مشاوره تحصیلی هیوا

تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

مشاوره تخصصی ثبت نام مدارس ، برنامه ریزی درسی و آمادگی برای امتحانات مدارس

برای ورود به صفحه مشاوره مدارس کلیک کنید

برای ورود به صفحه نمونه سوالات امتحانی کلیک کنید

تماس با مشاور تحصیلی مدارس

۹۰۹۹۰۷۱۷۸۹

تماس از تلفن ثابت

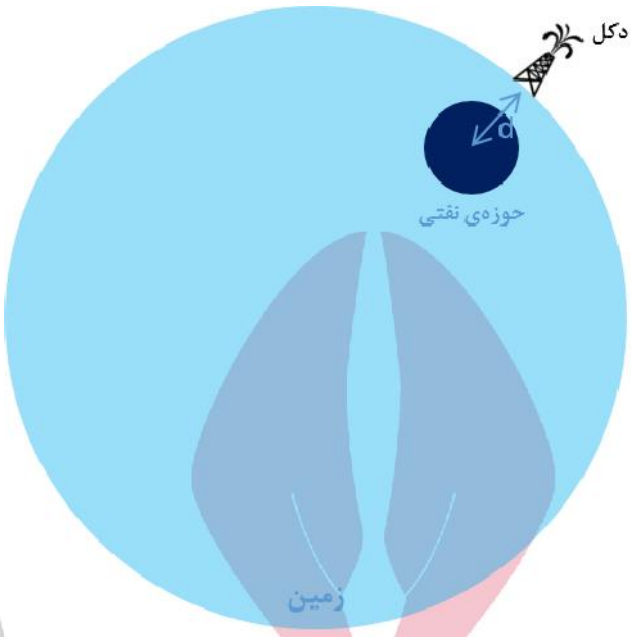
«باسمه تعالی»

هیـوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

پاسخ‌نامه‌ی آزمون مرحله ۲ سال ۹۷

سؤال ۱

الف) شکل مسئله به صورت زیر است:



ب) تغییر شتاب گرانشی به خاطر این است که چگالی حوزه‌ی نفتی با چگالی زمین متفاوت است.

$$g = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} + \frac{G(\rho_o - \rho_\oplus)V}{d^2} \quad , \quad V = Nv$$

N تعداد بشکه‌های نفت و v حجم یک بشکه نفت است. در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{\Delta g}{g_0} = \frac{\frac{G(\rho_o - \rho_\oplus)Nv}{d^2}}{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta g}{g_0} = \frac{(\rho_o - \rho_\oplus)Nv}{M_\oplus}\left(\frac{R_\oplus}{d}\right)^2}$$

ج)

$$\boxed{\left.\frac{\Delta g}{g_0}\right|_{\text{سنگین}} = -1.99 \times 10^{7}} \quad , \quad \boxed{\left.\frac{\Delta g}{g_0}\right|_{\text{سبک}} = -2.01 \times 10^{-7}}$$

د) دقت اندازه‌گیری (δg) باید برابر با اختلاف شتاب گرانش نفت سبک و نفت سنگین باشد:

$$\delta g = \left|\Delta g_{\text{سبک}} - \Delta g_{\text{سنگین}}\right| \Rightarrow \boxed{\delta g = 2.12 \times 10^{-8}\ \text{m s}^{-2}} \ll 1$$

سؤال ۲

الف)

نام نقاط	L_1, L_2, L_3	L_4, L_5
وضعیت تعادل	متعادل	متعادل
وضعیت پایداری	ناپایدار	پایدار [مشروط]

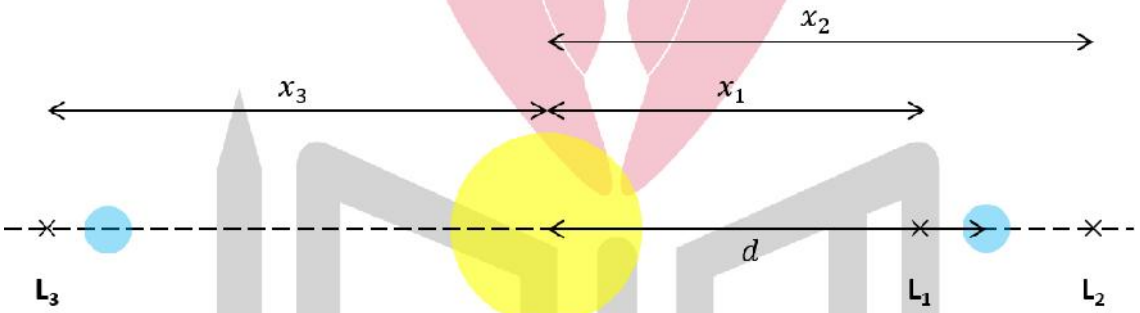
ب) طبق رابطه‌ی مرکز جرم:

