = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{4}|} = 8$ ،  $T_g = \frac{2\pi}{|-a|} = \frac{2\pi}{|a|}$

بنابراین  $T_f = 2T_g \Rightarrow 8 = \frac{4\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{\pi}{2}$

تست ۱۱ اگر دوره تناوب تابع  $f(x) = 2 - a^2 \sin ax$  برابر  $\frac{\pi}{4}$  باشد، بیشترین مقدار تابع  $f$  کدام است؟

- (۱) ۶۲      (۲) ۶۴      (۳) ۶۶      (۴) ۶۸

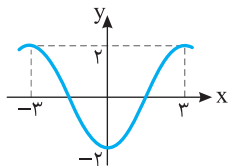
راه‌حل دوره تناوب تابع  $f$  برابر  $\frac{2\pi}{|a|}$  است. پس  $\frac{2\pi}{|a|} = \frac{\pi}{4}$  در نتیجه  $|a| = 8$ . اگر  $\sin ax = -1$ ، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع  $f$  اتفاق می‌افتد که برابر  $2 + a^2 = 66$  است.

تست ۱۲ دوره تناوب تابع  $f(x) = \sin^2 2x - \cos^2 2x$  کدام است؟

- (۱)  $4\pi$       (۲)  $\frac{\pi}{4}$       (۳)  $2\pi$       (۴)  $\frac{\pi}{2}$

راه‌حل توجه کنید که  $f(x) = -\cos 4x$ ، بنابراین دوره تناوب تابع  $f$  برابر است با  $\frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$ .





بخشی از نمودار تابع  $f(x) = a \cos bx$  به شکل مقابل است. مقدار  $ab$  کدام می‌تواند باشد؟

(۲)  $-\frac{\pi}{3}$

(۱)  $\frac{\pi}{3}$

(۴)  $-\frac{\pi}{6}$

(۳)  $-\frac{2\pi}{3}$

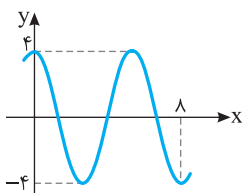
تست ۱۳

راه‌حل

با توجه به شکل  $f(0) = -2$  پس  $-2 = a \cos 0$  در نتیجه  $a = -2$ . از طرف دیگر، دوره تناوب تابع برابر ۶ است. پس

$$\frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{3}$$

بنابراین مقدار  $ab$  می‌تواند  $\frac{2\pi}{3}$  یا  $-\frac{2\pi}{3}$  باشد.



قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a \sin\left(\left(\frac{\delta}{\pi} + bx\right)\pi\right)$  به صورت مقابل است. مقدار  $ab$  کدام است؟ ( $b > 0$ )

(۲)  $\frac{3}{4}$

(۱)  $-\frac{3}{2}$

(۴)  $-\frac{3}{4}$

(۳)  $\frac{3}{2}$

تست ۱۴

راه‌حل

توجه کنید که

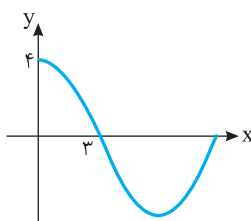
$$f(x) = a \sin\left(\pi bx + \frac{\delta\pi}{\pi}\right) = a \cos \pi bx$$

از طرف دیگر،  $f(0) = 4$  پس  $a \times 1 = 4$ ، در نتیجه  $a = 4$ . همچنین، دوره تناوب تابع  $f(x) = 4 \cos \pi bx$  برابر است با  $\frac{2\pi}{|\pi b|} = \frac{2}{|b|}$ . از روی نمودار معلوم

می‌شود که  $1/5$  برابر دوره تناوب تابع  $f$  برابر ۸ است. بنابراین

$$1/5 T = 8 \Rightarrow T = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{16}{3} = \frac{2}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{3}{8} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{8}$$

$b$  باید مثبت باشد، در نتیجه مقدار  $ab$  برابر است با  $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{2}$ .



قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = 4 \cos \frac{\pi x}{a} + b$  به شکل مقابل است. دوره تناوب تابع  $f$  کدام است؟ ( $a > 0$ )

(۲) ۶

(۱) ۳

(۴) ۱۲

(۳) ۹

تست ۱۵

راه‌حل

با توجه به نمودار،

$$f(0) = 4 \Rightarrow 4 + b = 4 \Rightarrow b = 0, \quad f(3) = 0 \Rightarrow 4 \cos \frac{3\pi}{a} + 0 = 0 \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{a} = 0$$

کوچک‌ترین زاویه مثبتی که کسینوس آن صفر می‌شود، زاویه  $\frac{\pi}{2}$  رادیان است. پس  $\frac{3\pi}{a} = \frac{\pi}{2}$  در نتیجه  $a = 6$ . بنابراین دوره تناوب تابع  $f$  برابر است با

$$\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{a}|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$$



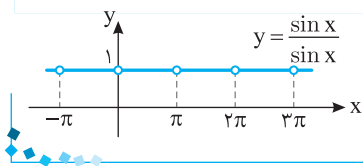
تست ۱۶

دوره تناوب تابع  $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{2}$       (۲)  $\pi$       (۳)  $2\pi$       (۴)  $4\pi$

راه حل

تابع  $f$  به ازای هر  $x$  که مضرب صحیح  $\pi$  باشد، تعریف نشده و به ازای بقیه  $x$  های حقیقی برابر تابع  $y=1$  است. بنابراین نمودار آن به شکل روبه‌رو است. واضح است که دوره تناوب تابع  $f$  برابر  $\pi$  است.



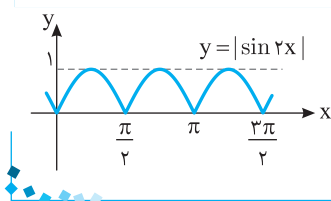
تست ۱۷

دوره تناوب تابع  $f(x) = |\sin 2x|$  کدام است؟

- (۱)  $2\pi$       (۲)  $\pi$       (۳)  $\frac{\pi}{2}$       (۴)  $\frac{\pi}{4}$

راه حل

با توجه به نمودار تابع  $f$ ، دوره تناوب آن  $\frac{\pi}{2}$  است.



نکته

دوره تناوب توابع  $f(x) = |a \sin(bx+c)|$  و  $g(x) = |a \cos(bx+c)|$  برابر  $T = \frac{\pi}{|b|}$  است.

تست ۱۸

اگر دوره تناوب تابع  $f(x) = |\sin 3x|$  با دوره تناوب تابع  $g(x) = |\cos \frac{ax}{2}|$  برابر باشد، مقدار  $|a|$  کدام است؟

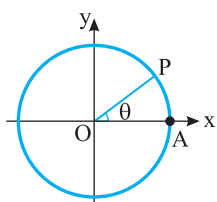
- (۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۶

راه حل

دوره تناوب تابع  $f$  برابر  $\frac{\pi}{3}$  و دوره تناوب تابع  $g$  برابر  $\frac{\pi}{|a|}$  است. بنابراین

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow |a| = 6$$

تابع تانژانت

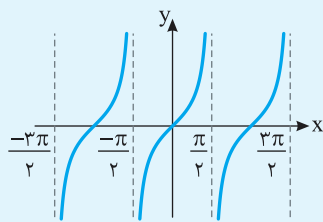


فرض کنید در دایره مثلثاتی شعاع  $OA$  را به اندازه  $\theta$  رادیان دوران دهیم. در این صورت مسافتی را که نقطه  $A$  روی دایره طی کرده است (طول  $\widehat{AP}$ ) با در نظر گرفتن علامت  $\theta$  با  $x$  نمایش می‌دهیم، یعنی اگر جهت دوران مثبت باشد،  $x$  را مثبت و اگر جهت دوران منفی باشد،  $x$  را منفی می‌گیریم. در این صورت  $x = \theta$ ، که در اینجا  $x$  عددی حقیقی است (معلوم است که اگر  $\theta = 0$ ، آن گاه  $x = 0$ ). به این ترتیب می‌توانیم تانژانت عدد حقیقی  $x$  را که  $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ،  $(k \in \mathbb{Z})$  برابر تانژانت  $\theta$  تعریف کنیم. اگر  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ،  $(k \in \mathbb{Z})$ ، تانژانت  $x$  تعریف نمی‌شود.

اگر  $x$  عددی حقیقی باشد و  $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ،  $(k \in \mathbb{Z})$ ، تابعی که به عدد  $x$  تانژانت آن را نسبت می‌دهد تابع **تانژانت** نامیده می‌شود. اگر  $f(x) = \tan x$ ،

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}, \quad R_f = \mathbb{R}$$

آن‌گاه



نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است. از روی این نمودار معلوم است که تابع تنازنت تابعی متناوب با دوره تناوب  $\pi$  است و روی هر بازه به صورت  $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$  که  $k \in \mathbb{Z}$ ، اکیداً صعودی است. این تابع روی دامنه‌اش غیریکنواست.

نکته

اگر  $a, b, c, d$  عددهایی حقیقی باشند و  $a, b \neq 0$ ، آن‌گاه دوره تناوب تابع  $f(x) = a \tan(bx+c)+d$  برابر با  $\frac{\pi}{|b|}$  است.

تست ۱۹

دامنه تابع  $f(x) = \tan \frac{\pi x}{4}$  کدام است؟

- (۱)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$  (۲)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k, k \in \mathbb{Z}\}$   
 (۳)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4k+1, k \in \mathbb{Z}\}$  (۴)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4k+2, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\frac{\pi x}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 4k+2, k \in \mathbb{Z}$$

هر  $x$  که در تساوی  $\frac{\pi x}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$  صدق نکند، در دامنه این تابع قرار دارد:

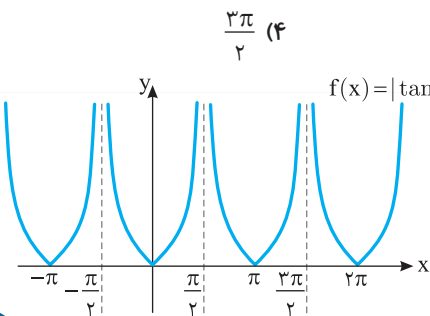
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4k+2, k \in \mathbb{Z}\}$$

راه‌حل

تست ۲۰

دوره تناوب تابع  $f(x) = |\tan x|$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{2}$  (۲)  $\pi$  (۳)  $2\pi$  (۴)  $\frac{3\pi}{2}$



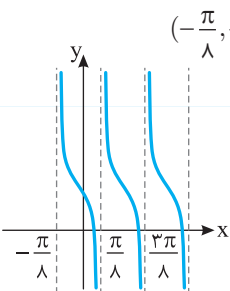
برای اینکه نمودار تابع  $f(x) = |\tan x|$  را رسم کنیم، قرینه قسمتهایی از نمودار تابع  $y = \tan x$  را که زیر محور  $x$  است، نسبت به محور  $x$  رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور  $x$  است، حذف می‌کنیم. از روی این نمودار معلوم است که دوره تناوب تابع  $f(x) = |\tan x|$  برابر  $\pi$  است.

راه‌حل

تست ۲۱

تابع  $f(x) = 1 - \tan 4x$  روی کدام یک از بازه‌های زیر اکیداً نزولی است؟

- (۱)  $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$  (۲)  $(0, \frac{\pi}{4})$  (۳)  $(-\frac{\pi}{4}, 0)$  (۴)  $(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$



تابع  $f(x) = 1 - \tan 4x$  روی بازه‌های به صورت  $(\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}, \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8})$  که  $k \in \mathbb{Z}$  اکیداً نزولی است. بنابراین تابع  $f$  روی بازه  $(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$  اکیداً نزولی است و روی بازه‌های دیگر چنین نیست.

