

نام و نام خانوادگی:
 مقطع و رشته: یازدهم (ریاضی)
 نام پدر:
 شماره داوطلب:
 تعداد صفحه سؤال: ۴ صفحه

هیاوا؛ تخصصی ترین سایت مشاوره کشور
 جمهوری اسلامی ایران

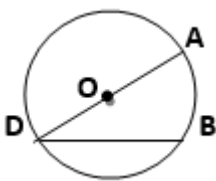
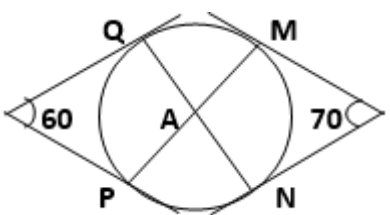
اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۴ تهران
 دبیرستان غیردولتی دخترانه سرای دانش واحد رسالت
 آزمون پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۹۹-۱۳۹۸

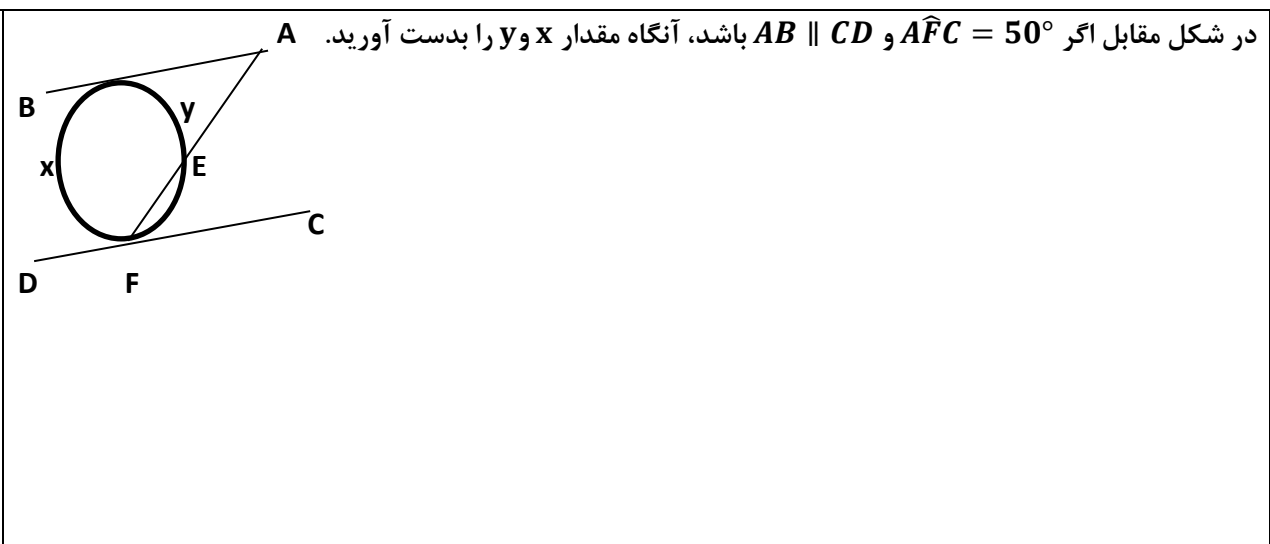
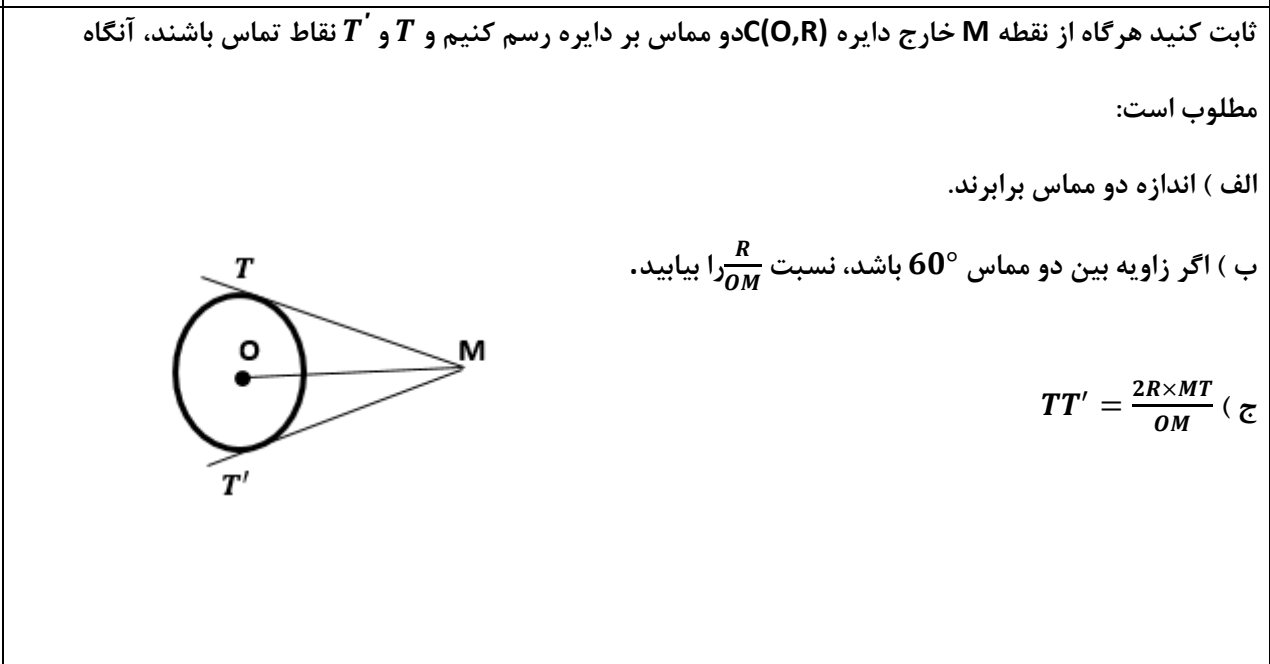