$$M_\odot r_\odot = M_\oplus r_\oplus \Rightarrow \frac{r_\odot}{d} = \frac{M_\oplus}{M_\odot + M_\oplus} \Rightarrow \boxed{\frac{r_\odot}{d} = 3 \times 10^{-6}} \ll 1$$

$$\boxed{r_\odot = 4.50 \times 10^5 \text{ m}} \ll d$$

ج) با توجه به قانون دوم نیوتون:

$$\frac{\Sigma F}{m} = r\omega^2$$



با توجه به شکل، خواهیم داشت:

نقطه‌ی L_1 :
$$\boxed{-\frac{GM_\odot}{x_1^2} + \frac{GM_\oplus}{(d - x_1)^2} = -x_1\omega^2}$$

نقطه‌ی L_2 :
$$\boxed{-\frac{GM_\odot}{x_2^2} - \frac{GM_\oplus}{(x_2 - d)^2} = -x_2\omega^2}$$

نقطه‌ی L_3 :
$$\boxed{-\frac{GM_\odot}{x_3^2} - \frac{GM_\oplus}{(x_3 + d)^2} = -x_3\omega^2}$$

سؤال ۳

الف)

$$\boxed{m - M = 5\log d - 5 + ad} \quad \text{یا} \quad \boxed{m - M = 5\log d - 5 + A}$$

ب) برای دیده شدن جسم باید توان دریافتی آن با توان حدی چشم برابر باشد

$$P = P_e \Rightarrow \alpha \frac{\pi D^2}{4} F = \alpha_e \frac{\pi D_e^2}{4} F_e \Rightarrow \frac{F}{F_e} = \frac{\alpha_e}{\alpha}\left(\frac{D_e}{D}\right)^2$$

α ضریب کارایی و D قطر است.

$$m - m_e = -2.5\log\left(\frac{F}{F_e}\right) = -2.5\log\left[\frac{\alpha_e}{\alpha}\left(\frac{D_e}{D}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 16.7}$$

ج) طبق رابطه‌ی قسمت الف:

$$M = m - 5\log d + 5 - ad \quad , \quad a = 1\ \text{kpc}^{-1} \quad d = 4\ \text{kpc}$$

$$\Rightarrow M = -0.27$$

$$M - M_{sun} = -2.5\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) \Rightarrow \boxed{L = 100\ L_\odot}$$

د)

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3 \Rightarrow \boxed{M = 4.6\ M_\odot}$$

هیـوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

سؤال ۴

الف) $\alpha n_e n_p$ آهنگ در واحد حجم است:

$$[\alpha n_e n_p] = \mathrm{m^{-3}\ s^{-1}} \Rightarrow [\alpha] = [n_e]^{-1}[n_p]^{-1}\mathrm{m^{-3}\ s^{-1}} \Rightarrow \boxed{[\alpha] = \mathrm{m^3\ s^{-1}}}$$

ب)

$$\frac{hc}{\lambda} = 13.6\ \mathrm{eV} \Rightarrow \boxed{\lambda = 91.4\ \mathrm{nm}}$$

ج) چون ابر خنثی است $n_e = n_p$ و چون در تعادل است آهنگ یونش و بازترکیب برابر است:

$$N = \alpha n_e^2 \times \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \boxed{R = \left(\frac{3N}{4\pi\alpha n_e^2}\right)^{1/3}}$$

