



مشاوره تحصیلی هیوا

تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

مشاوره تخصصی ثبت نام مدارس ، برنامه ریزی درسی و آمادگی
برای امتحانات مدارس

برای ورود به صفحه مشاوره مدارس کلیک کنید

برای ورود به صفحه نمونه سوالات امتحانی کلیک کنید

تماس با مشاور تحصیلی مدارس

۹۰۹۹۰۷۱۷۸۹



تماس از تلفن ثابت

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

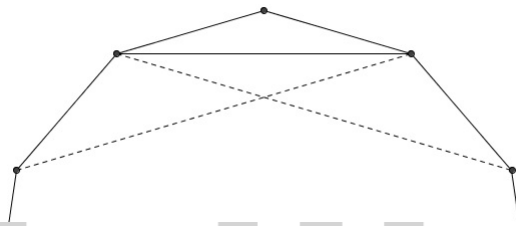
به نام او

راه حل سؤالات مرحله دوم بیست و ششمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۸۷

۱. به کمک استقرا می توان به سادگی نشان داد که هرگاه $n - 3$ قطر نامتقاطع از یک n ضلعی محدب رسم شود، آن را به $n - 2$ مثلث تقسیم می کند. به این صورت که یکی از قطرهای رسم شده را در نظر بگیرید و n ضلعی را از روی آن قطر به دو چندضلعی با تعداد ضلع های کم تر تقسیم کنید و به کمک استقرا حکم مورد نظر را نتیجه بگیرید. تنها حالت پایه ی $n = 3$ باقی می ماند که از آن جا که هیچ قطری رسم نشده است، چندضلعی به یک مثلث تقسیم می شود.

حال در مسئله ی اصلی هنگامی که $n > 3$ است هیچ کدام از مثلث ها نمی توانند با n ضلعی سه ضلع مشترک داشته باشند و ضمناً هر مثلث حداقل یک و حداکثر دو ضلع مشترک با n ضلعی دارد. با توجه به این که $n - 2$ مثلث و n ضلع داریم، دقیقاً دو تا از مثلث ها دو ضلع مشترک با n ضلعی دارند و بقیه تنها یک ضلع مشترک دارا هستند.

یکی از این دو مثلث را در نظر می گیریم. این مثلث می تواند یکی از n مثلثی باشد که دو ضلع مجاور از n ضلعی را شامل هستند. حال سومین ضلع از این مثلث را در نظر بگیرید که حتماً یک قطر از چندضلعی است. مثلث دیگری که این قطر یکی از ضلع های آن است، می تواند یکی از دو مثلثی باشد که این قطر و یکی از دو ضلع n ضلعی که مجاور ضلع های مثلث قبلی هستند را شامل است. (به شکل زیر دقت کنید).

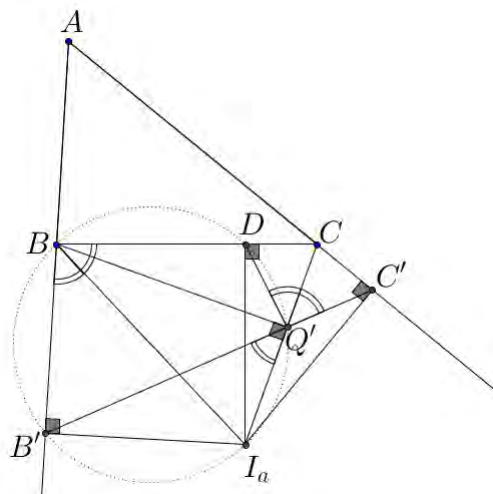


حال به همین ترتیب قطری که مثلث جدید شامل است را در نظر بگیرید. برای مثلث سوم هم با همین استدلال دو حالت داریم. با ادامه ی همین فرآیند برای هر مثلث جدید (به جز اولین و آخرین مثلث که به ترتیب n حالت و ۱ حالت داشتند) دو حالت محتمل است. اما دقت کنید که هر آرایش از مثلث ها دو بار شمرده شده است، چرا که در هر آرایش دو مثلث وجود دارد که با چندضلعی دارای دو ضلع مشترک است و شروع از هر کدام می تواند به همین آرایش منجر شود. پس تعداد کل حالت ها برابر است با $\frac{n \times 2^{n-4}}{2} = n \cdot 2^{n-5}$.