راه‌حل

تست ۲۲

اگر  $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{8}$  و  $\tan 2x = \frac{2m+3}{4}$ ، حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2} < m < -\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{2} < m < \frac{1}{4}$  (۳)  $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$

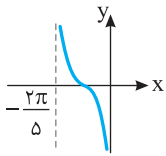
توجه کنید که  $-\frac{\pi}{4} < 2x < \frac{\pi}{4}$  و تابع تنازنت روی بازه  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  اکیداً صعودی است، پس

$$-\frac{\pi}{4} < 2x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(-\frac{\pi}{4}) < \tan 2x < \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow -1 < \tan 2x < 1 \Rightarrow -1 < \frac{2m+3}{4} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$$

راه‌حل

تست ۲۳

قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = \tan(ax+b)$  به صورت مقابل است. مقدار  $a$  کدام است؟



$-\frac{5}{2}$  (۴)

$\frac{5}{2}$  (۳)

$\frac{2}{5}$  (۲)

$-\frac{2}{5}$  (۱)

توجه کنید که دوره تناوب تابع  $f$  برابر با  $\frac{\pi}{|a|}$  است. از روی نمودار مشخص است که دوره تناوب تابع  $\frac{2\pi}{5}$  است، پس

$$\frac{\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow |a| = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{5}{2}$$

چون تابع  $f$  روی بازه  $(-\frac{2\pi}{5}, 0)$  نزولی است، پس  $a$  منفی است و جواب  $a = -\frac{5}{2}$  غیر قابل قبول است.

راه حل

تست ۲۴

برد تابع  $f(x) = 1 - \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$  با دامنه  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  کدام است؟

$(-1, +\infty)$  (۴)

$(-1, 1)$  (۳)

$(-\infty, 1)$  (۲)

$(1, +\infty)$  (۱)

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi$$

ابتدا توجه کنید که

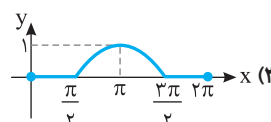
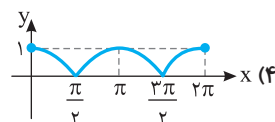
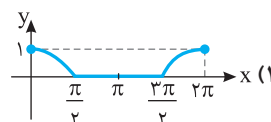
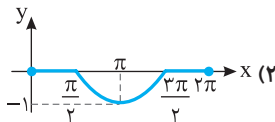
راه حل

اکنون از روی نمودار تناوب و اکیداً صعودی بودن آن روی بازه  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  نتیجه می شود

$$\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) < 0 \Rightarrow -\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) > 0 \Rightarrow 1 - \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) > 1 \Rightarrow f(x) > 1 \Rightarrow R_f = (1, +\infty)$$

دست گرمی

۱۰۳- نمودار تابع  $f(x) = \frac{\cos x - |\cos x|}{2}$  روی بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟



۱۰۴- اگر  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$  و  $\sin x = \frac{m-1}{4}$ ، چند مقدار صحیح می تواند داشته باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۰۵- دوره تناوب تابع  $f(x) = -2 \sin \frac{\pi x}{2}$  دو برابر دوره تناوب تابع  $g(x) = 3 \cos(\frac{\pi}{2} - ax)$  است. مقدار  $a$  کدام است؟

$\pm 2\pi$  (۴)

$\pm \pi$  (۳)

$-2\pi$  (۲)

$\pi$  (۱)

۱۰۶- دوره تناوب تابع  $f(x) = \sin^2 x + 12$  چقدر است؟

$\frac{\pi}{4}$  (۴)

$\frac{\pi}{2}$  (۳)

$2\pi$  (۲)

$\pi$  (۱)

۱۰۷- تابع  $f(x) = -\tan 2x$  روی کدام یک از بازه های زیر اکیداً نزولی است؟

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  (۴)

$(-\frac{\pi}{2}, 0)$  (۳)

$(0, \frac{\pi}{2})$  (۲)

$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$  (۱)

۱۰۸- اگر  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$  و  $\tan x = \frac{2m-3}{5}$ ، حدود  $m$  کدام است؟

$-1 < m < 1$  (۴)

$-1 < m < 2$  (۳)

$-1 < m < 4$  (۲)

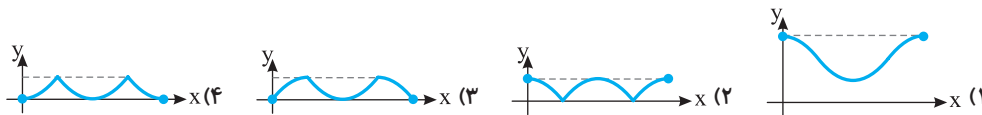
$-4 < m < 1$  (۱)

توابع مثلثاتی (۱)

آزمون ۶۰

سؤال	گام
۵۹۱	۳۱ ۳۳ ۳۸ ۱۰۷
۵۹۲	۱۰۷
۵۹۳	۱۰۷
۵۹۴	۱۰۹
۵۹۵	۱۱۰
۵۹۶	۹۶ ۱۰۶
۵۹۷	۱۰۶ ۱۰۹
۵۹۸	۱۱۱
۵۹۹	۱۱۱
۶۰۰	۳۲ ۴۷ ۱۱۱

۵۹۱- نمودار تابع  $y=1-|\cos x|$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟



۵۹۲- نمودار تابع  $f(x)=a \cos x-b$  از نقطه  $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}-1)$  عبور می کند و محور طولها را در نقطه‌ای به طول  $\frac{\pi}{3}$  قطع می کند. حاصل  $ab$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲)  $-2\sqrt{2}$  (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴) ۲

۵۹۳- اگر  $\cos x = \sqrt{3}m$  و  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ ، حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $0 < m < 1$  (۲)  $0 < m < \frac{1}{2}$  (۳)  $-\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$

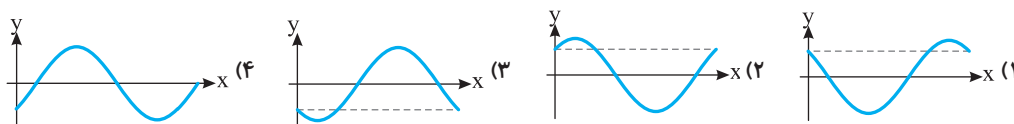
۵۹۴- اگر دوره تناوب تابع  $f(x) = -3 \cos kx$  برابر  $\frac{\pi}{2k+1}$  باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{5}$  (۲)  $\frac{1}{5}$  (۳)  $-\frac{2}{5}$  (۴)  $-\frac{1}{5}$

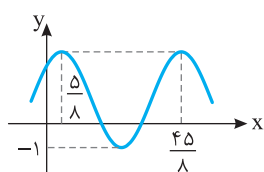
۵۹۵- دوره تناوب تابع  $f(x) = |\cos 4x|$  چقدر است؟

- (۱)  $2\pi$  (۲)  $\pi$  (۳)  $\frac{\pi}{4}$  (۴)  $\frac{\pi}{2}$

۵۹۶- نمودار تابع  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$  کدام است؟



۵۹۷- قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a + 2 \sin(\frac{2\pi}{b}x + \frac{\pi}{4})$  به صورت مقابل است. مقدار  $b-a$  کدام است؟



- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) -۶

۵۹۸- دامنه تابع  $f(x) = \tan \frac{\pi x}{2}$  کدام است؟

- (۱)  $\{x \in \mathbb{R} | x \neq k, k \in \mathbb{Z}\}$  (۲)  $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2k, k \in \mathbb{Z}\}$  (۳)  $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$  (۴)  $\mathbb{Z}$

۵۹۹- اگر  $-\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$  و  $\tan x = \frac{2-m}{\sqrt{3}}$ ، حداکثر مقدار  $m$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) صفر

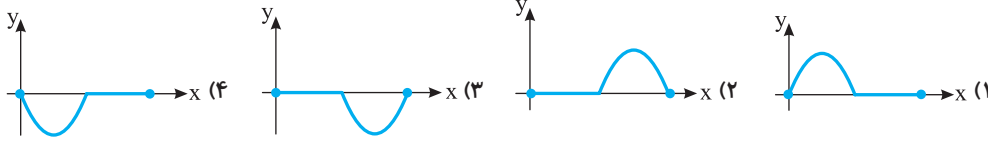
۶۰۰- تابع  $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{3})$  روی بازه  $(a, \frac{11\pi}{6})$  اکیداً صعودی است. حداقل مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5\pi}{6}$  (۲)  $\frac{5\pi}{3}$  (۳)  $\frac{2\pi}{3}$  (۴)  $-\frac{\pi}{6}$

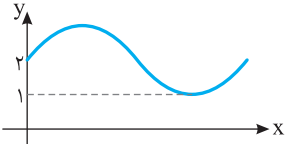
آزمون ۶۱

توابع مثلثاتی (۲)

۶۰۱- نمودار تابع  $f(x) = \sin x - |\sin x|$  روی بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟



۶۰۲- قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = (a+b)\sin x + 2a - b$  به شکل مقابل است. بیشترین مقدار تابع کدام است؟



- (۱) ۴      (۲) ۳  
(۳)  $\frac{7}{2}$       (۴)  $\frac{5}{2}$

۶۰۳- اگر  $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$  و  $\sin x = \frac{m+1}{2m}$ ، حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $m > \frac{1}{2}$       (۲)  $-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{2}$       (۳)  $m > -\frac{1}{2}$       (۴)  $m < -\frac{1}{2}$

۶۰۴- برد تابع  $f(x) = \sin^2 x + 3 \cos^2 x$  کدام است؟

- (۱)  $[0, 3]$       (۲)  $[0, 4]$       (۳)  $[1, 3]$       (۴)  $[1, 4]$

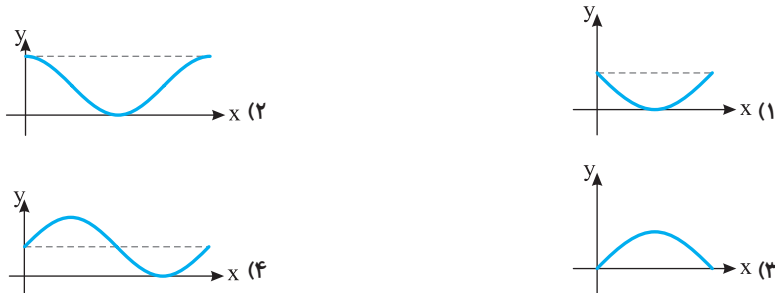
۶۰۵- اگر کمترین مقدار تابع  $f(x) = 3a + a^2 \cos ax$  برابر ۲ باشد، دوره تناوب آن کدام است؟

- (۱)  $2\pi$  یا  $\pi$       (۲)  $\pi$  یا  $\frac{\pi}{2}$       (۳)  $4\pi$  یا  $2\pi$       (۴)  $\frac{3\pi}{2}$  یا  $\frac{\pi}{2}$

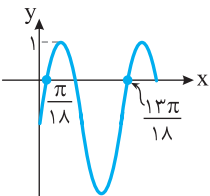
۶۰۶- دوره تناوب تابع  $f(x) = \cos 4x + \cos^2 2x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{2}$       (۲)  $\pi$       (۳)  $2\pi$       (۴)  $\frac{\pi}{4}$

