لیست تمام فرمول های ریاضی دوازدهم رشته ریاضی فیزیک

1) $\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$

2) تعداد رئوس = مرتبه = p

3) تعداد یال‌ها = اندازه = q

---

4) تعداد گراف‌های ساده که با p رأس (نام‌گذاری شده) ساخته می‌شود. $2^{\frac{p(p-1)}{2}}$

---

5) تعداد گراف‌های ساده که با p رأس نام‌گذاری شده و شامل K یال ساخته می‌شود. $\binom{\frac{p(p-1)}{2}}{K}$

6) در فرمول بالا اگر خواستیم گراف شامل یالی نباشد یک واحد از بالا کم می‌کنیم. $\binom{\frac{p(p-1)}{2}-1}{K}$

در فرمول بالا اگر خواستیم گراف شامل یالی باشد یک واحد از بالا و پایین کم می‌کنیم. $\binom{\frac{p(p-1)}{2}-1}{K-1}$

---

7) $0 \leq q \leq \frac{p(p-1)}{2}$

8) $p \geq \frac{\sqrt{1+8q}+1}{2}$

9) در هر گراف: $\Sigma \deg Vi = 2q$ $\quad$ ($\deg Vi = Vi$ درجه‌ی رأس)

10)
$\left\{ \begin{array}{l} \text{رأسی که درجه‌اش زوج باشد : رأس زوج} \\ \text{رأسی که درجه‌اش فرد باشد : رأس فرد} \end{array} \right.$

(11
$$\begin{cases} \text{تعداد رئوس فرد در هر گراف زوج است.} \\ \text{تعداد رئوس زوج در هر گراف باید بررسی شود.} \end{cases}$$

(12
$$\begin{cases} \text{Max deg : بیشترین درجه‌ی موجود برای یک رأس} \Rightarrow \Delta \\ \text{Min deg : کمترین درجه‌ی موجود برای یک رأس} \Rightarrow \sigma \end{cases}$$

(13
$$0 \le \delta \le \deg Vi \le \Delta \le p-1$$

(14 برای استفاده از این فرمول باید قابل رسم بودن گراف بررسی شود.

$$\delta \le \frac{2q}{p} \le \Delta$$

$$\frac{2q}{p} = \text{میانگین درجات} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}}$$

(15 رابطه‌ی گراف (r - منتظم):

$$\Pr = 2q = \sum_{1}^{P} \deg \ \ vi$$

(16 p و r هر ۲ می‌توانند فرد باشند.

(17 $+1$ (اعدادی که جمع‌شان p می‌شود و از r بزرگترند) = تعداد گراف‌های (r - منتظم) از مرتبه‌ی p

---

(18 رأسی که deg آن (0) است ، رأس تنها (منفرد – ایزوله) نامیده می‌شود.

(19 $p-2q$ = حداقل تعداد رئوس ایزوله (اگر این عدد منفی یا صفر شد، یعنی رأس ایزوله نداریم).

20) هر گاه گراف ($(p-1)$ - منتظم) باشد کامل است. گراف کامل : K_p

21) رئوس مجاور : 2 رأس u و V مجاورند هر گاه این 2 رأس 2 سر یال باشند.

22) $q_{K_p} = \dfrac{p(p-1)}{2}$

---

23) $2^P - 1$: تعداد گراف‌های کامل زیر مجموعه‌ی K_P

---

24) $e = 2/72$ عدد نپر $[(p-2)! \times e]$ = تعداد مسیرها در گراف K_P بین 2 رأس u و V از طول **1** تا $(p-1)$ (تا K_{27})

25) تعداد مسیر به طول M در K_P (بین دو رأس u و V) $p(p-2, M-1) = \dfrac{(p-2)!}{(p-M-1)!}$

* وقتی دو سر مسیر ذکر نشده باشد در فرمول بالا $\binom{p}{2}$ را ضرب می‌کنیم.

---

26) کوتاه‌ترین مسیر بین 2 رأس u و V $d(u,V)$

---

27) تعداد ادوار به طول M در گراف K_P $\binom{P}{M} \times \dfrac{(M-1)!}{2}$

28) در هر گراف K_p، $(p-2)$ نوع دور به طول 3 یا 4 یا ... وجود دارد.

29) در هر گراف K_p، p نوع مسیر به طول 1 یا 2 یا ... وجود دارد.