نام درس: هندسه (۲)

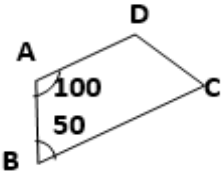
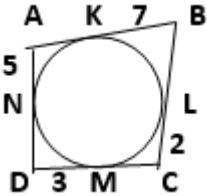
نام دبیر: مرجان یغمایی

ساعت امتحان: ۰۸ : ۰۰ صبح / عصر

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

نام	نام دبیر: مرجان یغمایی	تاریخ و امضاء:	نمره به عدد:	نمره به حروف:	محل مهر و امضاء مدیر
			نمره به عدد:	نمره به حروف:	
ردیف	سوالات				
۱	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید</p> <p>الف) تبدیل هایی که طول پاره خط را حفظ می کنند، تبدیلات _____ نامیده می شوند.</p> <p>ب) یک چهارضلعی محاطی است، اگر فقط اگر دو زاویه مقابل آن _____ باشند.</p> <p>ج) اگر فاصله ی خطی از مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد. خط ودایره _____ نقطه اشتراک دارند، یعنی _____</p>				
۲	<p>ثابت کنید اگر قطری از یک دایره یکی از وترهای آن دایره را نصف کند، بر آن وتر عمود است و کمان نظیر آن وتر را نیز نصف می کند.</p>				
۳	<p>در شکل زیر \widehat{ADB} یک زاویه محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است، ثابت کنید اندازه این زاویه برابر با نصف اندازه کمان متقابل آن است.</p> 				
۴	<p>در شکل زیر زاویه \widehat{PAN} را محاسبه نمایید.</p> 				