۶۰۷- نمودار تابع  $f(x) = 2 \sin^2(\frac{\pi+x}{2})$  در یک دوره تناوب خود کدام است؟



۶۰۸- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a + 2 \cos(\frac{\pi}{2} - bx)$  است. مقدار  $b - a$  کدام است؟



- (۱) ۱      (۲) ۲  
(۳) ۳      (۴) ۴

۶۰۹- برد تابع  $f$  با دامنه  $[0, \frac{\pi}{4}]$  و ضابطه  $f(x) = \frac{3 - \tan x}{2}$  کدام است؟

- (۱)  $[\frac{3}{2}, 2]$       (۲)  $[0, 1]$       (۳)  $[1, \frac{3}{2}]$       (۴)  $[1, 2]$

۶۱۰- اگر  $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) - \{\frac{\pi}{2}\}$  و  $\tan x = \frac{m-1}{2}$ ، کدام یک درست است؟

- (۱)  $m > 3$       (۲)  $m > 3$  یا  $m < -1$       (۳)  $m > 1$  یا  $m < -3$       (۴)  $-1 < m < 3$

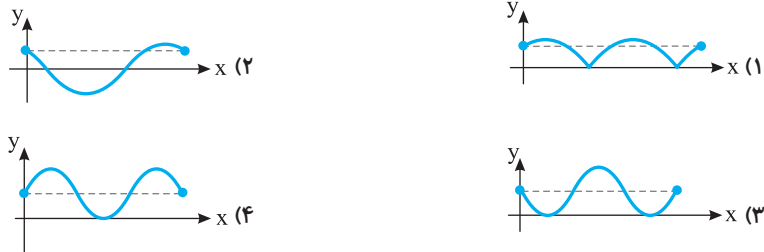
سؤال	گام
۶۰۱	۳۴ ۱۰۶ ۳۳۱
۶۰۲	۱۰۶
۶۰۳	۱۰۶ ۳۲۰
۶۰۴	۸۲ ۱۰۶
۶۰۵	۱۰۹
۶۰۶	۹۹ ۱۰۹
۶۰۷	۹۹ ۱۰۷ ۱۰۹
۶۰۸	۹۴ ۱۰۶ ۱۰۹
۶۰۹	۲۳ ۱۱۱
۶۱۰	۱۱۱

توابع مثلثاتی (۳)

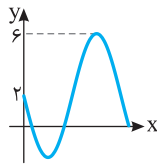
آزمون ۶۲

سؤال	گام
۶۱۱	۳۲ ۳۶ ۳۸ ۱۰۷
۶۱۲	۱۰۶ ۱۰۹
۶۱۳	۱۰۶
۶۱۴	۲۳ ۱۰۶ ۲۷۵
۶۱۵	۱۰۹
۶۱۶	۸۲ ۹۷ ۱۰۹
۶۱۷	۹۷ ۱۰۶ ۱۱۰
۶۱۸	۱۰۶ ۱۰۹
۶۱۹	۲۳ ۱۱۱
۶۲۰	۳۶ ۴۷ ۱۱۱

۶۱۱- نمودار تابع  $f(x) = |\cos(2x - \frac{\pi}{4})|$  روی بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟



۶۱۲- قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a - 2b \sin x$  به شکل مقابل است. مقدار  $ab$  کدام است؟



- (۱) -۴ (۲) ۴  
(۳) ۲ (۴) -۲

۶۱۳- اگر  $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$  و  $\cos x = \frac{m^2 + 1}{4}$ ، کدام یک درست است؟

- (۱)  $\frac{3}{2} < |m| \leq \sqrt{3}$  (۲)  $1 < |m| \leq \sqrt{3}$  (۳)  $1 < |m| \leq \frac{3}{2}$  (۴)  $0 < |m| \leq \sqrt{3}$

۶۱۴- برد تابع  $f(x) = \sin^4 x + 2 \sin^2 x$  کدام است؟

- (۱)  $[0, 3]$  (۲)  $[0, 2]$  (۳)  $[0, 4]$  (۴)  $[0, \frac{3}{2}]$

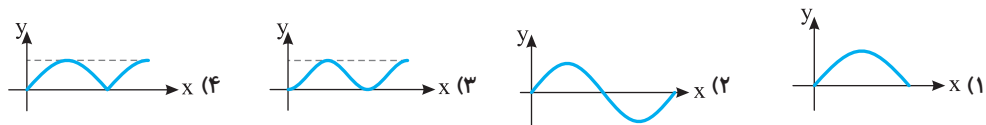
۶۱۵- اگر دوره تناوب تابع  $f(x) = |a| + b \cos a\pi x$  برابر ۴ و کمترین مقدار آن برابر -۳ باشد، بیشترین مقدار آن کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳)  $\frac{9}{2}$  (۴) ۴

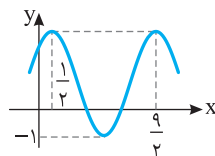
۶۱۶- دوره تناوب تابع  $f(x) = \cos^2 ax - \cos^4 ax$  برابر  $\frac{\pi}{4}$  است. مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\pm 1$  (۲)  $\pm 2$  (۳)  $\pm 3$  (۴)  $\pm 4$

۶۱۷- نمودار تابع  $f(x) = 4|\sin x \cos x|$  در یک دوره تناوب کدام است؟



۶۱۸- قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = 1 + a \sin(\frac{\pi}{b}x + \frac{\pi}{4})$  به صورت مقابل است. مقدار  $a+b$  کدام است؟



- (۱) ۴ (۲) -۴  
(۳)  $\pm 4$  (۴) صفر

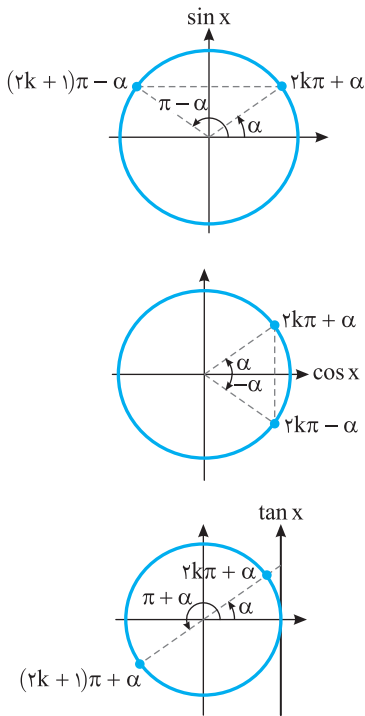
۶۱۹- برد تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = -\tan(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{3})$  و دامنه  $[0, 2]$  کدام است؟

- (۱)  $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$  (۲)  $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$  (۳)  $[-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$  (۴)  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

۶۲۰- تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \tan \frac{\pi x}{4}$  و دامنه  $(2, a)$  روی دامنه اش اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

معادلات مثلثاتی ساده



فرض کنید  $\alpha$  زاویه‌ای حاده باشد. معادله مثلثاتی  $\sin x = \sin \alpha$  را در نظر بگیرید. از روی دایره مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که  $x = \alpha$  و  $x = \pi - \alpha$  جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادله مورد نظر جواب دیگری در بازه  $[0, 2\pi]$  ندارد. البته چون برای هر عدد صحیح  $k$ ،  $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$ ، پس  $x = 2k\pi + \alpha$  نیز جواب است. همین طور  $x = 2k\pi + \pi - \alpha$ ، یعنی  $x = (2k+1)\pi - \alpha$  نیز برای هر عدد صحیح  $k$  جواب این معادله است. این نتیجه در مورد هر زاویه دلخواهی مانند  $\alpha$  نیز درست است.

اکنون معادله مثلثاتی  $\cos x = \cos \alpha$  را در نظر بگیرید. از روی دایره مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که  $x = \alpha$  و  $x = -\alpha$  جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادله مورد نظر جواب دیگری در بازه  $[-\pi, \pi]$  ندارد. البته چون برای هر عدد صحیح  $k$ ،  $\cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos \alpha$ ، پس  $x = 2k\pi + \alpha$  و  $x = 2k\pi - \alpha$  نیز جواب معادله مورد نظر هستند. این نتیجه در مورد هر زاویه دلخواهی مانند  $\alpha$  نیز درست است.

اکنون معادله  $\tan x = \tan \alpha$  را در نظر بگیرید. از روی دایره مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که  $x = \alpha$  و  $x = \pi + \alpha$  جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادله مورد نظر جواب دیگری در بازه  $[0, 2\pi]$  ندارد. البته، چون اگر  $k$  عددی صحیح باشد،  $\tan(k\pi + \alpha) = \tan \alpha$ ، پس  $x = k\pi + \alpha$  نیز جواب معادله مورد نظر است. این نتیجه در مورد هر زاویه دلخواهی مانند  $\alpha$  نیز درست است.

۱۱۲

نکته

- جواب‌های کلی معادله  $\sin x = \sin \alpha$  به صورت مقابل هستند:
- جواب‌های کلی معادله  $\cos x = \cos \alpha$  به صورت مقابل هستند:
- جواب‌های کلی معادله  $\tan x = \tan \alpha$  به صورت مقابل هستند:

۱)  $\sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

مثال:

۲)  $\cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

۳)  $\tan x = \tan \frac{\pi}{8} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$

تست

جواب‌های کلی معادله  $\sin x = \sin \delta x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۴)  $-\frac{k\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{6}$

(۳)  $\frac{2k\pi}{5}, \frac{(2k+1)\pi}{5}$

(۲)  $\frac{k\pi}{3}, \frac{(2k+1)\pi}{6}$

(۱)  $k\pi, \frac{(2k+1)\pi}{4}$

توجه کنید که

راه‌حل

$$\sin x = \sin \delta x \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \delta x \\ x = (2k+1)\pi - \delta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



تست ۲

جواب‌های کلی معادله  $\cos 4x = \cos x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $2k\pi$  (۲)  $2k\pi - \frac{2\pi}{5}, 2k\pi + \frac{2\pi}{5}$  (۳)  $\frac{2k\pi}{3}, \frac{2k\pi}{5}$  (۴)  $2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

راه‌حل

معادله را حل می‌کنیم:

$$\cos 4x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست ۳

جواب‌های کلی معادله  $\tan 4x = \tan 2x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $2k\pi$  (۲)  $k\pi$  (۳)  $\frac{k\pi}{2}$  (۴)  $\frac{k\pi}{4}$

راه‌حل

توجه کنید که

$$\tan 4x = \tan 2x \Rightarrow 4x = k\pi + 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

۱۱۳

تذکر

برای پیدا کردن جواب‌های معادله مثلثاتی در یک بازه می‌توانیم به ترتیب زیر عمل کنیم:  
 (۱) به ازای  $k=0$  جواب را به دست می‌آوریم و اگر در بازه مورد نظر بود، آن را قبول می‌کنیم.  
 (۲) به ازای  $k=1, k=2, \dots$  جواب‌ها را به دست می‌آوریم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که جواب‌ها در بازه مورد نظر قرار داشته باشند.  
 (۳) به ازای  $k=-1, k=-2, \dots$  جواب‌ها را به دست می‌آوریم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که جواب‌ها در بازه مورد نظر قرار داشته باشند.

تست ۴

معادله  $\sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sin x = 0$  چند جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

راه‌حل

معادله را به صورت  $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin x$  می‌نویسیم. بنابراین جواب‌های آن به صورت زیر هستند

$$x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x \Rightarrow \frac{\pi}{3} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (غ.ق.ق.)}, \quad x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه  $(0, 2\pi)$  را به دست می‌آوریم

k	0	1	2
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$

(غ.ق.ق.)