---

30) حداقل تعداد یال برای این که گرافی از مرتبه p همبند باشد. $q_{min} = p-1$

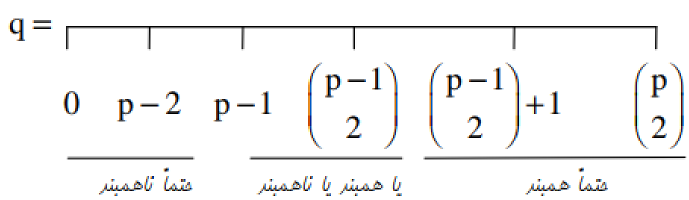
31) حداقل تعداد یال برای این که گرافی همبند و شامل دور باشد. $q_{min} = p$

32) بیشترین تعداد یالی که گرافی ناهمبند باشد $q_{max} = \binom{p-1}{2}$

33) گراف حتماً همبند است $\delta \geq \frac{p}{2} \Rightarrow$

34) حتماً همبند $q \geq \binom{p-1}{2} + 1 \Rightarrow$

35)



36) در هر مرحله اعداد را از بزرگ به کوچک مرتب می‌کنیم. اولین عدد هر چه بود به همان تعداد از جلویش انتخاب می‌کنیم و همه را منهای یک می‌کنیم. و این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا به یک گراف قابل رسم برسیم.

$$(6,\underbrace{6,4,4,3,3,2}_{\text{٦ تا}},2,1,1)$$

منهای یک

$$(5,3,3,2,1,2,1,1) \xrightarrow{\text{مرتب}} (5,\underbrace{3,3,2,2,1}_{\text{٥ تا}},1,1)$$

منهای یک

$$(2,2,1,1,0,1,1) \xrightarrow{\text{مرتب}} (2,2,1,1,1,1,0)$$

قابل رسم

37) در هر دنباله تعداد رئوس فرد زوج است.

38) در هر دنباله : $\delta \geq 0$ و $\Delta \leq p-1$

39) اگر عدد $p-1$ ، N بار تکرار شود و $\delta \geq N$ باشد دنباله گرافیکی است.

40) اگر عدد (0) ، N بار تکرار شود و $\Delta \leq p-1-N$ باشد دنباله گرافیکی است.

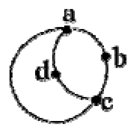
41) در هر دنباله‌ی گرافیکی، حتماً عدد تکراری غیرصفر داریم.

42) الگوی روبرو اگر به $(1,1)$ ختم شود دنباله گرافیک است. $(K,K,K-1,K-1,K-2,K-2,\ldots,1,1)$

---

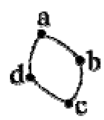
43) در هر گراف اگر $n \geq 4$ ضلعی‌ای پیدا شد که قطر نداشته باشد آن گراف گراف بازه‌ها نیست.

44) ac قطر abcd است و گراف روبرو گراف بازه‌هاست



: گراف بازه‌ها

گراف روبرو قطر ندارد و گراف بازه نیست.



: گراف غیربازه‌ها

45) گراف‌های همواره بازه‌ای:
- گراف‌های کامل K_p
- * گراف‌هایی که یک یال از گراف‌های کامل کمتر دارند.
- گراف‌های تهی

---

46) (مکمل $G:\overline{G}$)

$$\deg_G V_i + \deg_{\overline{G}} V_i = (p-1)$$

47)

$$q_{\overline{G}} = \frac{p(p-1)}{2} - q_G$$

48) گراف تهی $(\overline{K}_p)$: گرافی که درجه تمام رئوسش (0) باشد.

49) مکمل گراف کامل تهی است و برعکس

(50

$$\text{گراف همیلتنی:}\begin{cases}\text{دوری دارد که از همه رئوس بگذرد.}\\ \text{بدون تکرار رأس و یال}\\ \text{دوری به طول } p\end{cases}$$

51) گراف همیلتنی همبند است و با حذف یک یال همبند می‌ماند.

52) اگر در گراف رأسی پیدا شد که با حذف آن و یال‌های متصل به آن گراف ناهمبند شود همیلتنی نیست.

53) Min deg Vi در همیلتنی 2 است (اگر گرافی رأس با درجه‌ی $1,0$ داشت همیلتنی نیست)

54) اگر $\delta \geq \frac{p}{2}$ بود حتماً همیلتنی است.

55) گراف‌های کامل با شرط $p \geq 3$ همیلتنی‌اند.