<p>۱/۵</p>	<p>۵ در شکل مقابل اگر $\widehat{AFC} = 50^\circ$ و $AB \parallel CD$ باشد، آنگاه مقدار x و y را بدست آورید. A</p> 	<p>۵</p>
<p>۲</p>	<p>۶ ثابت کنید هرگاه از نقطه M خارج دایره $C(O,R)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T' نقاط تماس باشند، آنگاه مطلوب است:</p> <p>الف) اندازه دو مماس برابرند.</p> <p>ب) اگر زاویه بین دو مماس 60° باشد، نسبت $\frac{R}{OM}$ را بیابید.</p>  <p>ج) $TT' = \frac{2R \times MT}{OM}$</p>	<p>۶</p>
<p>۱/۵</p>	<p>۷ شعاع های دو دایره متخارج را بدست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.</p>	<p>۷</p>
<p>۱/۵</p>	<p>۸ در شکل روبرو مقدار x و y را بدست آورید.</p> 	<p>۸</p>

<p>۱/۵</p>	<p>۹ اگر شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید:</p> $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$
<p>۱</p>	<p>۱۰ دو زاویه مجاور یک چهارضلعی محاطی 50° و 100° است. قدرمطلق تفاضل دو زاویه دیگر چقدر است؟</p> 
<p>۲</p>	<p>۱۱ الف) نشان دهید اگر یک چهارضلعی محیطی باشد، آنگاه مجموع اندازه های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه های دو ضلع دیگر است؟</p> <p>ب) در شکل زیر دایره محاطی در نقاط K و L و M و N بر اضلاع چهارضلعی مماس است. محیط چهارضلعی را بدست آورید.</p> 

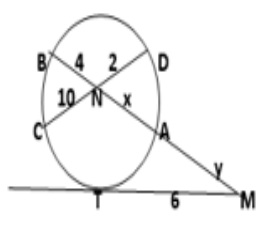
۱/۵	<p>ثابت کنید تصویر هر خط راست تحت اثر تبدیل طولپا، خطی راست است.</p> <p>هیاوا؛ تخصصی ترین سایت مشاوره کشور</p>	۱۲
۱/۵	<p>ثابت کنید بازتاب یک زاویه نسبت به یک محور، زاویه ای برابر با آن است.</p>	۱۳
۱	<p>اگر طول خط المرکزین دو دایره ۸ و شعاع های آنها $a+3$ و $2a-5$ باشد، مقدار a را طوری تعیین کنید که این دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند.</p>	۱۴
صفحه ی ۴ از ۴		



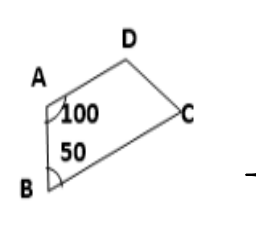
ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	الف) طولی ب) مکمل ج) یک - خط بر دایره مماس است	
۲	فرض: $AH=HB$ $\left. \begin{array}{l} \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90 \text{ (یا } CD \perp AB) \\ \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{array} \right\} \text{ حکم}$ $\left. \begin{array}{l} AH = HB \\ OA = OB = r \\ OH = OH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \Delta AOH \cong \Delta BOH \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BD} \\ \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 \Rightarrow \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 = 180 \\ \rightarrow \widehat{H}_1 = 90 \rightarrow CD \perp AB \end{array} \right.$	
۳	از B به نقطه O، (مرکز دایره) وصل می کنیم: $BO = OD = R \Rightarrow \Delta BOD \text{ متساوی الساقین است} \Rightarrow \widehat{OBD} = \widehat{ODB}$ حال با توجه به اینکه زاویه AOB، زاویه خارجی مثلث BOD می باشد، داریم: $\widehat{AOB} = 2\widehat{ODB}$ $\Rightarrow \widehat{ODB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ زاویه مرکزی: $\widehat{AOB} = \widehat{AB}$	
۴	$70^\circ = \frac{(\widehat{QM} + \widehat{PQ} + \widehat{PN}) - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow \widehat{QM} + \widehat{PQ} + \widehat{PN} - \widehat{MN} = 140^\circ$ $60^\circ = \frac{(\widehat{QM} + \widehat{MN} + \widehat{PN}) - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow \widehat{QM} + \widehat{MN} + \widehat{PN} - \widehat{PQ} = 120^\circ$ از جمع دو تساوی بالا داریم: $2\widehat{QM} + 2\widehat{PN} = 260^\circ \Rightarrow \widehat{QM} + \widehat{PN} = 130^\circ$ از طرفی مطابق با زاویه بین وترهای متقاطع درون دایره داریم: $\widehat{A} = \frac{\widehat{QM} + \widehat{PN}}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$	
۵	$50^\circ = \widehat{AFC} = \frac{\widehat{FE}}{2} \Rightarrow \widehat{FE} = 100$ $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{AFC} = 50^\circ$ مورب AF $50^\circ = \widehat{A} = \frac{x-y}{2} \rightarrow x - y = 100^\circ$ $x + y = 360 - 100 \rightarrow x + y = 260$ $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 180^\circ \\ y = 80^\circ \end{array} \right.$	