پس معادله دو جواب در این بازه دارد.

نکته

در معادلات مثلثاتی که نسبت مثلثاتی در مخرج وجود دارد، جواب‌هایی که مخرج را صفر می‌کنند قابل قبول نیستند. توجه کنید که در معادلاتی که شامل تانژانت و کتانژانت هستند، نسبت مثلثاتی در مخرج وجود دارد.

تست ۵

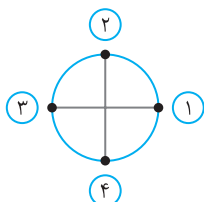
جواب‌های کلی معادله  $\tan 3x = \tan x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $\frac{k\pi}{2}$  (۲)  $k\pi$  (۳)  $2k\pi$  (۴)  $2k\pi + \pi$

راه‌حل

جواب‌های کلی معادله به صورت روبه‌رو به دست می‌آیند:

$$3x = k\pi + x \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



توجه کنید که نقاط انتهایی کمان زاویه‌های متناظر  $\frac{k\pi}{2}$  روی دایره مثلثاتی به صورت مقابل هستند که چهار نقطه هستند و تانژانت زاویه‌هایی که نقاط انتهایی کمان متناظر آنها روی نقاط (۲) و (۴) قرار می‌گیرد تعریف شده نیست. این نقاط به صورت  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  هستند ( $k \in \mathbb{Z}$ ). بنابراین جواب‌های معادله متناظر با نقاط (۱) و (۳) هستند که به صورت  $x = k\pi$  هستند.

۱۱۴

نکته

گاهی ممکن است چند مجموعه جواب کلی برای معادله مثلثاتی به دست بیاید که یکی از آن‌ها زیر مجموعه دیگری باشد.

تست

□□□□

معادله  $\cos 3x = \cos x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

۲ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

راه‌حل

معادله را حل می‌کنیم:

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مجموعه جواب  $\frac{k\pi}{2}$  شامل مجموعه جواب  $k\pi$  نیز هست. پس جواب‌های معادله به صورت  $x = \frac{k\pi}{2}$ ،  $k \in \mathbb{Z}$  هستند که در بازه  $[0, 2\pi]$

عبارت‌اند از  $x = 0$ ،  $x = \frac{\pi}{2}$ ،  $x = \pi$ ،  $x = \frac{3\pi}{2}$  و  $x = 2\pi$ .

۱۱۵

نکته

برخی معادله‌های مثلثاتی را می‌توان با استفاده از روابط میان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم یا مکمل به معادله‌های ساده مثلثاتی تبدیل کرد.

تست

□□□□

معادله  $\cos 4x + \cos x = 0$  چند جواب در بازه  $[0, \pi]$  دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

راه‌حل

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\cos 4x = -\cos x \Rightarrow \cos 4x = \cos(\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = \frac{(2k-1)\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم جواب‌های واقع در بازه  $[0, \pi]$  را بیابیم، می‌توانیم به‌ازای مقادیر مختلف  $k$  جواب‌ها را مشخص کنیم:

$k$	۰	۱	۲	$k$	۱	۲
$\frac{(2k+1)\pi}{5}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\pi$	$\frac{(2k-1)\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\pi$

با توجه به مشترک بودن  $x = \pi$  در این جواب‌ها، معادله در بازه  $[0, \pi]$  چهار جواب دارد:  $x = \frac{\pi}{5}$ ،  $\frac{3\pi}{5}$ ،  $\pi$ ،  $\frac{\pi}{3}$ .

تست

□□□□

معادله  $\cos 4x + \sin x = 0$  چند جواب در بازه  $[0, \pi]$  دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

راه‌حل

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\cos 4x = -\sin x \Rightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow x = \frac{(4k-1)\pi}{10}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم جواب‌های واقع در بازه  $[0, \pi]$  را بیابیم، می‌توانیم به‌ازای مقادیر مختلف  $k$  جواب‌ها را مشخص کنیم:

$k$	۰	۱	$k$	۱	۲
$\frac{(4k+1)\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{(4k-1)\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{7\pi}{10}$

بنابراین معادله مورد نظر چهار جواب در بازه  $[0, \pi]$  دارد.

تست ۹

جواب‌های کلی معادله  $\tan x = \cot 3x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $\frac{k\pi + \pi}{2}, \frac{k\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi - \pi}{4}, \frac{k\pi}{8}$  (۳)  $\frac{k\pi - \pi}{2}, \frac{k\pi}{4}$  (۴)  $\frac{k\pi + \pi}{4}, \frac{k\pi}{8}$

راه‌حل

معادله را به صورت  $\tan x = \tan(\frac{\pi}{2} - 3x)$  می‌نویسیم. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow x = \frac{k\pi + \pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۱۱۶

نکته

(۱) برای حل کردن معادله  $\sin x = m$  که  $-1 \leq m \leq 1$ ، کافی است زاویه  $\alpha$  را طوری پیدا کنیم که  $\sin \alpha = m$ ، سپس جواب‌های معادله  $\sin x = \sin \alpha$  را پیدا می‌کنیم.  
(۲) برای حل کردن معادله  $\cos x = m$  که  $-1 \leq m \leq 1$ ، کافی است زاویه  $\alpha$  را طوری پیدا کنیم که  $\cos \alpha = m$ ، سپس جواب‌های معادله  $\cos x = \cos \alpha$  را پیدا می‌کنیم.  
(۳) برای حل کردن معادله  $\tan x = m$ ، کافی است زاویه  $\alpha$  را طوری پیدا کنیم که  $\tan \alpha = m$ ، سپس جواب‌های معادله  $\tan x = \tan \alpha$  را پیدا می‌کنیم.

تست ۱۰

جواب‌های کلی معادله  $\sqrt{2} \sin 2x - 1 = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi + \frac{\Delta\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{8}, k\pi - \frac{\pi}{8}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{8}, k\pi - \frac{\pi}{8}$

راه‌حل

معادله را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$\sqrt{2} \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت مقابل هستند:

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۱۱۷

نکته

برای پیدا کردن جواب‌های معادله مثلثاتی در بازه  $[a, b]$  می‌توانیم پس از پیدا کردن جواب‌های کلی  $x$ ، نامعادله  $a \leq x \leq b$  را حل کنیم و مقادیر  $k$  را پیدا کنیم. در مورد بازه‌های دیگر نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم.

تست ۱۱

معادله  $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  چند جواب در بازه  $[-\frac{\Delta\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۶

راه‌حل

ابتدا جواب‌های کلی معادله مورد نظر را به دست می‌آوریم. توجه کنید که  $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\Delta\pi}{6}$ ، بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\Delta\pi}{6} \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{\Delta\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌ها عبارت‌اند از

$$x = 2k\pi - \frac{\Delta\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + \frac{\Delta\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون از این جواب‌ها، آنهایی را پیدا می‌کنیم که در بازه  $[-\frac{\Delta\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  هستند. توجه کنید که

$$-\frac{\Delta\pi}{2} \leq 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -2\pi \leq 2k\pi \leq 2\pi \Rightarrow -1 \leq k \leq 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

در نتیجه، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از  $-\frac{\pi}{2}$  و  $2\pi - \frac{\pi}{2}$ .

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{11\pi}{3} \leq 2k\pi \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow -\frac{11}{6} \leq k \leq \frac{1}{6} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -1, 0, \text{ همچنین}$$

در نتیجه، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از  $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi$  و  $\frac{7\pi}{6}$ . بنابراین معادله مورد نظر در بازه  $[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  پنج جواب دارد.

۱۱۸

تذکر

واضح است که معادله‌های  $\sin x = m$  و  $\cos x = m$  به‌ازای  $m$  هایی که در بازه  $[-1, 1]$  نیستند، جواب ندارند، ولی معادله  $\tan x = m$  به‌ازای هر عدد حقیقی  $m$  جواب دارد.

تست

به‌ازای چه مقادیری از  $k$  معادله  $2 \cos x + 3k = 1$  جواب دارد؟

$$(1) 0 \leq k \leq \frac{4}{3} \quad (2) -1 \leq k \leq 1 \quad (3) -1 \leq k \leq \frac{1}{3} \quad (4) -\frac{1}{3} \leq k \leq 1$$

راه‌حل

توجه کنید که  $2 \cos x + 3k = 1$  در نتیجه  $\cos x = \frac{1-3k}{2}$  و چون  $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، پس

$$-1 \leq \frac{1-3k}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 1-3k \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -3k \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq 1$$

تست

معادله  $\sin x = m \cos x$  چند جواب در بازه  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  دارد؟(۴) بستگی به مقدار  $m$  دارد.

(۳) صفر

(۲) ۲

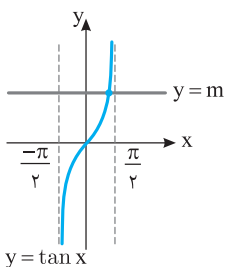
(۱) ۱

معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

راه‌حل

$$\sin x = m \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = m \Rightarrow \tan x = m$$

با توجه به نمودار روبه‌رو، به‌ازای هر مقدار  $m$ ، معادله دقیقاً یک جواب دارد.



تست

معادله  $\tan^2 x + 4 \tan x + k = 0$  جواب دارد. حدود  $k$  کدام است؟(۴)  $0 \leq k \leq 4$ (۳)  $-4 < k < 4$ (۲)  $0 < k \leq 4$ (۱)  $k \leq 4$ 

راه‌حل

اگر فرض کنیم  $t = \tan x$ ، آن‌گاه معادله به‌صورت  $t^2 + 4t + k = 0$  درمی‌آید. شرط وجود جواب برای این معادله این است که

$$\Delta = 16 - 4k \geq 0 \Rightarrow k \leq 4$$

از طرف دیگر اگر این معادله درجه دوم جوابی مانند  $t_1$  داشته باشد، آن‌گاه معادله  $\tan x = t_1$  قطعاً جواب دارد، پس معادله اصلی هم جواب خواهد داشت. بنابراین تنها شرط جواب داشتن معادله،  $k \leq 4$  است.

## معادلات خاص مثلثاتی

در برخی معادلات مثلثاتی، جواب‌های کلی را می‌توان به‌صورت یک دسته جواب نوشت. مثلاً معادله مثلثاتی  $\sin x = 1$  را در نظر بگیرید. توجه کنید که

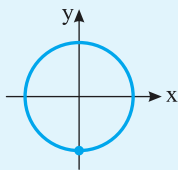
$$\sin x = 1 = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌های کلی این معادله به‌صورت  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  هستند. جواب‌های کلی معادلات خاص را در نکته بعد آورده‌ایم.

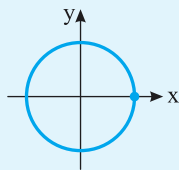
۱۱۹

معادلات خاص مثلثاتی

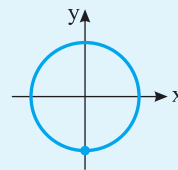
نکته



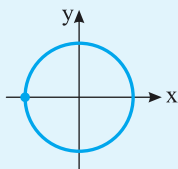
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



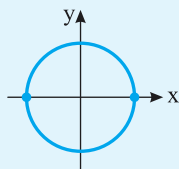
$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



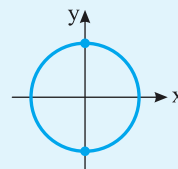
$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله  $\sin x \cos 2x = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

تست ۱۵

(۴)  $k\pi, k\pi - \frac{\pi}{4}$

(۳)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, 2k\pi$

(۲)  $k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}$

(۱)  $k\pi, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$\sin x \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

توجه کنید که

راه‌حل

نمودار تابع  $y = 3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$  روی بازه  $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$  در چند نقطه محور  $x$  را قطع می‌کند؟

تست ۱۶

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

$\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow 2x = -k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = -\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$

جایی که نمودار محور  $x$  را قطع می‌کند،  $y = 0$  پس

راه‌حل

جواب‌های واقع در بازه  $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$  عبارت‌اند از

k	۰	۱	۲	-۱	-۲
x	$\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{7\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$

۱۲۰

نکته

گاهی می‌توان چند مجموعه جواب کلی معادله مثلثاتی را به صورت یک مجموعه جواب کلی نوشت.