56) K_2, K_1 همیلتنی نیستند. (• یا •——•)

57) تعداد دورهای همیلتنی در گراف $K_p \Leftarrow \frac{(p-1)!}{2}$

58) تعداد گراف‌های همیلتنی که با p رأس می‌توان ساخت. $\frac{p(p-3)}{2}+1$

59) گراف همیلتنی مرتبه p حداقل p یال دارد.

(60

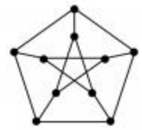
$$\text{گراف اویلری:}\begin{cases}\text{گراف بدون برداشتن مداد دور دارد.}\\ \text{دوری دارد که از همه‌ی یال‌ها بگذرد.}\\ \text{تکرار رأس \underline{مجاز} و تکرار یال \underline{غیرمجاز}}\end{cases}$$

61) اگر گرافی همبند بود و درجه‌ی تمام رئوس زوج بود اویلری است.

62) گراف‌های K_p با شرط $(p \geq 4)$ در صورتی اویلری‌اند که p فرد باشد.

63) گراف نیمه اویلری (قابل عبور): اگر در گرافی درجه تمام رئوس زوج و (فقط 2 رأس فرد) داشته باشد می‌توان از یک رأس فرد مسیری را آغاز کرد و از همه یال‌ها گذشت و به رأس فرد دیگر رسید. اگر از رأس فرد شروع نکنیم این کار ممکن نیست.

64) گراف پترسن:
- این گراف (3 منتظم) است.
- در این گراف $p+q=25$
- Max دورش به طول 9 است.
- دور به طول‌های $10,7,4,3$ ندارد
- با افزودن یک یال همیلیتنی می‌شود.



➢ درخت:

65) **درخت**: گراف همبندی که فاقد دور است.

66) در هر درخت با بیش از یک رأس حداقل 2 رأس درجه یک داریم.

67) در دنباله‌ی گرافیک درخت (0) نداریم و (1) دو بار آمده اگر ($p>1$ باشد)

68) تعداد مسیرهای موجود در هر درخت $\binom{p}{2}+p$

p: مسیر به طول (0)

69) بین هر 2 رأس از درخت تنها یک مسیر موجود است.

70) رابطه‌ی هر درخت: $q=p-1$

71) p و q در درخت 2 عدد صحیح متوالی‌اند (یکی فرد و دیگری زوج)

---

72) در درخت $\Rightarrow$ همواره فرد $P+q$
در درخت $\Rightarrow$ همواره زوج pq

---

73) $\Sigma \deg Vi = 2q = 2(p-1)$ (در هر درخت).

---

74) در درخت اگر $\Delta = K$ باشد، آن‌گاه حداقل K رأس درجه‌ی یک داریم.

75) عکس قضیه‌ی فوق صادق نیست.

76) $K_2 =$ •——• و $K_1 =$ • $\rightarrow$ تنها 2 درخت کامل و منتظم داریم.

77) اگر دنباله درجات رئوس (نام‌گذاری شده) یک درخت به صورت $(d_1, d_2, d_3, \dots, d_p)$ باشد تعداد درخت‌هایی که با این دنباله می‌توان ساخت از رابطه روبرو بدست می‌آید (فقط رئوس نام‌گذاری شده) $\dfrac{(p-2)!}{(d_1-1)! \times (d_2-1)! \dots (d_p-1)!}$

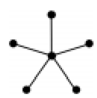
---

78) حداکثر طول مسیر ممکن در هر درخت. $= p-1$

79) در درخت‌های خطی همواره 2 رأس درجه یک است.

80) در درخت‌های خطی همواره $(p-2)$ رأس درجه 2 است.

81) درخت‌های ستاره‌ای $\Rightarrow$
- یک رأس از درجه‌ی $(p-1)$
- $(p-1)$ رأس درجه‌ی 1
- Max طول مسیر ممکن = 2



---

82) تعداد درخت‌های موجود از مرتبه‌های مختلف (قابل رسم) که باید حفظ کنیم.
- 4 مرتبه $\Rightarrow$ 2 درخت
- 5 مرتبه $\Rightarrow$ 3 درخت
- 6 مرتبه $\Rightarrow$ **6** درخت
- 7 مرتبه $\Rightarrow$ 11 درخت
- 8 مرتبه $\Rightarrow$ 24 درخت

83) درایه‌های قطر اصلی همگی **(0)** اند (بیانگر عدم وجود طوقه)

84) درایه‌ها، نسبت به قطر اصلی متقارنند (ماتریس متقارن).