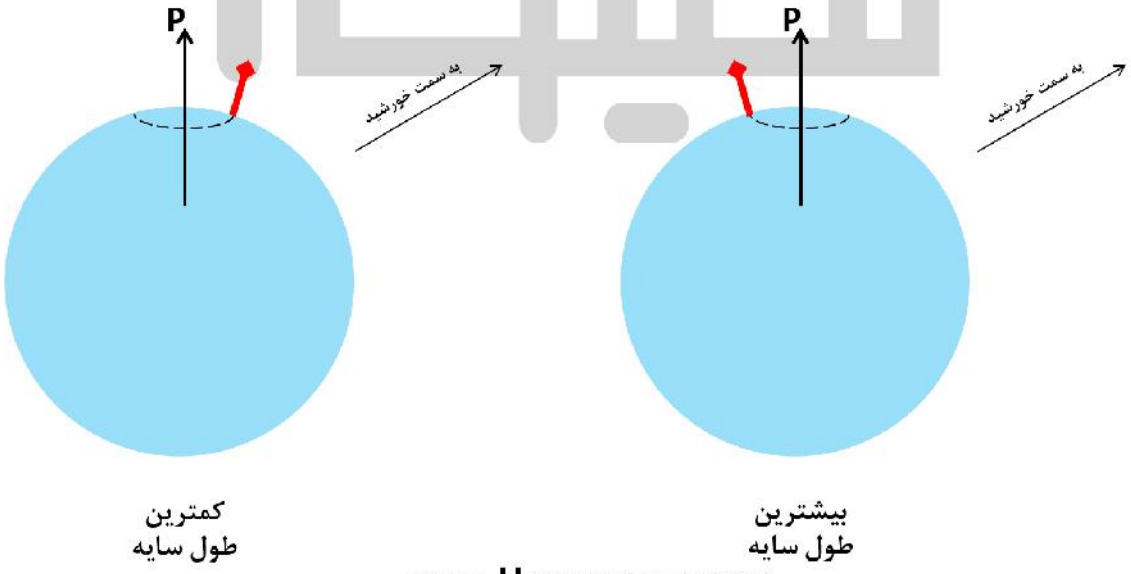
د) با جایگذاری داده‌ها در رابطه‌ی بالا، شعاع ابر به دست می‌آید.

هـ) شعاع زاویه‌ای ابر (θ) نیم ثانیه‌ی قوسی است. از رابطه‌ی $d = R/\theta$ استفاده می‌کنیم.

ستاره‌ی مرکزی	$R_{\mathrm{H\,II}}$ (pc)	d (pc)
O5V	2.01×10^{1}	8.28×10^{6}
B0V	2.21×10^{0}	9.12×10^{5}
G2V	6.46×10^{-3}	2.67×10^{3}

سؤال ۵

الف) شکل مسئله به صورت زیر است:



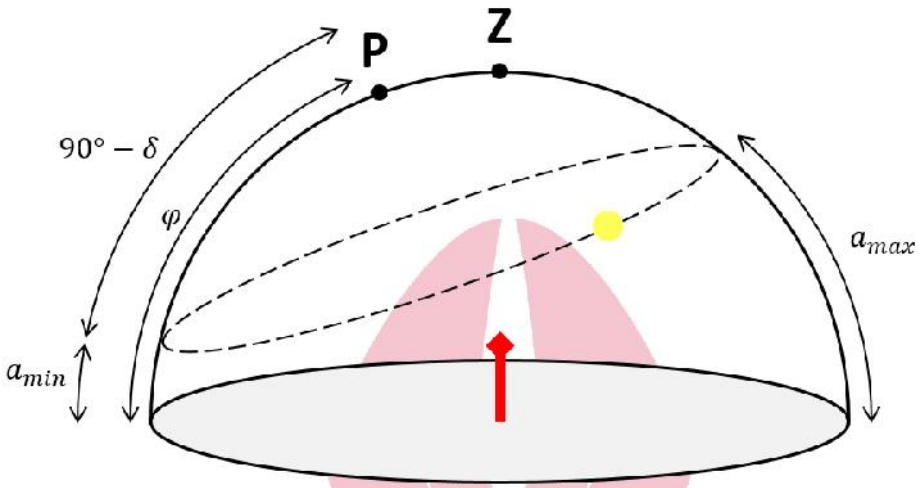
www.Heyvagroup.com

هنگامی که سایه کمترین طول را دارد، ارتفاع خورشید بیشینه و جهت سایه رو به شمال است.