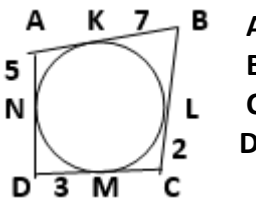
$\left[\begin{array}{l} OM = OM \\ \widehat{T} = \widehat{T}' = 90 \text{ وتر یک ضلع} \\ OT = OT' = R \end{array} \right. \Rightarrow \Delta OTM \cong \Delta OT'M \Rightarrow$	<p>الف</p> $\left[\begin{array}{l} MT = MT' \\ \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \end{array} \right. \rightarrow$ <p>OM نیمساز $\widehat{MTT'}$ زاویه است.</p> <p>ب) $\sin 30^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{R}{OM} = \frac{1}{2}$</p> <p>ج) مساحت چهارضلعی $MTOT'$ را به دو روش می نویسیم:</p>	۶
<p>1) $S(MTOT') = \frac{1}{2} OM \times TT'$</p> <p>2) $S(MTOT') = 2S(MTO) = 2 \times \frac{1}{2} \times OT \times MT \Rightarrow \frac{1}{2} OM \times TT' = OT \times MT \rightarrow TT' = \frac{2R \times MT}{OM}$</p>		

$\left[\begin{array}{l} TT'^2 = d^2 - (R - R')^2 \\ TT'^2 = d^2 - (R + R')^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 63 = 64 - (R - R')^2 \\ 15 = 64 - (R + R')^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} R - R' = 1 \\ R + R' = 7 \end{array} \right. \Rightarrow 2R = 8 \Rightarrow R = 4 \Rightarrow R' = 3$	۷
--	---

	<p>با توجه به رابطه طولی وترهای متقاطع درون دایره، داریم:</p> $NA \times NB = NC \times ND \Rightarrow x \times 4 = 10 \times 2 \Rightarrow x = 5$ <p>اکنون از رابطه طولی قاطع و مماس استفاده می کنیم:</p> $MT^2 = MA \times MB \Rightarrow 6^2 = y(y + 9)$ $\Rightarrow y^2 + 9y - 36 = 0 \Rightarrow (y - 3)(y + 12) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = -12 \text{ غ ق} \end{array} \right.$	۸
--	--	---

$S = rp \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{p}{S}$ $r_a = \frac{S}{p-a} \Rightarrow \frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{S}$ $r_b = \frac{S}{p-b} \Rightarrow \frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{S}$ $r_c = \frac{S}{p-c} \Rightarrow \frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{S}$ $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p-(a+b+c)}{S} = \frac{3p-2p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$	۹
---	---

	$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 100^\circ + \widehat{C} = 180^\circ \\ 50^\circ + \widehat{D} = 180^\circ \end{array} \right.$ $\Rightarrow \widehat{C} = 80^\circ$ $\Rightarrow \widehat{C} - \widehat{D} = 80^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ $\widehat{D} = 130^\circ$	۱۰
---	--	----