۲. D را نقطه ی تماس دایره ی محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC از مثلث بگیرید. در این صورت $CD = CC'$ چرا که دو مثلث $I_a C' C$ و $I_a D C$ به دلیل داشتن یک زاویه ی 90° درجه و دو ضلع برابر هم نهشت هستند. Q' را پای عمود وارد از B بر $I_a C$ بگیرید. در این صورت مثلث های DCQ' و $C' C Q'$ هم نهشت هستند، زیرا $\angle Q' C D = \angle Q' C C'$ ، $Q' C = Q' C$ و $CD = CC'$. در نتیجه $\angle C' Q' C = \angle D Q' C$. از آن جا که زاویه های $\angle B Q' I_a$ و $\angle B D I_a$ قائمه هستند، چهارضلعی $BDQ' I_a$ محاطی است. در نتیجه $\angle D Q' C = \angle D B I_a$. ضمناً دقت کنید که $B I_a$ نیم سازه زاویه ی $\angle D B B'$ است.

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

و لذا $\angle DBI_a = \angle B'BI_a$. قائمه بودن زاویه $\angle BB'I_a$ نتیجه می‌دهد که نقطه B' هم روی دایره‌ی محیطی چهارضلعی $BDQ'I_a$ قرار دارد، پس نتیجه می‌گیریم که $\angle B'BI_a = \angle B'Q'I_a$. با جمع‌بندی این رابطه‌ها می‌فهمیم که $\angle B'Q'I_a = \angle CQ'C'$ پس نقطه‌های B' ، Q' و C' روی یک خط قرار دارند. در نتیجه نقطه‌ی Q' که محل تقاطع I_aC و $B'C'$ است همان نقطه‌ی Q است. پس در کل نشان دادیم که $BQ \perp I_aC$. مشابه همین استدلال نشان می‌دهد که $CP \perp I_aB$.



حال دقت کنید که CI نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی C است و در نتیجه بر CI_a که نیم‌ساز خارجی این زاویه است عمود می‌باشد. این نکته با توجه به این که $BQ \perp I_aC$ نشان می‌دهد که $BQ \parallel IC$ و مشابه همین نتیجه می‌شود که $CP \parallel BI$. پس چهارضلعی $BMCI$ یک متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه فاصله‌ی دو رأس M و I تا قطر BC مساوی است. اما فاصله‌ی I از BC برابر طول شعاع دایره‌ی محیطی داخلی مثلث است و بنابراین اثبات حکم به پایان می‌رسد.

۳. اگر $f^{1387}(a) = a$ ، آن‌گاه با اثر دادن تابع f روی دو طرف این تساوی می‌توان دید که

$$f^{1387}(f(a)) = f^{1388}(a) = f(f^{1387}(a)) = f(a)$$

و دقت کنید که $f(a) \neq a$ ، پس $f(a)$ جوابی متمایز از a برای معادله‌ی $f^{1387}(x) = x$ است. با اعمال دوباره‌ی تابع f بر دو طرف عبارت بالا می‌توان دید که

$$f^{1387}(f(f(a))) = f^{1389}(a) = f(f(f^{1387}(a))) = f(f(a))$$

پس $f(f(a))$ هم جواب دیگری برای این معادله است. اما دقت کنید که $f(f(a)) \neq f(a)$. حال ادعا می‌کنیم که $f(f(a))$ و a هم متمایز هستند. در غیر این صورت اگر $f^2(a) = a$ باشد، داریم:

$$f^{1388}(a) = f^{1386}(f^2(a)) = f^{1386}(a) = f^{1384}(f^2(a)) = f^{1384}(a) = \dots = f^4(a) = f^2(f^2(a)) = f^2(a)$$

اما $f^{1388}(a) = f(f^{1387}(a)) = f(a)$ پس باید $f^2(a) = f(a)$ باشد که امکان ندارد. در نتیجه در کل سه جواب حقیقی متمایز برای معادله‌ی $f^{1387}(x) = x$ یافته‌ایم.