مثال: مجموعه جواب‌های معادله  $\sin \frac{x}{2} (\cos x + 1) = 0$  به صورت زیر است:

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

چون مضارب زوج  $\pi$  و مضارب فرد  $\pi$  جواب‌های این معادله هستند، مجموعه جواب‌های این معادله را می‌توان به صورت مضارب صحیح  $\pi$  نوشت، که می‌شود  $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

جواب‌های کلی معادله  $2 \sin^2 x - 1 = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

تست ۱۷

(۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(۳)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(۲)  $(2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$$2 \sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

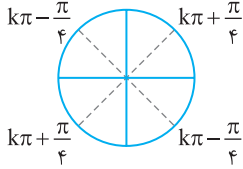
راه حل اول توجه کنید که

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۱), \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۲)$$

بنابراین

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۳), \quad x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۴)$$

همین طور،



اکنون توجه کنید که اجتماع جواب‌های (۱) و (۴) را می‌توان به صورت  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  نوشت. همین طور، اجتماع جواب‌های

(۲) و (۳) به صورت  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  است. بنابراین جواب‌های کلی معادله مورد نظر به صورت  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  است که می‌توان با

توجه به شکل روبه‌رو آن‌ها را به صورت  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  نوشت ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

راه حل دوم چون  $1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x$ ، معادله مورد نظر را می‌توان به صورت  $-\cos 2x = 0$  نوشت، که مجموعه جواب‌های آن به صورت زیر است:

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

تست ۱۸ جواب‌های کلی معادله  $\cos^3 x - \cos x = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{2} \quad (۳)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۲)$$

$$k\pi \quad (۱)$$

$$\cos^3 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x (\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

راه حل اول توجه کنید که

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

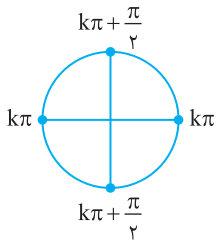
بنابراین

توجه کنید که اجتماع دو جواب آخر را می‌توان به صورت  $k\pi$  نوشت ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

$$k\pi, \quad k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله مورد نظر عبارت‌اند از

که با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان آن‌ها را به صورت  $\frac{k\pi}{2}$  نوشت ( $k \in \mathbb{Z}$ ).



$$\cos x (\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow -\cos x \sin^2 x = 0$$

راه حل دوم معادله مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین

که مشابه راه حل اول می‌توان مجموعه جواب‌ها را به صورت  $\frac{k\pi}{2}$  نوشت ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

۱۲۱

نکته

برخی معادله‌های مثلثاتی را می‌توانیم با استفاده از اتحادها به معادله‌های ساده‌تری تبدیل و حل کنیم.

تست ۱۹ معادله  $2 \cos^2 x = \cos x + 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

$$۵ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

راه حل توجه کنید که

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow (\cos x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, 2\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

معادله مورد نظر چهار جواب در بازه  $[0, 2\pi]$  دارد.

تست ۲۰

جواب‌های کلی معادله  $\cos^2 x + \sin x - \frac{1}{4} = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۲)  $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$  (۳)  $2k\pi - \frac{7\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$  (۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ . در نتیجه، معادله مورد نظر می‌شود

$$1 - \sin^2 x + \sin x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4} = 0$$

$$(\sin x + \frac{1}{2})(\sin x - \frac{3}{2}) = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}, \sin x = \frac{3}{2} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

از طرف دیگر،  $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}, x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

تست ۲۱

جواب‌های کلی معادله  $\sin 6x = 2 \sin 3x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $\frac{2k\pi}{3}$  (۲)  $\frac{k\pi}{3}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ . در نتیجه، معادله مورد نظر می‌شود

$$2 \sin 3x \cos 3x = 2 \sin 3x \Rightarrow 2 \sin 3x (\cos 3x - 1) = 0$$

بنابراین  $\sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}, \cos 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

توجه کنید که  $\frac{2k\pi}{3}$  مضارب زوج  $\frac{\pi}{3}$  و  $\frac{k\pi}{3}$  همه مضارب صحیح  $\frac{\pi}{3}$  هستند. بنابراین مجموعه جواب‌های کلی معادله مورد نظر  $\frac{k\pi}{3}$  است ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

تست ۲۲

جواب‌های کلی معادله  $\cos 2x = 1 + \sin x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$  (۳)  $k\pi, 2k\pi - \frac{\pi}{6}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}$  (۴)  $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ . بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$1 - 2 \sin^2 x = 1 + \sin x \Rightarrow \sin x (1 + 2 \sin x) = 0$$

در نتیجه

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1 + 2 \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}, x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست ۲۳

تعداد جواب‌های معادله  $\sin \delta x \cos 2x - \cos \delta x \sin 2x = -\frac{1}{2}$  در بازه  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$  چند تا است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

راه‌حل

با استفاده از دستور سینوس تفاضل دو زاویه می‌توان معادله مورد نظر را به صورت روبه‌رو نوشت:  $\sin(\delta x - 2x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 3x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6})$

جواب‌های کلی این معادله به صورت زیر است:

$$3x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18}, k \in \mathbb{Z}, 3x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$  را پیدا می‌کنیم:

$$-\frac{\pi}{6} < \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18} < \frac{11\pi}{6} \Rightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{17}{6} \Rightarrow k = 0, 1, 2$$

$$-\frac{\pi}{6} < (2k+1)\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18} < \frac{11\pi}{6} \Rightarrow -\frac{5}{6} < k < \frac{13}{6} \Rightarrow k = 0, 1, 2$$

بنابراین معادله مورد نظر در بازه  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$  شش جواب دارد.

تست

□□□□

جواب‌های کلی معادله  $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{2}$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۴)$$

$$k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

راه‌حل

اگر از دستوره‌های سینوس مجموع و تفاضل دو زاویه استفاده کنیم، معلوم می‌شود که

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos x - \cos\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود.

تست

□□□□

معادله  $\sin^f x - \sin x = \cos^f x$  در بازه  $[-\pi, 0]$  چند جواب دارد؟

$$۴ \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

راه‌حل

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^f x - \cos^f x = \sin x \Rightarrow (\sin^f x - \cos^f x)(\sin^f x + \cos^f x) = \sin x \Rightarrow -\cos^2 x = \sin x \Rightarrow \cos^2 x = \sin(-x)$$

$$\cos^2 x = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi - \pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازه  $[-\pi, 0]$  عبارت‌اند از  $x = -\frac{\pi}{6}$  و  $x = -\frac{5\pi}{6}$ . بنابراین معادله در بازه  $[-\pi, 0]$  دو جواب دارد.

تست

□□□□

جواب‌های کلی معادله  $\sin^f x + \cos^f x = \frac{1}{2}$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\frac{k\pi + \pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{4} \quad (۳)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

راه‌حل

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin^f x + \cos^f x)^2 - 2\sin^f x \cos^f x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow -2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{-1}{4} \Rightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{-1}{4} \Rightarrow \cos 4x = -1$$

$$4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi + \pi}{2}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت مقابل هستند:

تست

□□□□

مجموع جواب‌های معادله  $\sin x + \cos x = 1$  که در بازه  $[0, 2\pi]$  قرار دارند، کدام است؟

$$5\pi \quad (۴)$$

$$4\pi \quad (۳)$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad (۲)$$

$$2\pi \quad (۱)$$

راه‌حل

راه‌حل اول اگر طرفین معادله را بر  $\sqrt{2}$  تقسیم کنیم، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت روبه‌رو هستند:  $x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi$ ,  $x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$

راه‌حل دوم طرفین معادله را به توان دومی رسانیم و آن را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم:  $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2\sin x \cos x = 0$

بنابراین جواب‌هایی که در بازه  $[0, 2\pi]$  قرار دارند، به صورت روبه‌رو هستند:  $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$ ,  $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

در نتیجه جواب‌های واقع در بازه  $[0, 2\pi]$  عبارت‌اند از  $0, 2\pi$  و  $\frac{\pi}{2}$  که مجموع آنها برابر  $\frac{5\pi}{2}$  است.



توجه کنید که جواب‌های  $\pi$  و  $\frac{3\pi}{2}$  قابل قبول نیستند، زیرا در معادله اصلی صدق نمی‌کنند. این جواب‌ها به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو

رسانده‌ایم، تولید شده‌اند. بنابراین مجموع جواب‌هایی که در بازه  $[0, 2\pi]$  قرار دارند برابر  $\frac{5\pi}{2}$  است.

**راه حل سوم** با استفاده از اتحادهای  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$  و  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$  معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x = 1 - \cos x \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله که در بازه  $[0, 2\pi]$  قرار دارند، به صورت زیر هستند:

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = 0, \frac{x}{2} = \pi \Rightarrow x = 0, x = 2\pi, \quad \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر  $\frac{5\pi}{2}$  است.

**راه حل چهارم** اگر از دستورهایی  $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$  و  $\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$  استفاده کنیم و فرض کنیم  $\tan \frac{x}{2} = t$ ، معادله مورد نظر می‌شود:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \Rightarrow 1+t^2 = 2t+1-t^2 \Rightarrow 2t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ t=1 \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

در نتیجه جواب‌های واقع در بازه  $[0, 2\pi]$  عبارت‌اند از  $0$ ،  $2\pi$  و  $\frac{\pi}{2}$  که مجموع آن‌ها برابر  $\frac{5\pi}{2}$  است.

### تست ۲۸

معادله  $\tan 3x - \tan \Delta x = 1 + \tan 3x \tan \Delta x$  چند جواب در بازه  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$  دارد؟

- ۶ (۴)                      ۴ (۳)                      ۳ (۲)                      ۲ (۱)

راه حل

اگر دو طرف معادله داده شده را بر سمت راست آن تقسیم کنیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{\tan 3x - \tan \Delta x}{1 + \tan 3x \tan \Delta x} = 1 \Rightarrow \tan(3x - \Delta x) = 1 \Rightarrow \tan(-2x) = 1 \Rightarrow -\tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 2x = -1 = \tan(-\frac{\pi}{4})$$

بنابراین  $2x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ ، پس  $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ،  $k \in \mathbb{Z}$ . اکنون توجه کنید که  $-\frac{\pi}{6} < \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} < \frac{11\pi}{6} \Rightarrow -\frac{1}{12} < k < \frac{47}{12} \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3$

بنابراین معادله مورد نظر چهار جواب در بازه  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$  دارد.

### تست ۲۹

جواب‌های کلی معادله  $\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \tan(\frac{\pi}{4} - x) = 2$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)                       $k\pi$  (۳)                       $\frac{k\pi}{4}$  (۲)                       $\frac{k\pi}{2}$  (۱)

راه حل

معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم

$$\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan x} + \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x} = 2 \Rightarrow \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 2$$

$$(1 + \tan x)^2 + (1 - \tan x)^2 = 2(1 - \tan^2 x)$$

$$2 + 2 \tan^2 x = 2 - 2 \tan^2 x \Rightarrow 4 \tan^2 x = 0 \Rightarrow \tan x = 0$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت  $x = k\pi$  است.