---

85) تعداد یک‌ها در هر سطر یا ستون درجه‌ی رأس متناظر است.

86) مجموع درایه‌های هر سطر یا ستون، درجه‌ی رأس متناظر را نشان می‌دهد.

---

87) رابطه‌ی روبرو در هر ماتریس گراف ساده برقرار است. $p^2 -$ (تعداد صفرها) = تعداد یک‌ها $= 2q = \Sigma \deg Vi$

---

88) در ماتریس گراف کامل همه‌ی درایه‌ها به جز قطر اصلی یک هستند.

➢ **ماتریس درخت :**

89) هیچ سطر و ستونی نیست که همه‌ی درایه‌هایش (0) **باشد**.

---

90) اگر در سطر یا ستونی K تا عدد (یک) داشتیم باید حداقل K تا ستون یا سطر باشند که عدد (یک) فقط یک بار در آن آمده باشد.

➢ **ماتریس گراف همیلتنی:**

91) هر سطر یا ستون حداقل 2 تا یک دارد.

92) اگر سطر یا ستونی که کمترین یک را دارد در نظر بگیریم و ($\geq \frac{p}{2}$ تعداد یک‌هایش) بود حتماً گراف همیلتنی است.

➢ **ماتریس اویلری :**

93) سطر یا ستونی پیدا نمی شود که همه‌ی درایه‌هایش (0) باشد.

94) تعداد یک‌ها در هر سطر یا ستون زوج است.

➢ **ماتریس** (M^2) **(توان 2 ماتریس مجاورت گراف):**

95) درایه‌های روی قطر اصلی M^2 نشانگر درجه رئوس‌اند.

96) اگر M^2 را نام‌گذاری کنیم، درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی (مسیرها به طول 2) را بین 2 رأس نام‌گذاری شده نشان می‌دهند.

97) مجموع کل درایه‌های M^2 (با احتساب قطر اصلی) برابر مجموع مربعات قطر اصلی است.

98) اگر M^2 متعلق به K_p بود درایه‌های قطر اصلی $(p-1)$ اند و درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی $(p-2)$اند.

(99

$$K_p \text{ برای } (M^2) \text{ ویژگی‌های } \Rightarrow \begin{cases} \text{مجموع درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی} \Rightarrow p(p-1)(p-2) \\ \text{مجموع درایه‌های قطر اصلی} \Rightarrow p(p-1) \\ \text{مجموع کل درایه‌ها} \Rightarrow p(p-1)^2 \end{cases}$$

➤ (M^2) درفت :

100) روی قطر اصلی (0) وجود ندارد (همبندی)

101) اگر بزرگ‌ترین عدد قطر اصلی K بود باید حداقل K تا عدد یک روی قطر اصلی باشد.

➤ **همیلتنی :**

102) کمترین عدد قطر اصلی 2 است.

103) اگر (Min عدد روی قطر اصلی) $\leq \frac{p}{2}$ بود حتماً همیلتنی است.

➤ (M^2) **اویلری :**

104) روی قطر اصلی (0) نیست.

105) روی قطر اصلی عدد فرد نیست.

2)

اصل استقرای ضعیف ریاضی : اگر $S \subseteq N$ و $S \neq \varnothing$ و $(1 \in S, n \in S \xrightarrow{\text{آن‌گاه}} n+1 \in S)$ آن‌گاه $S = \mathbb{N}$ است.

---

3)

اصل استقرای قوی ریاضی : اگر $S \subseteq N$ و $S \neq \varnothing$ و $(1 \in S, \forall_x < n$ که $x \in S \rightarrow n \in S)$ آن‌گاه $S = \mathbb{N}$. است.