ب و ج) ابتدا ارتفاع خورشید هنگام بیشترین طول و کمترین طول سایه را محاسبه می‌کنیم

$$\tan a = \frac{h}{l} \quad (h = 100\ \text{cm}) \quad \Rightarrow \quad a_{max} = 30° \quad a_{min} = 10°$$

مطابق شکل زیر:



$$\begin{cases} a_{max} = 90° - \varphi + \delta \\ a_{min} = \varphi - 90° + \delta \end{cases} \Rightarrow \varphi = \ ° \quad , \quad \delta = \ °$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = 80°} \quad , \quad \boxed{\delta = 20°}$$

می‌توان با فرض جنوبی بودن عرض جغرافیایی هم مسئله را حل کرد.

د) میل خورشید از رابطه‌ی $\sin\delta = \sin\omega t \sin\varepsilon$ به دست می‌آید که در آن ω سرعت زاویه‌ای مداری زمین، t زمان سپری شده از اعتدال بهاری و ε تمایل محوری زمین است. با توجّه به مقدار میل قسمت ج:

$$t = 60 \text{ روز} \quad \text{و} \quad 123 \text{ روز}$$

تاریخ‌های متناظر **۲۹ اردیبهشت** و **۳۰ تیر** هستند.

هـ) ۶ ساعت پس از کوتاه‌ترین سایه، زاویه ساعتی خورشید ۶ ساعت (۹۰ درجه) است. ارتفاع خورشید برابر است با:

$$\sin a = \sin\delta \sin\varphi \Rightarrow a = 19.7°$$

$$\tan a = \frac{h}{l} \Rightarrow \boxed{l = 280\ \text{cm}}$$

هیـوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

سؤال ۶

الف)

$$n_1(r) = \frac{n_{01}}{r^2} \quad r < R_0 \qquad , \qquad n_2(r) = \frac{n_{02}}{r^2} \quad r < R_0$$

برای محاسبه‌ی شعاع نیمه جرم:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad , \quad \rho(r) = n_1(r)\, m_1 + n_2(r)\, m_2$$

$$\Rightarrow M(r) = 4\pi(n_{01}m_1 + n_{02}m_2)r \quad , \quad M = 4\pi(n_{01}m_1 + n_{02}m_2)R_0$$

$$\frac{M}{2} = 4\pi(n_{01}m_1 + n_{02}m_2)R_{hm} \Rightarrow R_{hm} = \frac{R_0}{2}$$

برای محاسبه‌ی شعاع نیمه نور:

$$L(r) = \int_0^r 4\pi r^2 j(r) dr \quad , \quad j(r) = n_1(r)\, L_1 + n_2(r)\, L_2$$

$$= n_1(r)\, m_1^3 + n_2(r)\, m_2^3$$

$$\Rightarrow L(r) = 4\pi(n_{01}m_1^3 + n_{02}m_2^3)r \quad , \quad L = 4\pi(n_{01}m_1^3 + n_{02}m_2^3)R_0$$

$$\frac{L}{2} = 4\pi(n_{01}m_1^3 + n_{02}m_2^3)R_{hl} \Rightarrow R_{hl} = \frac{R_0}{2}$$

در نتیجه:

$$\boxed{R_{hm}/R_{hl} = 1}$$

ب) ابتدا ثابت n'_{02} برای ستاره‌های نوع ۲ را به دست می‌آوریم. با توجه به این که جرم کل این ستاره‌ها ثابت است:

$$M_2 = 4\pi n'_{02} m_2 \frac{R_0}{2} = 4\pi n_{02} m_2 R_0 \Rightarrow n'_{02} = 2n_{02}$$

$$n_1(r) = \frac{n_{01}}{r^2} \quad r < R_0 \qquad , \qquad n_2(r) = \frac{2n_{02}}{r^2} \quad r < R_0/2$$

برای محاسبه‌ی شعاع نیمه جرم:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad , \quad \rho(r) = n_1(r)\, m_1 + n_2(r)\, m_2$$

$$\Rightarrow M(r) = \begin{cases} 4\pi(n_{01}m_1 + 2n_{02}m_2)r & r < R_0/2 \\ 4\pi(n_{01}m_1 r + n_{02}m_2 R_0) & r > R_0/2 \end{cases}$$

www.Heyvagroup.com

$$M = 4\pi(n_{01}m_1 + n_{02}m_2)R_0 \quad , \quad m_1 = 1\, M_\odot \quad m_2 = 10\, M_\odot$$