می‌توان به سادگی چک کرد که ترکیب دو تابع به فرم $\frac{ax+b}{cx+d}$ هم به همین فرم است (البته با a, b, c و

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

d متفاوت). این نتیجه می‌دهد که تابع $f^{۱۳۸۷}(x)$ تابعی به فرم $\frac{mx+n}{px+q}$ است که معادله‌ی $\frac{mx+n}{px+q} = x$ سه جواب حقیقی متمایز دارد. جواب‌های این معادله به وضوح جواب‌های معادله‌ی $px^2 + (q-m)x - n = 0$ هم هستند که یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر دو است. از آنجا که یک چندجمله‌ای ناصفر از درجه‌ی حداکثر دو، حداکثر دو جواب حقیقی دارد؛ این چندجمله‌ای باید متحد با صفر باشد که این نتیجه می‌دهد که $q = m$ و $n = 0$. پس داریم $f^{۱۳۸۷}(x) = \frac{mx+n}{px+q} = \frac{mx}{m} = x$ و این یعنی برای هر عدد حقیقی x ، $f^{۱۳۸۷}(x) = x$.

۴. راه‌حل اول. $4(a^3 + 1)$ و $4(a^6 + 1)$ هر دو مکعب کامل هستند، پس تقسیم آن‌ها یعنی $\frac{4(a^6+1)}{4(a^3+1)}$ هم مکعب کامل است. اگر $a > 1$ باشد، $a^6 - a^3 + 1 < a^6 = (a^2)^3$ و از طرف دیگر $a^6 - a^3 + 1 > a^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1 = (a^2 - 1)^3$ ؛ زیرا:

$$\begin{aligned} & 3a^4 - a^3 - 3a^2 + 2 \\ &= (a^4 - a^3) + (2a^4 - 3a^2) + 2 \\ &= a^3(a - 1) + a^2(2a - 3) + 2 > 0. \end{aligned}$$

اما $(a^2 - 1)^3$ و $(a^2)^3$ دو مکعب کامل متوالی هستند و عددی که بین آن‌ها قرار دارد نمی‌تواند مکعب کامل باشد. پس a مجبور است برابر یک باشد که در این صورت هم همه‌ی جمله‌ها برابر ۸ و در نتیجه مکعب کامل هستند.

راه‌حل دوم. اگر $a > 1$ باشد، $4(a^n + 1)$ تابعی اکیداً صعودی بر حسب n است. حال دقت کنید که $4(a^{n+2} + 1)$ و همین‌طور $4(a^{n+3} + a^2) = 4(a^{n+3} + a^2)$ مکعب کامل هستند. اما تفاضل این دو مقدار برابر $4a^3 - 4$ است که مستقل از n است. این یعنی تفاضل دو مکعب کامل که هر دو با افزایش n زیاد می‌شوند مقداری ثابت است که امکان ندارد. این تناقض نشان می‌دهد که a باید برابر یک باشد.

راه‌حل سوم. از لم زیر که حالت خاصی از گزاره‌ی است که به لم دو خط معروف است استفاده می‌کنیم: لم. فرض کنید x عددی طبیعی و p عددی اول و فرد باشد که $p \mid x+1$. اگر n عددی طبیعی و فرد باشد، تعداد عوامل p در $x^n + 1$ برابر تعداد عوامل p در $x+1$ به اضافه‌ی تعداد عوامل p در n است.

اثبات. تعداد عوامل p در عدد طبیعی m را با $\|m\|_p$ نمایش می‌دهیم و حکم را به استقرا روی $\|n\|_p$ ثابت می‌کنیم.