تعداد جواب‌های برخی معادلات مثلثاتی را می‌توانیم به کمک رسم نمودار پیدا کنیم.

## تست ۳۰

تعداد جواب‌های معادله  $(\sin x + \frac{3}{4})(\cos x - \frac{1}{5}) = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

توجه کنید که

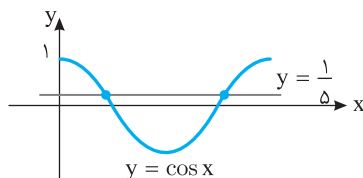
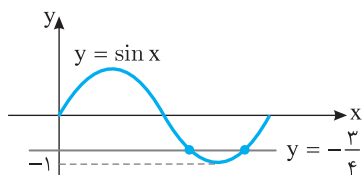
راه‌حل

$$(\sin x + \frac{3}{4})(\cos x - \frac{1}{5}) = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{4}, \cos x = \frac{1}{5}$$

از طرف دیگر، جواب‌های معادله  $\sin x = -\frac{3}{4}$  طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع  $y = \sin x$

و خط  $y = -\frac{3}{4}$  هستند. بنابراین از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که معادله  $\sin x = -\frac{3}{4}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  دو جواب دارد.

به همین ترتیب، از روی شکل زیر معلوم می‌شود که معادله  $\cos x = \frac{1}{5}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  دو جواب دارد. بنابراین معادله مورد نظر در بازه  $[0, 2\pi]$  چهار جواب دارد.



## تست ۳۱

معادله  $\frac{\sin 2x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x$  چند جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

راه‌حل

$$\sin 2x = (1 + \cos x)(1 - \cos x), \cos x \neq -1$$

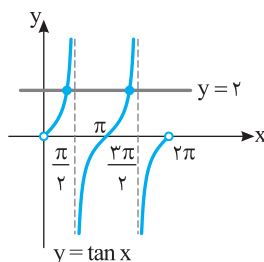
$$2 \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \sin^2 x \Rightarrow \sin x(2 \cos x - \sin x) = 0$$

جواب معادله  $\sin x = 0$  در بازه  $(0, 2\pi)$  عبارت است از  $x = \pi$  که قابل قبول نیست زیرا باعث صفر شدن مخرج کسر در معادله اصلی می‌شود.

معادله  $2 \cos x - \sin x = 0$  را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin x = 2 \cos x \Rightarrow \tan x = 2$$

با توجه به نمودار زیر، معادله دو جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد.



## دست‌گرمی

۱۰۹- معادله  $\cos(x - \frac{\pi}{4}) - \cos x = 0$  در بازه  $(0, 2\pi)$  چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۱۰- معادله  $\tan(x - \frac{\pi}{6}) - \tan 2x = 0$  چند جواب در بازه  $(-\pi, \pi)$  دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۱۱- جواب‌های کلی معادله  $\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\begin{array}{ll} (۱) & -k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \text{ و } \frac{-(2k+1)\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ (۲) & -k\pi + \frac{\pi}{۱۲} \text{ و } \frac{-(2k+1)\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴} \\ (۳) & -k\pi - \frac{\pi}{۴} \text{ و } (2k+1)\pi - \frac{\pi}{۱۲} \\ (۴) & k\pi + \frac{\pi}{۴} \text{ و } (2k+1)\pi + \frac{\pi}{۱۲} \end{array}$$

۱۱۲- جواب‌های کلی معادله  $3 \tan^2 x - 1 = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\begin{array}{llll} (۱) & k\pi + \frac{\pi}{۶} & (۲) & k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ (۳) & k\pi \pm \frac{\pi}{۶} & (۴) & \frac{k\pi \pm \pi}{۲} \end{array}$$

۱۱۳- نمودار تابع  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) - 1$  روی بازه  $\left[-\pi, \frac{3\pi}{4}\right]$  در چند نقطه خط  $y = -1$  را قطع می‌کند؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & ۲ & (۲) & ۳ \\ (۳) & ۴ & (۴) & ۵ \end{array}$$

۱۱۴- جواب‌های کلی معادله  $\sin^3 x - \sin x = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\begin{array}{llll} (۱) & x = k\pi & (۲) & x = \frac{k\pi}{۲} \\ (۳) & x = \frac{k\pi}{۴} & (۴) & x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{array}$$

۱۱۵- مجموع جواب‌های معادله  $2 \sin^2 x + \Delta \cos x = 4$  که در بازه  $[0, 2\pi]$  قرار دارند، کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & \pi & (۲) & 2\pi \\ (۳) & \frac{3\pi}{۲} & (۴) & \frac{5\pi}{۲} \end{array}$$

۱۱۶- معادله  $\sin 2x = \tan x$  در بازه  $(0, 2\pi)$  چند جواب دارد؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & ۳ & (۲) & ۴ \\ (۳) & ۵ & (۴) & ۶ \end{array}$$

معادلات مثلثاتی (۱)

آزمون ۶۳

- ۶۲۱- جواب‌های کلی معادله  $\cos 3x = \cos 2x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- (۱)  $\frac{2k\pi}{5}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{5}$  (۳)  $\frac{k\pi}{5}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{5}$
- ۶۲۲- جواب‌های کلی معادله  $\sqrt{2} \sin \frac{x}{4} - 1 = 0$  کدام‌اند؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- (۱)  $4k\pi - \pi$  یا  $4k\pi + \pi$  (۲)  $4k\pi + 2\pi$  یا  $4k\pi - \pi$   
 (۳)  $4k\pi + 3\pi$  یا  $4k\pi - \pi$  (۴)  $4k\pi + \pi$  یا  $4k\pi + 3\pi$
- ۶۲۳- نمودار تابع  $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$  در بازه  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  چند بار محور طول‌ها را قطع می‌کند؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۶۲۴- مجموع جواب‌های معادله  $\tan 4x = \tan(2x - \frac{\pi}{3})$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{13\pi}{3}$  (۲)  $\frac{5\pi}{3}$  (۳)  $\frac{2\pi}{3}$  (۴)  $\frac{9\pi}{2}$
- ۶۲۵- جواب‌های کلی معادله  $\sin x + \cos(x + \frac{\pi}{5}) = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- (۱)  $k\pi + \frac{7\pi}{20}$  (۲)  $2k\pi + \frac{\pi}{20}$  (۳)  $2k\pi - \frac{\pi}{20}$  (۴)  $k\pi - \frac{7\pi}{20}$
- ۶۲۶- جواب‌های کلی معادله  $\sin 2x \cos 2x - \sin 2x = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- (۱)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $\frac{k\pi}{4}$
- ۶۲۷- جواب‌های کلی معادله  $2 \sin^2 2x - 7 \sin 2x + 5 = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)  $2k\pi - \frac{\pi}{2}$
- ۶۲۸- معادله  $\sin 4x = \sqrt{2} \sin 2x$  چند جواب در بازه  $[0, \pi]$  دارد؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۶۲۹- معادله  $\cos 2x = \cos x - 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۶۳۰- جواب‌های کلی معادله  $\cos 2x - \sin 2x + 2 \sin^2 x = 0$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $\frac{k\pi}{2}$

سؤال	گام
۶۲۱	۱۱۲ ۱۱۴
۶۲۲	۱۱۲ ۱۱۶
۶۲۳	۱۱۷ ۱۱۹
۶۲۴	۱۱۲ ۱۱۳
۶۲۵	۱۱۲ ۱۱۵
۶۲۶	۱۱۲ ۱۱۴ ۱۲۱
۶۲۷	۱۱۸ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۲۸	۱۱۲ ۱۱۶ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۲۹	۱۱۲ ۱۱۶ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۳۰	۱۱۹ ۱۲۱

## معادلات مثلثاتی (۲)

## آزمون ۶۴

سؤال	گام
۶۳۱	۱۱۲ ۱۱۴
۶۳۲	۱۱۲ ۱۱۶
۶۳۳	۱۱۳ ۱۱۹
۶۳۴	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵
۶۳۵	۱۱۲ ۱۱۵
۶۳۶	۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۹
۶۳۷	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۳۸	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۳۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۴۰	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۲۱

- ۶۳۱- جواب‌های کلی معادله  $\cos 5x = \cos 4x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- (۱)  $\frac{2k\pi}{9}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{9}$  (۳)  $\frac{k\pi}{9}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{9}$
- ۶۳۲- جواب‌های کلی معادله  $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- (۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۳)  $2k\pi + \frac{4\pi}{3}, 2k\pi - \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi + \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}$
- ۶۳۳- تابع  $f(x) = 2 \sin 3x + 1$  در بازه  $[-\pi, 2\pi]$  چند بار به حداکثر مقدار خود می‌رسد؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۶۳۴- معادله  $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{2x}{3} = 0$  در بازه  $(0, 2\pi)$  چند جواب دارد؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶۳۵- جواب‌های کلی معادله  $\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \cot(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{12}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{24}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۴)  $k\pi - \frac{\pi}{12}$
- ۶۳۶- مجموع جواب‌های معادله  $\sqrt{2} \sin^2 x = \sin x$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟
- (۱)  $\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $\frac{5\pi}{4}$  (۴)  $\frac{7\pi}{4}$
- ۶۳۷- معادله  $2 \cos^2 x - 3 \sin x - 3 = 0$  چند جواب در بازه  $(-\pi, 0)$  دارد؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶۳۸- مجموع جواب‌های معادله  $\frac{1}{\cos 2x} - \frac{1}{\sin 4x} = 0$  در بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{\pi}{2}$  (۲)  $\pi$  (۳)  $\frac{3\pi}{4}$  (۴)  $\frac{5\pi}{6}$
- ۶۳۹- مجموع جواب‌های معادله  $\tan 2x = 3 \tan x$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟
- (۱)  $4\pi$  (۲)  $5\pi$  (۳)  $6\pi$  (۴)  $7\pi$
- ۶۴۰- مجموع جواب‌های معادله  $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{16}{3}$  در بازه  $(0, \pi)$  کدام است؟
- (۱)  $\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $\frac{3\pi}{2}$  (۴)  $\frac{5\pi}{2}$

معادلات مثلثاتی (۳)

آزمون ۶۵

۶۴۱- جواب‌های کلی معادله  $\sin \delta x = \sin 3x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $k\pi$  یا  $\frac{k\pi}{4}$       (۲)  $2k\pi$  یا  $\frac{k\pi}{4}$

(۳)  $k\pi$  یا  $\frac{k\pi + \pi}{4}$       (۴)  $2k\pi$  یا  $\frac{k\pi + \pi}{8}$

۶۴۲- معادله  $2 \cos \frac{x}{2} + 1 = 0$  در بازه  $(-\pi, 2\pi)$  چند جواب دارد؟

(۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

۶۴۳- تابع  $f(x) = -2 \cos 4x$  در بازه  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  چند بار به حداقل مقدار خود می‌رسد؟

(۱) ۳      (۲) ۴      (۳) ۵      (۴) ۶

۶۴۴- جواب‌های کلی معادله  $\cos(2x - \frac{\pi}{9}) = -\sin 2x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $\frac{k\pi + 7\pi}{2}$       (۲)  $\frac{k\pi - 7\pi}{2}$       (۳)  $\frac{k\pi - 7\pi}{2}$       (۴)  $\frac{k\pi + 7\pi}{2}$