---

4)

دنباله‌ی فیبوناتچی : $a_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$ و در دنباله‌ی لوکا . $l_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ (برای هر $n \in \mathbb{N}$)

5) $\binom{2}{2}\binom{3}{2}\dots\binom{n}{2} = \binom{n+2}{3}$

➤ بخش‌پذیری

6) $b|a :$
$$\begin{cases} b \text{ ، } a \text{ را می‌شمارد.} \\ b \text{ ، } a \text{ را عاد می‌کند.} \\ b \text{ یک مقسوم‌علیه } a \text{ است.} \\ a \text{ بر } b \text{ بخش‌پذیر است.} \end{cases}$$

7) $b|a \Rightarrow a = bq$ و $b \leq a \quad (a \neq 0)$

8) $a \mid b \Rightarrow a \mid -b$

9) $a \mid b \Rightarrow -a \mid b$

10) $a \mid b \Rightarrow -a \mid -b$

11) $a \mid b \Rightarrow a \mid mb \quad m \in Z$

12) $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b| \quad b \neq \circ$

13) $a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$

14) $a \mid b \,,\, b \mid a \Rightarrow a = \pm b$

15) $a \mid b \,,\, a \mid c \Rightarrow a \mid mb \pm nc$

16) $a \mid a \quad \forall a \in Z$ بخش‌پذیری خاصیت بازتابی دارد

17) $a \mid b \,,\, b \mid c \Rightarrow a \mid c$ خاصیت تعدی دارد

18) $a \mid b \not\Rightarrow b \mid a$

19) $a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$

20) $a \mid b \Leftrightarrow a^n \mid b^n$

21) $a \mid b \Leftrightarrow ma \mid mb \quad m \in Z$

22) $a \mid b \,,\, c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$

23) $a \mid b \rightarrow a^m \mid b^n \,,\, m \leq n$

24) $\pm 1 \mid a \quad \forall a \in Z$

25) $a \mid \circ \quad \forall a \in Z$

26) $a - b \mid a^n - b^n \quad \forall n \in N$

27) $a + b \mid a^n + b^n \quad n = 2k+1$

28) $a + b \nmid a^n + b^n \quad n = 2k$

29) $a^r + b^s \mid a^n + b^m \Rightarrow \frac{n}{r}, \frac{m}{s} = 2k+1$

30) $ab \mid (a \pm b)^2 - \left(a^2 + b^2\right)$

31) $ab \mid (a \pm b)^3 - \left(a^3 \pm b^3\right)$

32) $7 \mid 2^{3n} - 1 \quad \forall n \in N$

33) $8 \mid 3^{2n} - 1 \quad \forall n \in N$

34) $3 \mid 2^{n} + (-1)^{n+1} \quad \forall n \in N$

35) حاصل‌ضرب 2 عدد صحیح متوالی بر 2 بخش‌پذیر است.

36) حاصل‌ضرب 3 عدد صحیح متوالی بر !3 بخش‌پذیر است.

37) حاصل‌ضرب n عدد صحیح متوالی بر !n بخش‌پذیر است.

38) اگر عددی بر ۳ بخش‌پذیر نباشد مربع آن به صورت $(3k+1)$ است.

38) اگر عددی بر ۳ بخش‌پذیر نباشد مربع آن به صورت $(3k+1)$ است.

39) تعداد عوامل اول x (توان‌های x) در !n $= q_1 + q_2 + q_3 + \dots$

$$\begin{array}{l} n \,|\, \underline{x} \\ \quad q_1 \,|\, \underline{x} \\ \quad\quad q_2 \,|\, \underline{x} \\ \quad\quad\quad \dots \end{array}$$

40) تعداد عوامل عدد اول پنج = تعداد صفرهای جلوی !n

41) تعداد عوامل 2 ، 5 را یافته هر کدام کمتر بود به همان تعداد (0) داریم = تعداد صفرهای جلوی هر عدد غیر فاکتوریلی.

42) اگر !n بخواهد بر x^{K} بخش‌پذیر باشد کمترین مقدار n عددی است که حداقل K عامل x در آن وجود داشته باشد.

43) مربع هر عدد فرد به صورت $(8K+1)$ است.

44) حاصل‌ضرب هر 2 عدد به صورت $(6K+5)$ عددی است به صورت $(6q+1)$.

45) حاصل‌ضرب هر 2 عدد به صورت $4q+3$ یا $4q+1$ عددی است به شکل $(4K+1)$.