اگر n بر p بخش‌پذیر نباشد، با توجه به این که $(x^n + 1) = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1)$ باید نشان دهیم که $x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ برای این منظور دقت کنید که:

$$x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1 \equiv (-1)^{n-1} - (-1)^{n-2} + \dots - (-1) + 1 \equiv n \not\equiv 0 \pmod{p}$$

اگر n تنها یک عامل p داشته باشد، باید نشان دهیم که تعداد عوامل p در $x^n + 1$ یکی بیش‌تر از عوامل p در $x+1$ است. در این حالت می‌توان نوشت $n = pm$ که m بر p بخش‌پذیر نیست. حال طبق استدلال

قسمت قبل

$$\|x^{mp} + 1\|_p = \|(x^p)^m + 1\|_p = \|x^p + 1\|_p$$

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

پس کافی است حکم این قسمت را برای حالت $n = p$ ثابت کنیم. از آن جا که $x + 1$ بر p بخش پذیر است می توان عدد صحیح t یافت که $x = tp - 1$

$$x^p + 1 = (tp - 1)^p + 1 = \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} (tp)^i (-1)^{p-i} = tp \left(\sum_{i=2}^p \binom{p}{i} (tp)^{i-1} (-1)^{p-i} + p \right) = (x+1)(\dots)$$

از آن جا که تمام $\binom{p}{i}$ ها بر p بخش پذیر هستند، عبارت داخل پرانتز تنها یک عامل p دارد. این نشان می دهد که تعداد عوامل p در $x^p + 1$ یکی بیش تر از عوامل p در $x + 1$ است. حال فرض کنید که حکم برای اعدادی که k عامل p دارند ثابت شده باشد و n و $k + 1$ عامل p داشته باشد، در این صورت عدد طبیعی فرد m وجود دارد که $n = mp$ و k عامل p دارد. حال با توجه به فرض استقرا داریم:

$$\|x^{mp} + 1\|_p = \|(x^p)^m + 1\|_p = \|x^p + 1\|_p + \|m\|_p = \|x + 1\|_p + \|p\|_p + \|m\|_p = \|x + 1\|_p + \|mp\|_p$$

پس حکم برای هر عدد طبیعی برقرار است.

□

حال دقت کنید که $\varphi(a^r + 1) = \varphi(a + 1)(a^r - a + 1)$ اگر $a > 1$ باشد، $a^r - a + 1$ عدد فردی بزرگ تر از یک است، پس عامل اول فردی مثل p دارد. با استفاده از لم بالا داریم:

$$\|\varphi(a^{rp} + 1)\|_p = \|a^{rp} + 1\|_p = \|a^r + 1\|_p + \|p\|_p = \|\varphi(a^r + 1)\|_p + 1$$

اما $\varphi(a^r + 1)$ و $\varphi(a^{rp} + 1)$ هر دو مکعب کامل هستند، پس تعداد عوامل p در آن ها باید مضرب ۳ باشد که چون اختلاف این تعداد برابر یک است امکان ندارد. در نتیجه a نمی تواند بیش تر از ۱ باشد و در نتیجه تنها $a = 1$ ممکن است.