۶۴۵- معادله  $2 \cos^3 x - \cos x = 0$  در بازه  $(0, 2\pi)$  چند جواب دارد؟

(۱) ۴      (۲) ۶      (۳) ۸      (۴) ۱۰

۶۴۶- جواب‌های کلی معادله  $\sin^2(\pi + x) - \sin x - 2 = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $k\pi - \frac{\pi}{2}$       (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$       (۳)  $2k\pi - \frac{\pi}{2}$       (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۶۴۷- معادله  $1 - \cos 2x = \sin^2 x$  چند جواب در بازه  $[0, 2\pi]$  دارد؟

(۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

۶۴۸- مجموع جواب‌های معادله  $3 \tan x - 3 \cot x = 2\sqrt{3}$  در بازه  $(\pi, 2\pi)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{19\pi}{6}$       (۲)  $\frac{17\pi}{6}$       (۳)  $\frac{13\pi}{6}$       (۴)  $\frac{7\pi}{6}$

۶۴۹- مجموع جواب‌های معادله  $1 + \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}) = \cos(3\pi - x)$  که در بازه  $(0, 2\pi)$  قرار دارند، کدام است؟

(۱)  $\frac{2\pi}{3}$       (۲)  $\pi$       (۳)  $\frac{4\pi}{3}$       (۴)  $\frac{7\pi}{3}$

۶۵۰- چند جواب معادله  $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  قرار دارند؟

(۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) صفر

سؤال	گام
۶۴۱	۱۱۲
۶۴۲	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶
۶۴۳	۱۱۳ ۱۱۹
۶۴۴	۱۱۲ ۱۱۵
۶۴۵	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۹
۶۴۶	۱۱۶ ۱۱۸ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۴۷	۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۰ ۱۲۱
۶۴۸	۱۱۲ ۱۲۱
۶۴۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۵۰	۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۱

## معادلات مثلثاتی (۴)

## آزمون ۶۶

سؤال	گام
۶۵۱	۱۱۲ ۱۱۷
۶۵۲	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶
۶۵۳	۱۱۹ ۱۲۱
۶۵۴	۱۱۲ ۱۱۵ ۱۱۷
۶۵۵	۱۲۲
۶۵۶	۱۱۲ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۵۷	۱۱۲ ۱۲۱
۶۵۸	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵ ۱۲۱
۶۵۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۲۱
۶۶۰	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۲۱ ۲۸۵

- ۶۵۱- معادله  $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin(x - \frac{\pi}{9})$  در بازه  $(0, 2\pi)$  چند جواب دارد؟  
 ۳ (۱)      ۴ (۲)      ۶ (۳)      ۸ (۴)
- ۶۵۲- مجموع جواب‌های معادله  $2 \cos 3x - 1 = 0$  که در بازه  $(0, \pi)$  قرار دارند، چقدر است؟  
 $\frac{4\pi}{3}$  (۱)       $\frac{12\pi}{9}$  (۲)       $\frac{2\pi}{3}$  (۳)       $\frac{8\pi}{9}$  (۴)
- ۶۵۳- جواب‌های کلی معادله  $2 \cos^2(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}) - 1 = 0$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) کدام است؟  
 $\frac{k\pi}{3}$  (۱)       $\frac{2k\pi}{3}$  (۲)       $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)       $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۴)
- ۶۵۴- معادله  $\frac{\sin 3x}{\cos(x - \frac{\pi}{6})} = -1$  در بازه  $(0, \pi)$  چند جواب دارد؟  
 ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)
- ۶۵۵- معادله  $(4 \cos x + 1)(5 \cos x - 3) = 0$  چند جواب در بازه  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  دارد؟  
 ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)
- ۶۵۶- جواب‌های کلی معادله  $\tan x + \cot x = 2$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )  
 $2k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۱)       $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)       $\frac{k\pi}{4}$  (۳)       $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۴)
- ۶۵۷- جواب‌های کلی معادله  $3 \tan^2 x + 4\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$  به صورت  $x = k\pi - \frac{n\pi}{6}$  هستند.  $n$  چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟ ( $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n < 6$ )  
 ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)
- ۶۵۸- معادله  $\sin^2 x + \sin^2 4x = 1$  چند جواب در بازه  $(0, \frac{\pi}{4})$  دارد؟  
 ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)
- ۶۵۹- مجموع جواب‌های معادله  $\cos^2 x - 1 = \sin^2 x$  در بازه  $(0, 3\pi)$  کدام است؟  
 $\pi$  (۱)       $2\pi$  (۲)       $3\pi$  (۳)       $4\pi$  (۴)
- ۶۶۰- تعداد جواب‌های معادله  $(2 - \sqrt{2}) \sin^2 x + \cos x - 1 = 0$  در بازه  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  کدام است؟  
 ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

معادلات مثلثاتی (۵)

آزمون ۶۷



- ۶۶۱- معادله  $\sin(x - \frac{\pi}{3}) - \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$  چند جواب در بازه  $(-\pi, 2\pi)$  دارد؟
- ۳ (۱)      ۴ (۲)      ۵ (۳)      ۶ (۴)
- ۶۶۲- جواب‌های کلی معادله  $\sqrt{2} \sin(x + \frac{5\pi}{36}) = \sqrt{2}$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{18}$  است. مجموعه مقادیر  $i$  کدام است؟
- $(k \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}, i < 18)$
- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)
- ۶۶۳- جواب‌های کلی معادله  $1 - 4 \sin^2(\delta x - \frac{\pi}{3}) = 0$  به صورت  $x = \frac{k\pi}{5} + \frac{i\pi}{30}$  است. مجموع مقادیر ممکن برای  $i$  کدام است؟
- $(0 < i < 5, i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z})$
- ۸ (۱)      ۶ (۲)      ۴ (۳)      ۳ (۴)
- ۶۶۴- معادله  $\frac{\sin(x + \frac{\pi}{4})}{\cos 2x} = 1$  در بازه  $(0, \pi)$  چند جواب دارد؟
- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      صفر
- ۶۶۵- معادله  $(4 \sin x - \sqrt{3})(4 \cos x - \sqrt{13}) = 0$  چند جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد؟
- ۲ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۶ (۴)
- ۶۶۶- جواب‌های کلی معادله  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} - x)$  به کدام صورت است؟  $(k \in \mathbb{Z})$
- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)
- $\frac{k\pi}{3}$        $\frac{2k\pi}{3}$        $2k\pi + \frac{\pi}{3}$        $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
- ۶۶۷- معادله  $\tan 2x \tan 4x = 1$  چند جواب در بازه  $(0, \frac{\pi}{2})$  دارد؟
- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)
- ۶۶۸- مجموع جواب‌های معادله  $\cos 2x = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$  در بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟
- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)
- $\frac{3\pi}{4}$        $\frac{5\pi}{4}$        $\frac{\pi}{2}$        $\frac{7\pi}{4}$
- ۶۶۹- معادله  $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟
- ۲ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۶ (۴)
- ۶۷۰- جواب‌های کلی معادله  $2 \sin^2 x + \tan^2 x = 2$  کدام است؟  $(k \in \mathbb{Z})$
- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)
- $\frac{k\pi}{4}$        $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$        $\frac{k\pi}{3}$        $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

سؤال	گام
۶۶۱	۱۱۲ ۱۱۳
۶۶۲	۱۱۲ ۱۱۶
۶۶۳	۱۱۲ ۱۱۶
۶۶۴	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵
۶۶۵	۱۲۲
۶۶۶	۱۱۲ ۱۱۴ ۱۲۱
۶۶۷	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۲۱
۶۶۸	۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۶۹	۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۱ ۲۷۹
۶۷۰	۱۱۲ ۱۱۶ ۱۲۱



## معادلات مثلثاتی (۶)

سؤال	گام
۶۷۱	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۷۲	۱۱۲ ۱۱۵ ۱۱۹
۶۷۳	۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۱ ۲۷۶ ۲۷۹
۶۷۴	۱۱۳ ۱۱۸ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۷۵	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۸ ۱۱۹
۶۷۶	۱۱۸ ۱۲۱ ۳۲۳
۶۷۷	۱۱۲ ۱۲۱
۶۷۸	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۲۱
۶۷۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۲۱
۶۸۰	۱۱۸ ۱۲۱

- ۶۷۱- مجموع جواب‌های معادله  $\sin^3 x - \sin^2 x = \cos^3 x - \cos^2 x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{9\pi}{2}$  (۲)  $5\pi$  (۳)  $\frac{11\pi}{2}$  (۴)  $\frac{13\pi}{2}$
- ۶۷۲- جواب‌های کلی معادله  $\sin^2(x + \frac{\pi}{9}) + 2\sin^2(x - \frac{7\pi}{18}) = 2$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{9}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{9}$  (۴)  $k\pi - \frac{\pi}{3}$
- ۶۷۳- معادله  $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos 2x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟
- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۶۷۴- مجموع جواب‌های معادله  $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \sqrt{3}$  در بازه  $(0, \pi)$  کدام است؟
- (۱)  $2\pi$  (۲)  $\frac{\pi}{2}$  (۳)  $3\pi$  (۴)  $\frac{7\pi}{2}$
- ۶۷۵- مجموع جواب‌های معادله  $\cos(2\pi \sin x) = -1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟
- (۱)  $3\pi$  (۲)  $4\pi$  (۳)  $5\pi$  (۴)  $6\pi$
- ۶۷۶- معادله  $\sin(x + \frac{\pi}{12}) = 3\sin(x - \frac{\pi}{12})$  چند جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶۷۷- جواب‌های کلی معادله  $\cos(x + \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{4}$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- (۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
- ۶۷۸- معادله  $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 2x$  چند جواب در بازه  $[0, 2\pi]$  دارد؟
- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۶۷۹- معادله  $\frac{\tan^3 x - \tan x}{\tan \Delta x + \tan x} = \frac{1 + \tan x \tan^3 x}{1 - \tan x \tan \Delta x}$  چند جواب در بازه  $(0, \frac{\pi}{2})$  دارد؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر
- ۶۸۰- معادله  $3 \tan x + k \cot x = 2$  جواب دارد. حدود  $k$  کدام است؟
- (۱)  $k > \frac{1}{3}$  (۲)  $0 \leq k \leq \frac{1}{3}$  (۳)  $k \leq \frac{1}{3}$  (۴)  $-\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{3}$

آزمون فصل دوم (۱) (برگزیده کنکورهای سراسری)

آزمون ۶۹

سؤال	گام
۶۸۱	۸۲ ۹۲
۶۸۲	۸۲ ۹۲ ۹۷
۶۸۳	۱۰۶ ۱۰۹
۶۸۴	۱۰۱
۶۸۵	۹۵ ۹۷
۶۸۶	۱۰۲ ۱۰۵
۶۸۷	۹۲ ۱۱۲
۶۸۸	۱۱۲ ۱۱۵
۶۸۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵ ۱۱۶
۶۹۰	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵

۶۸۱- اگر  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، مقدار  $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۲ (۴) ۳

ریاضی - ۹۱

۶۸۲- ساده شده کسر  $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta}$  کدام است؟

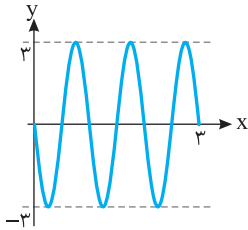
- (۱)  $2 \cos^{-2} \theta$  (۲)  $8 \sin^{-2} \theta$  (۳)  $16 \cos^{-4} \theta$  (۴)  $16 \sin^{-4} \theta$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۶۸۳- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  است. مقدار  $ab$  کدام است؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