<p>الف) فرض می کنیم محل تماس دایره محاطی این چهارضلعی با اضلاع آن، نقاط K, L, M, N باشند. حال با توجه به اینکه طول مماس های مرسوم بر یک دایره از یک نقطه خارج از آن، با یکدیگر برابرند، داریم:</p>		۱۱
	$\left. \begin{array}{l} AK = AN \\ BK = BL \\ CL = CM \\ DM = DN \end{array} \right\} \Rightarrow AK + KB + CM + MD = AN + BL + CL + DN \Rightarrow AB + CD = BC + AD$ <p>ب) می دانیم طول مماس های مرسوم بر دایره از آن، باهم برابرند، پس داریم:</p> $\left. \begin{array}{l} AK = AN = 5 \\ DN = DM = 3 \\ CM = CL = 2 \\ BL = BK = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow AK + KB + BL + LC + CM + MD + DN + NA = AB + BC + CD + DA = 34$	

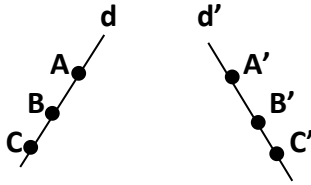
فرض: T تبدیلی ایزومتري و d خطی راست است. **هیاو!** تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

حکم: تصویر خط راست، خطی راست است.

برهان: فرض می‌کنیم A و B و C سه نقطه‌ی دلخواه روی خط d باشند و A بین B و C قرار داشته باشد.

باید ثابت کنیم $T(A)$ و $T(B)$ و $T(C)$ روی یک خط راست می‌باشند. فرض می‌کنیم: $T(A)=A'$, $T(B)=B'$, $T(C)=C'$

و چون $AB+BC=AC$ و چون T تبدیلی طولپا است، پس: $AB=A'B'$ و $BC=B'C'$ و $AC=A'C'$ پس: $A'B'+B'C'=A'C'$ یعنی A' و B' و C' روی یک خط راست قرار دارند.



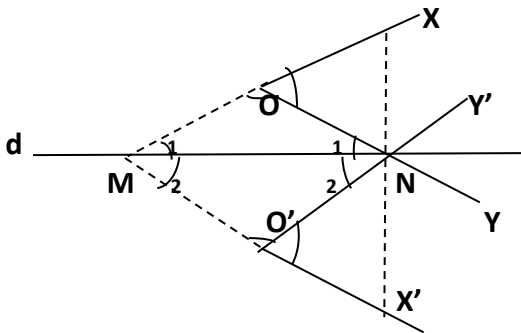
۱۲

فرض می‌کنیم در شکل زیر بازتاب زاویه XOY تحت بازتاب نسبت به خط d زاویه‌ی $X'O'Y'$ است. باید ثابت کنیم:

$\widehat{O} = \widehat{O'}$. امتداد OX و $O'X'$ محور بازتاب را در نقطه‌ی M قطع می‌کند. همچنین نقطه N محل برخورد OY و $O'Y'$ با

محور بازتاب است. چون $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ و $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$ و زاویه‌های XOY و $X'O'Y'$ به ترتیب زاویه‌های خارجی مثلث‌های

$\triangle OMN$ و $\triangle O'MN$ هستند، پس $\widehat{XOY} = \widehat{X'O'Y'}$.



۱۳

فرض کنیم $R = a + 3$ و $R' = 2a - 5$ و $OO' = 8$ و با توجه به اینکه در مسئله گفته شده فقط یک مماس

مشترک داشته باشد. پس دو دایره مماس داخل اند. یعنی باید: $OO' = |R - R'|$ لذا:

$$8 = |a + 3 - 2a + 5| \rightarrow 8 = |-a + 8| \rightarrow \begin{cases} 8 = |-a + 8| \Rightarrow a = 0 \rightarrow R' = -5 \\ 8 = -(a + 8) = a - 8 \Rightarrow a = 16 \end{cases}$$

۱۴

امضاء:

نام و نام خانوادگی مصحح: مرجان یغمایی

جمع بارم: ۲۰ شماره