۵. مجموعه $\{1, 2, \dots, 9\}$ را S می نامیم. مسئله را برای شماره های با هر تعداد رقم مطرح می کنیم و سعی می کنیم حداکثر تعداد شماره های ممکن با n رقم را پیدا کنیم که هر دو شماره ای انتخاب شده یا حداقل در دو رقم اختلاف داشته باشند و یا در یک رقم حداقل دو واحد اختلاف داشته باشند. می توان یک شماره n رقمی با ارقام موجود در مجموعه S را به صورت یک n تایی مرتب از اعضای مجموعه S دید که آن را با S^n نمایش می دهیم. به استقرا روی n نشان می دهیم حداکثر تعداد اعضایی از S^n که می توانند انتخاب شوند تا شرط مسئله را برآورده کنند برابر $\frac{9^{n+1}}{4}$ است. حکم برای حالت $n = 1$ به سادگی و با اندکی چک کردن ساده به دست می آید. (حتی می شد $n = 0$ را به عنوان پایه ای استقرا در نظر گرفت!) حال فرض کنید که حکم برای $n - 1$ برقرار باشد و ما می خواهیم حداکثر n تایی هایی مرتب با خاصیت مطلوب را بیابیم. اعضای S^n را با توجه به عضو اول آن ها می توان به ۹ دسته تقسیم کرد. اعضایی که عضو اول آن ها ۱ است را A_1 ، آن هایی که عضو اول آن ها ۲ است را A_2 و ... واضح است که برای هر $i \in S$ تعداد اعضای A_i برابر 9^{n-1} است (برای هر جای گاه یکی از عناصر S باید انتخاب شود و بنابراین ۹ حالت داریم). بنابراین تعداد عناصر S^n هم برابر 9^n خواهد بود. حال دقت کنید که هر عنصر A_1 را می توان با تغییر عضو اولش از یک به دو به عنصری از A_2 تبدیل کرد و بالعکس. بنابراین هر عضو از A_1 را با یک عضو از A_2 جفت می شود، به گونه ای که تنها در رقم اول تفاوت داشته باشند. توجه کنید

هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

که از آن جا که دو شماره‌ی یک جفت در یک رقم و آن هم تنها یک واحد اختلاف دارند، نمی‌توانند هر دو جزء شماره‌های انتخابی باشند. بنابراین از هر جفت معرفی شده حداکثر یک عضو انتخاب می‌شود و در نتیجه تعداد اعضای انتخابی از $A_1 \cup A_2$ حداکثر برابر $9^{n-1} = \frac{|A_1|+|A_2|}{2}$ است. به همین ترتیب تعداد اعضای انتخابی از $A_3 \cup A_4, A_5 \cup A_6$ و $A_7 \cup A_8$ هم حداکثر همین 9^{n-1} است. اما در مورد A_9 دقت کنید که رقم اول تمام اعضای A_9 یکسان است و بنابراین اگر اختلافی در دو عنصر انتخاب شده باشد، تفاوت در $n-1$ رقم بعدی است. دقت کنید که یک تناظر بین اعضای S^{n-1} و A_9 با اضافه کردن و یا برداشتن رقم ۹ از ابتدای شماره وجود دارد. بنابراین طبق فرض استقرا حداکثر $\frac{9^{n-1}+1}{2}$ تا از اعضای A_9 را می‌توان انتخاب کرد. بنابراین در نهایت تعداد کل شماره‌های انتخابی حداکثر برابر است با:

$$9^{n-1} + 9^{n-1} + 9^{n-1} + 9^{n-1} + \frac{9^{n-1} + 1}{2} = \frac{9 \times 9^{n-1} + 1}{2} = \frac{9^n + 1}{2}$$

بنابراین اثبات استقرا به پایان می‌رسد. دقت کنید که اگر همه‌ی n تایی‌هایی که زوجیت مجموع ارقامشان با n یکی است را انتخاب کنیم تعدادشان برابر همین مقدار حداکثر است. از طرفی اگر دو شماره‌ی متفاوت با این خاصیت را در نظر بگیریم، نمی‌توانند تنها در یک شماره و آن هم یک واحد اختلاف داشته باشند، زیرا در این صورت زوجیت مجموع ارقام آن‌ها متفاوت خواهد شد. بنابراین می‌توان به تعداد حداکثر معرفی شده عضو انتخاب کرد.