- (۱) -۶  
(۲) -۳  
(۳)  $\frac{4}{5}$   
(۴) ۶



تجربی - ۹۶

۶۸۴- اگر  $\tan x = \frac{4}{3}$ ، مقدار  $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{3}{2}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

تجربی - ۹۳

۶۸۵- اگر  $\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}$ ، مقدار  $\cos 2x$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{2}{9}$  (۲)  $-\frac{1}{9}$  (۳)  $\frac{1}{9}$  (۴)  $\frac{2}{9}$

تجربی - ۹۴

۶۸۶- اگر  $\tan \beta = \frac{1}{2}$  و  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ ، مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{0}{45}$  (۲)  $\frac{0}{6}$  (۳)  $\frac{0}{75}$  (۴)  $\frac{0}{8}$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۶۸۷- جواب‌های کلی معادله  $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$  (۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۶۸۸- جواب‌های کلی معادله  $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط  $\cos x \neq 0$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۶۸۹- مجموع جواب‌های معادله  $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\pi}{4}$  (۲)  $\frac{5\pi}{4}$  (۳)  $\frac{3\pi}{2}$  (۴)  $\frac{7\pi}{4}$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۶۹۰- مجموع جواب‌های معادله  $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{14\pi}{3}$  (۲)  $4\pi$  (۳)  $\frac{9\pi}{2}$  (۴)  $5\pi$

آزمون فصل دوم (۲) (برگزیده کنکورهای سراسری)

آزمون ۷۰

سؤال	گام
۶۹۱	۹۲ ۹۷ ۲۷۵
۶۹۲	۸۲ ۹۲
۶۹۳	۹۲ ۱۰۶ ۱۰۹
۶۹۴	۹۶ ۹۷
۶۹۵	۱۰۵
۶۹۶	۹۷ ۱۱۲ ۱۲۱ ۲۷۶
۶۹۷	۹۷ ۱۱۲ ۱۱۶ ۱۱۸ ۱۲۱
۶۹۸	۹۷ ۱۱۲ ۱۱۴ ۱۲۱
۶۹۹	۹۷ ۱۱۲ ۱۱۵ ۱۲۱
۷۰۰	۱۱۲ ۱۱۹ ۱۲۱

تجربی - ۹۵

۶۹۱- اگر  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$  مقدار  $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{3}{8}$  (۳)  $\frac{3}{8}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

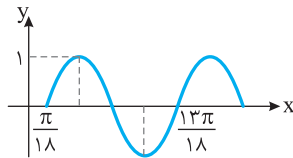
خارج از کشور تجربی - ۹۴

۶۹۲- حاصل عبارت  $\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ}$  با فرض  $\tan 2^\circ = \frac{1}{4}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{5}{8}$

ریاضی - ۹۵

۶۹۳- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $y = a - 2 \cos(bx + \frac{\pi}{2})$  است. مقدار  $a + b$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲

ریاضی - ۹۶

۶۹۴- حاصل  $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\sqrt{6}$  (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴)  $2\sqrt{3}$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۶۹۵- اگر  $\tan \alpha = 2$  و  $\tan \beta = \frac{1}{3}$  مقدار  $\tan(2\alpha - \beta)$  کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۳

تجربی - ۹۲

۶۹۶- جواب‌های کلی معادله  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۶۹۷- جواب‌های کلی معادله  $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$  کدام است؟

- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{3}$  (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

تجربی - ۹۱

۶۹۸- جواب‌های کلی معادله  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $\frac{k\pi}{3}$  (۲)  $\frac{2k\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

تجربی - ۹۴

۶۹۹- جواب‌های کلی معادله  $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $\frac{k\pi - \pi}{2}$  (۲)  $\frac{k\pi + \pi}{2}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{8}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{8}$

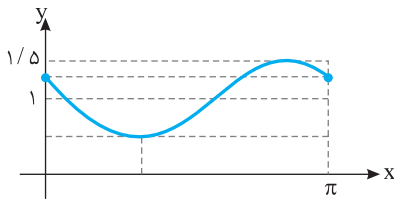
۷۰۰- نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله  $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$  روی دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی هستند؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) مثلث قائم‌الزاویه (۴) مثلث متساوی‌الساقین

## آزمون فصل دوم (۳) (برگزیده کنکورهای سراسری)

## آزمون ۷۱



۷۰۱- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = 1 + a \sin\left(bx - \frac{\pi}{6}\right)$  است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

مقدار  $a+b$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
 (۲) ۱  
 (۳)  $\frac{3}{2}$   
 (۴) ۲

ریاضی - ۹۵

(۴)  $2 \cos 2^\circ$

(۳)  $2 \sin 2^\circ$

(۲)  $\cos 2^\circ$

(۱)  $\sin 2^\circ$

۷۰۲- ساده شده عبارت  $\cos 5^\circ (\tan 7^\circ + \tan 1^\circ)$  برابر کدام است؟

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۷۰۳- جواب‌های کلی معادله  $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $\frac{k\pi - \pi}{2 \cdot 6}$   
 (۲)  $\frac{k\pi + \pi}{2 \cdot 6}$   
 (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{6}$   
 (۴)  $k\pi - \frac{\pi}{6}$

تجربی - ۹۵

(۴)  $k\pi - \frac{\pi}{3}$

(۳)  $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$

(۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۱)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۷۰۴- جواب‌های کلی معادله  $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$  کدام است؟

تجربی - ۹۶

(۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۲)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

(۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۷۰۵- جواب‌های کلی معادله  $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$  کدام است؟

تجربی - ۹۷

(۴)  $\frac{k\pi + \pi}{4 \cdot 8}$

(۳)  $\frac{k\pi + 3\pi}{2 \cdot 8}$

(۲)  $\frac{k\pi + \pi}{2 \cdot 8}$

(۱)  $\frac{k\pi}{4}$

۷۰۶- جواب‌های کلی معادله  $\tan x \tan 3x = 1$  کدام است؟

ریاضی - ۹۲

(۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(۳)  $\frac{2k\pi + \pi}{3 \cdot 4}$

(۲)  $\frac{2k\pi - \pi}{3 \cdot 4}$

(۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۷۰۷- جواب‌های کلی معادله  $2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x$  کدام است؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۴

(۴)  $\frac{k\pi + \pi}{4 \cdot 8}$

(۳)  $\frac{k\pi - \pi}{4 \cdot 8}$

(۲)  $\frac{k\pi + \pi}{4 \cdot 16}$

(۱)  $\frac{k\pi - \pi}{4 \cdot 16}$

۷۰۸- جواب‌های کلی معادله  $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$  به کدام صورت است؟

خارج از کشور تجربی - ۹۵

(۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۷۰۹- جواب‌های کلی معادله  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$  کدام است؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

(۴)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

(۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۷۱۰- جواب‌های کلی معادله  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$  با شرط  $x \neq \frac{k\pi}{2}$  کدام است؟

سؤال	گام
۷۰۱	۱۰۹
۷۰۲	۹۴ ۹۵
۷۰۳	۱۰۵ ۱۱۲
۷۰۴	۱۱۲ ۱۱۶ ۱۱۸ ۱۲۱
۷۰۵	۱۱۲ ۱۱۶ ۱۲۱
۷۰۶	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵
۷۰۷	۹۶ ۱۱۲ ۱۱۴ ۱۲۱
۷۰۸	۱۰۶ ۱۱۲
۷۰۹	۹۵ ۱۱۲ ۱۲۱
۷۱۰	۱۱۲ ۱۲۱

آزمون فصل دوم (۴) (برگزیده کنکورهای سراسری)

آزمون ۷۲

سؤال	گام
۷۱۱	۱۰۹
۷۱۲	۷۵ ۹۵
۷۱۳	۱۰۵
۷۱۴	۱۱۲ ۱۱۳
۷۱۵	۹۷ ۱۱۲ ۱۱۶ ۱۱۹ ۱۲۱ ۲۷۶
۷۱۶	۱۱۲ ۱۲۱
۷۱۷	۱۱۲ ۱۲۱
۷۱۸	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۲۱
۷۱۹	۱۱۲ ۱۱۴ ۱۲۱
۷۲۰	۱۲۰ ۱۲۱

- ۷۱۱- شکل زیر نمودار تابع  $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$  در بازه  $[0, 4]$  است. مقدار  $b$  کدام است؟ ریاضی-۹۷
- 
- (۱) ۲-  
(۲) ۱-  
(۳) ۱  
(۴) ۲
- ۷۱۲- اگر  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ربع چهارم باشد، مقدار  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$  کدام است؟ خارج از کشور تجربی-۹۶
- (۱)  $-\frac{2}{3}$  (۲)  $-\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{2}{3}$
- ۷۱۳- اگر  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5}$ ، مقدار  $\tan 2\alpha$  کدام است؟ خارج از کشور ریاضی-۸۸
- (۱)  $\frac{1}{5}$  (۲)  $\frac{1}{8}$  (۳)  $\frac{2}{4}$  (۴)  $\frac{2}{5}$
- ۷۱۴- جواب‌های کلی معادله  $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$  کدام است؟ خارج از کشور تجربی-۹۷
- (۱)  $\frac{k\pi}{5}$  (۲)  $\frac{2k\pi}{5}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{5}$  (۴)  $\frac{(2k+1)\pi}{5}$
- ۷۱۵- مجموع جواب‌های معادله  $\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$  در بازه  $[0, \pi]$  برابر کدام است؟ ریاضی-۹۵
- (۱)  $\frac{7\pi}{4}$  (۲)  $\frac{9\pi}{4}$  (۳)  $\frac{5\pi}{2}$  (۴)  $\frac{11\pi}{3}$
- ۷۱۶- مجموع جواب‌های معادله  $\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x)$  در بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟ تجربی-۹۳
- (۱)  $\frac{3\pi}{4}$  (۲)  $\frac{5\pi}{4}$  (۳)  $\frac{3\pi}{2}$  (۴)  $\frac{7\pi}{4}$
- ۷۱۷- جواب‌های کلی معادله  $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$  کدام است؟ ریاضی-۹۳
- (۱)  $\frac{k\pi}{2}$  (۲)  $\frac{k\pi + \pi}{2}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$
- ۷۱۸- جواب‌های کلی معادله  $\frac{\sin x + \sin 2x}{\cos x + \cos 2x} = \cot x$  کدام است؟ ریاضی-۹۴
- (۱)  $\frac{k\pi}{5}$  (۲)  $\frac{2k\pi}{5}$  (۳)  $\frac{3k\pi}{5}$  (۴)  $\frac{1}{5}(2k+1)\pi$
- ۷۱۹- جواب‌های کلی معادله  $\sin x \sin 3x = \cos 2x$  کدام است؟ ریاضی-۹۶
- (۱)  $\frac{k\pi}{2}$  (۲)  $\frac{k\pi + \pi}{3}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)  $\frac{k\pi}{3}$
- ۷۲۰- جواب‌های کلی معادله  $\sin 2x \sin 4x + \sin^2 x = 1$  کدام است؟ ریاضی-۹۷
- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{(2k+1)\pi}{6}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{6}$  (۴)  $\frac{k\pi}{6}$

فایل pdf آزمون‌های جامع تألیفی این فصل (و البته فصل‌های دیگر کتاب!) را می‌توانید با اسکن QR Code در انتهای پیشگفتار یا با مراجعه به سایت انتشارات الگو به آدرس [www.olgoobooks.ir](http://www.olgoobooks.ir) دریافت کنید.