با توجه به این که شعاع نیمه جرم ستارگان m_1 به تنهایی برابر با $R_0/2$ است، شعاع نیمه جرم بایستی کمتر از $R_0/2$ باشد:

$$\frac{M}{2} = 4\pi(n_{01} + 20n_{02})R_{hm} \Rightarrow R_{hm} = \frac{1}{2}\frac{n_{01} + 10n_{02}}{n_{01} + 20n_{02}}$$

برای محاسبه‌ی شعاع نیمه نور:

$$L(r) = \int_0^r 4\pi r^2 j(r)dr \quad , \quad j(r) = n_1(r)\,L_1 + n_2(r)\,L_2$$

$$= n_1(r)\,m_1^3 + n_2(r)\,m_2^3$$

$$\Rightarrow L(r) = \begin{cases} 4\pi(n_{01}m_1^3 + 2n_{02}m_2^3)r & r < R_0/2 \\ 4\pi\left(n_{01}m_1^3 r + 2n_{02}m_2^3\frac{R_0}{2}\right) & r > R_0/2 \end{cases}$$

$$L = 4\pi(n_{01}m_1^3 + n_{02}m_2^3)R_0 \quad , \quad m_1 = 1\,M_\odot \quad m_2 = 10\,M_\odot$$

با توجه به این که شعاع نیمه نور ستارگان m_1 به تنهایی برابر با $R_0/2$ است، شعاع نیمه نور بایستی کمتر از $R_0/2$ باشد:

$$\frac{L}{2} = 4\pi(n_{01} + 2000n_{02})R_{hl} \Rightarrow R_{hl} = \frac{1}{2}\frac{n_{01} + 1000n_{02}}{n_{01} + 2000n_{02}}$$

در نتیجه:

$$R_{hm}/R_{hl} = \frac{n_{01} + 10n_{02}}{n_{01} + 20n_{02}}\frac{n_{01} + 2000n_{02}}{n_{01} + 1000n_{02}}$$

اگر نسبت n_{01}/n_{02} را با α نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\boxed{R_{hm}/R_{hl} = \frac{\alpha + 10}{\alpha + 20}\frac{\alpha + 2000}{\alpha + 1000}}$$

و به ازای $\alpha = 10$:

$$\boxed{R_{hm}/R_{hl} = 1.33}$$

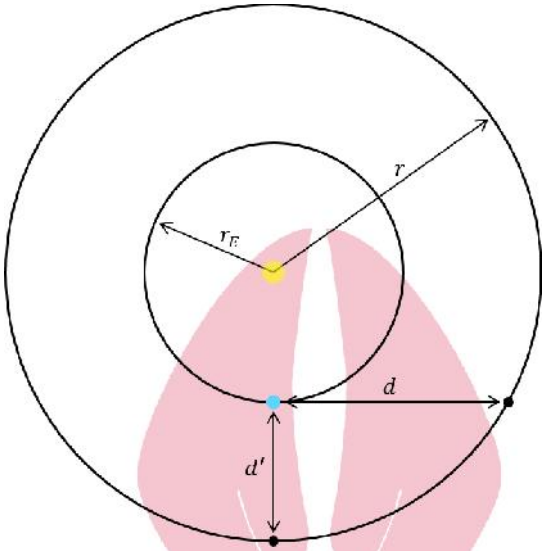
ج) در اثر جداسازی جرمی، نسبت R_{hm} و R_{hl} تغییر می‌کنند و دیگر نمی‌توان این دو را یکسان در نظر گرفت. دلیل این تغییر، تفاوت حساسیت این دو شعاع نسبت به توزیع ستارگان است. (R_{hm} به α بیشتر حساس است.)

هیـوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

سؤال ۷

با توجّه به شکل:

$$d = \sqrt{r^2 - r_E^2} \quad , \quad d' = r - r_E$$



$$2(d - d') = c\Delta t \Rightarrow \sqrt{r^2 - r_E^2} - (r - r_E) = \frac{c\Delta t}{2} \quad , \quad A \equiv \frac{c\Delta t}{2}$$

$$\Rightarrow r^2 - r_E^2 = A^2 + (r - r_E)^2 + 2A(r - r_E)$$

$$\Rightarrow A^2 + 2r_E^2 - 2rr_E + 2Ar - 2Ar_E = 0 \Rightarrow 2(r_E - A)r = A(A - 2r_E) + 2r_E^2$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{A(A - 2r_E) + 2r_E^2}{2(r_E - A)}}$$

با جایگذاری، مقدار عددی $\boxed{r = 2.34\ \text{AU}}$ به دست می‌آید.

سؤال ۸

الف)

$$E_{tot} = E_f - E_i \approx -GM^2\left(\frac{1}{R_{ns}} - \frac{1}{R_{wd}}\right) \Rightarrow \boxed{|E_{tot}| = 2.58 \times 10^{46}\ \text{J}}$$

ب) با توجه به مقدار پهن شدگی و جرم هسته‌ی ستاره:

$$0.5\ \Delta\lambda/\lambda = v/c \Rightarrow v = 5000\ \text{km s}^{-1} \quad , \quad M_{env} = 8.6\ M_\odot$$

$$E_1 = \frac{1}{2}M_{env}v^2 \Rightarrow \boxed{E_1 = 2.13 \times 10^{44}\ \text{J}}\ , \boxed{E_1/E_{tot} = 0.83\ \%}$$

www.Heyvagroup.com

هیـوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

ج) ابتدا درخشندگی ابرنواختر را به دست می‌آوریم

$$M - M_{sun} = -2.5 \log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) \Rightarrow L = 194\, L_\odot \quad , \quad \tau = 2 \text{ ماه}$$

$$E_2 = L\tau \Rightarrow \boxed{E_2 = 3.87 \times 10^{35}\ \text{J}}, \boxed{E_2/E_{tot} = 10^{-9}\ \%}$$

د) انرژی نوترینوها برابر است با:

$$E_3 = E_{tot} - E_1 - E_2 \Rightarrow \boxed{E_3 = 2.56 \times 10^{46}\ \text{J}}, \boxed{E_3/E_{tot} = 99.17\ \%}$$

هـ)

$$N_\nu = \frac{E_3}{E_\nu} \Rightarrow \boxed{N_\nu = 3.20 \times 10^{58}}$$

و)

$$n_\nu = \frac{N_\nu}{4\pi d^2} \times \sigma_{\text{انسان}} \Rightarrow \boxed{n_\nu = 5.33 \times 10^{14}}$$

سؤال ۹

الف) رابطه‌ی بین قدر ظاهری، قدر مطلق و فاصله به صورت زیر است:

$$m - M = 5 \log d - 5$$

$M = -9.1$ محل بیشینه‌ی قدر مطلق و $d = 20\ \text{Mpc}$ فاصله‌ی به دست آمده است. اگر قدر مطلق $M' = -7.7$ می‌بود، فاصله چنین به دست می‌آمد:

$$M' - M = -5 \log \frac{d'}{d} \Rightarrow \boxed{d' = 10.5\ \text{Mpc}}$$

ب) جرم با استفاده از شعاع کهکشان (R) و سرعت حرکت ستاره‌ها (v) تعیین می‌شود. شعاع زاویه‌ای کهکشان (θ) از روی رصد به دست می‌آید:

$$M = \frac{v^2 R}{G} \quad , \quad R = \theta d \quad \Rightarrow \quad M \propto d$$

درخشندگی با اندازه‌گیری شار دریافتی به دست می‌آید:

$$L = 4\pi d^2 F \quad \Rightarrow \quad L \propto d^2$$

در نتیجه:

$$M/L = \frac{v^2 \theta}{4\pi G F} \times \frac{1}{d} \Rightarrow \boxed{M/L \propto d^{-1}}$$

ج) با توجّه به رابطه‌ی تناسبی به دست آمده در قسمت ب:

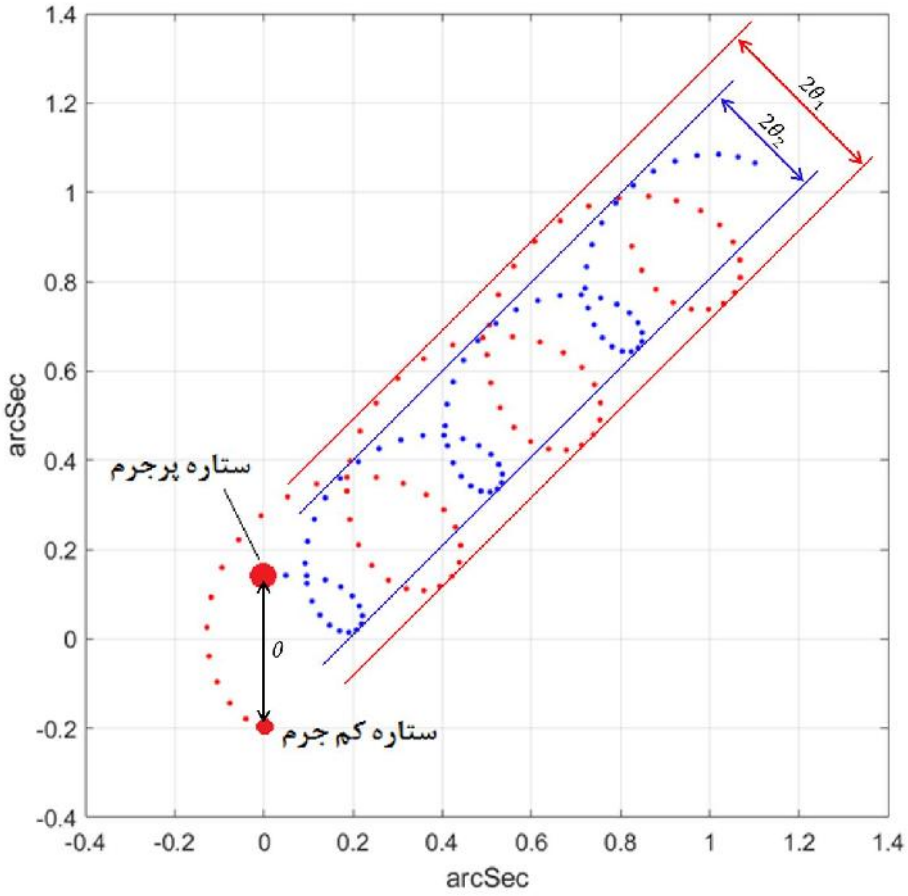
$$\boxed{(M/L)' = 3.8\, M_\odot/L_\odot}$$

www.Heyvagroup.com

هیـوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

سؤال ۱۰

الف) مدار هر کدام از ستاره‌ها حول مرکز جرم دایره‌ای و میل مداری ۹۰ درجه است. بنابراین فاصله‌ی بین خطوط مماس بر مسیر حرکت هر ستاره، برابر با قطر مدار آن است.



با توجه به شکل: $r_1/r_2 = \theta_1/\theta_2 =$.

با توجه به تعریف مرکز جرم: $M_2/M_1 = r_1/r_2$.

هم‌چنین می‌دانیم $M_1 = M_\odot$ است.

$$\Rightarrow \frac{M_2}{M_1} = 1.5 \Rightarrow \boxed{M_2 = 1.5\ M_\odot}$$

برای حل قسمت‌های ب و ج، ابتدا شعاع مدار نسبی دو ستاره را محاسبه می‌کنیم. با استفاده از قانون سوم کپلر

$$r = \left(\frac{P^2 GM}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

M مجموع جرم دو ستاره است. دوره‌ی تناوب با اندازه‌گیری تعداد نقاط درون یک تناوب به دست می‌آید ($P = 230$ روز).

www.Heyvagroup.com

$$\Rightarrow r = 1.49 \times 10^{11}\ \text{m} \approx 1\ \text{AU}$$

هیـوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

ب) فاصله‌ی زاویه‌ای دو ستاره را با توجه به شکل به دست می‌آوریم ($\theta = 0.33''$).

$$d = \frac{r}{\theta_{\text{rad}}} \Rightarrow \boxed{d = 9.32 \times 10^{16}\ \text{m} \approx 3\ \text{pc}}$$

ج) با توجه به تعریف مرکز جرم:

$$r_1 = \frac{M_2}{M} r \quad , \quad r_2 = \frac{M_1}{M} r \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r_1 = 0.6\ \text{AU} \quad , \quad r_2 = 0.4\ \text{AU}}$$

www.Heyvagroup.com