در ادامه نشان می‌دهیم که تنها یک راه (همین راه بالا) برای انتخاب $\frac{9^n+1}{2}$ شماره‌ی n رقمی با خاصیت خواسته شده وجود دارد. این حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. باز هم صحت گزاره در حالت $n=1$ با یک بررسی ساده قابل چک کردن است. (در این جا هم می‌توان $n=0$ را به عنوان پایه‌ی استقرا در نظر گرفت.) فرض کنید حکم برای $n-1$ برقرار باشد. طبق بالا برای رسیدن به حداکثر باید از A_9 عضو انتخاب شود که طبق فرض استقرا تنها به یک صورت امکان دارد. (یادآوری می‌کنیم که اعضای A_9 همان اعضای S^{n-1} هستند که یک رقم ۹ به ابتدای آن‌ها اضافه شده است.) دقت کنید که اعضای A_9 که انتخاب می‌شوند دقیقاً اعضای A_9 هستند که مجموع ارقام آن‌ها زوجیت متفاوتی با $n-1$ و بنابراین زوجیت یکسانی با n دارد. (زیرا با اضافه شدن رقم ۹ به ابتدای شماره زوجیت مجموع رقم‌ها تغییر می‌کند.) حال مشابه جفت کردنی که در مورد اعضای A_1 و A_2 در بالا اتفاق افتاد می‌توان اعضای A_8 و A_9 را هم با یکدیگر جفت کرد، به گونه‌ای که اعضای هر جفت تنها در رقم اول متفاوت باشند. برای رسیدن به حداکثر بالا باید از هر جفت دقیقاً یک عضو انتخاب شود. اما در $\frac{9^{n-1}+1}{2}$ تا از جفت‌ها شماره‌ای که رقم اولش ۹ بود انتخاب شده است. بنابراین از مابقی زوج‌ها باید عنصری از A_8 انتخاب شود که باز هم دارای این خاصیت است که زوجیت مجموع ارقامش با n یکی است. در ادامه اعضای A_7 و A_8 را با هم جفت می‌کنیم و استدلال قبلی را این بار برای این دو تکرار می‌کنیم. با ادامه‌ی این استدلال تا رسیدن به A_1 می‌بینیم که همه‌ی اعداد انتخاب شده باید به صورت مثالی که گفته شد باشند و بنابراین یک راه یکتا برای انتخاب این تعداد شماره وجود دارد.

۶. ابتدا باید این فرض را به صورت مسئله اضافه کرد که زاویه‌ی $\angle B$ قائمه نیست!

با استفاده از روابط مربوط به قوت نقطه‌ی T نسبت به دایره‌ی محیطی ABC می‌فهمیم $OT^2 = R^2 - OT^2$

هیاوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

که $TA.TB$ شعاع دایره است. (این نتیجه را می‌شد با استفاده از رابطه‌ی استوارت در مثلث OAB و قاطع OT هم به دست آورد.) با توجه به تشابه دو مثلث قائم‌الزویه ATH و BTH می‌توان نتیجه گرفت که $TA.TB = TH^2$ و لذا:

$$OT^2 = R^2 - TH^2 = R^2 - AH^2 \cdot \cos^2(\angle B)$$

با استدلال‌های کاملاً مشابه می‌توان نتیجه گرفت که $(OT')^2 = R^2 - AH^2 \cdot \cos^2(\angle C)$. دقت کنید که تا کنون از فرض $AC = 2OT$ استفاده نکرده‌ایم. حال اگر این رابطه برقرار باشد، داریم:

$$OT = \frac{1}{2}AC = R \cdot \sin(\angle B) \Rightarrow R^2 \sin^2(\angle B) = R^2 - AH^2 \cos^2(\angle B) \Rightarrow R^2 = AH^2$$

پس طول ارتفاع AH برابر طول شعاع دایره یعنی R است. (دقت کنید که در این جا از قائمه نبودن $\angle B$ و در نتیجه صفر نبودن کسینوسش استفاده کردیم.) حال اگر روابط مشابهی را برای پاره خط OT' بنویسیم حکم نتیجه می‌شود:

$$(OT')^2 = R^2 - AH^2 \cdot \cos^2(\angle C) = R^2(1 - \cos^2(\angle C)) = R^2 \cdot \sin^2 \angle C \\ \Rightarrow OT' = R \cdot \sin(\angle C) = \frac{1}{2} \times 2R \cdot \sin(\angle C) = \frac{1}{2}AB$$