➢ مبنا :

46) $(abc)_{10} = c\times 10^0 + b\times 10^1 + b\times 10^2 + \ldots$

47) بردن عدد از مبنای غیر 10 به 10 $\Rightarrow (235)_6 = 5\times 6^0 + 3\times 6^1 + 2\times 6^2 = (95)_{10} = 95$

48) بردن عدد از مبنای 10 به غیر 10 $\Rightarrow$ تقسیمات متوالی $\Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 95 & 6 \\ \underline{-90} & 15 \,|\, 6 \\ 5 & \underline{12} \quad 2 \\ & \;\; 3 \end{array} \Rightarrow 95 = (235)_6$$

49) $(\overline{abc})_n \rightarrow 0 \le a,b,c < n \Rightarrow 0 \le a,b,c \le n-1$

50) اگر مبنای بیش از 10 بود چون می‌توان از (…,12,11) به جای یک رقم استفاده کرد. برای جلوگیری از اشتباه داریم :

$a = 10, b = 11, c = 12, d = 13, d = 13, e = 14, f = 15)$

➢ الگوریتم تقسیم :

51) $\begin{array}{c|l} n & x \\ \hline \vdots & q \\ \underline{\;\;} & \\ r & \end{array} \Rightarrow \underbrace{a}_{\text{مقسوم}} = \underbrace{b}_{\text{مقسوم علیه}}\overbrace{q}^{\text{خارج قسمت}} + r \longrightarrow \text{باقی‌مانده}$

52) $0 \le r \le b-1$

53) $\text{Max} = b - r - 1$ مقداری که می‌توان به مقسوم (a) اضافه کرد تا خارج قسمت (q) تغییر نکند.

54) $\textbf{Max} = \left[\dfrac{r}{q}\right]$ مقداری که می‌توان به مقسوم علیه (b) اضافه کرد تا در تقسیم جدید **q** تغییر نکند.

55) در تقسیم a بر b خارج قسمت از رابطه‌ی $q=\left[\frac{a}{b}\right]$ بدست می‌آید.

56) عضو ابتدای مجموعه‌هایی که به صورت $\{a-bq>0, q\in\mathbb{Z}\}$ اند با باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر b برابر است.

➢ **یافتن r در تقسیمات خاص :**

57) رقم یکان عدد را بر 5 تقسیم می‌کنیم $\Leftarrow$ بر 5

58) ارقام را جمع می‌کنیم و بر 3 یا 9 تقسیم می‌کنیم $\Leftarrow$ بر 3 یا 9

59) باقی‌مانده‌ی 2 رقم سمت را بر 4 یا 25 می‌یابیم $\Leftarrow$ بر 4 یا 25

60) باقی‌مانده‌ی 3 رقم سمت راست را بر 8 یا 125 می‌یابیم $\Leftarrow$ بر 8 یا 125

61) ارقام را یکی در میان از سمت راست جمع و تفریق می‌کنیم سپس عدد حاصل را بر 11 تقسیم می‌کنیم.

62 مانند 11 عمل می‌کنیم با این تفاوت که 3 رقم ، 3 جدا می‌کنیم $\Leftarrow$ بر 7 یا 13.

63) 3 رقم ، 3 رقم جدا می‌کنیم و فقط جمع می‌کنیم $\Leftarrow$ بر 37

64) هر عدد اول بزرگ‌تر از 3 را می‌توان به صورت $6K\pm1$ نوشت.

65) بی‌نهایت عدد اول به صورت $4K+3$ داریم.

66) اگر a و b نسبت به هم اول باشند بی‌نهایت عدد اول به صورت $(aK+b)$ داریم.

67) برای این‌که بفهمیم عددی اول است یا نه باید از عدد رادیکال بگیریم و ببینیم که جزء صحیح رادیکالش اول است یا نه.

68) اگر (2^n+1) اول بود n حتماً توانی از 2 است.

69) اگر (2^n-1) اول بود n حتماً اول است.

70) بین اعداد $n!+1$ و $n!+n$ هیچ عدد اولی نیست.

71) تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\dots p_n^{\alpha_n}$ عبارت است از:

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\times\dots\times(\alpha_n+1)=T(n)$$

72) مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$ عبارت است از:

$$\frac{p_1^{(\alpha_1+1)}-1}{p_1-1}\times\frac{p_2^{(\alpha_2+1)}-1}{p_2-1}\times\dots\times\frac{p_n^{(\alpha_n+1)}-1}{p_n-1}=\sigma(n)$$

73) اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عددی فرد بود آن عدد مربع کامل است.

74) $a\Pi b=(a,b)=d$

75) $d\,|\,a\,,\,d\,|\,b$

76) آن 2 عدد را به اعداد اول تجزیه می‌کنیم و عوامل مشترک با کمترین توان را در هم ضرب می‌کنیم $\Longrightarrow$ یافتن ب.م.م. 2 عدد

77) عضو ابتدای مجموعه‌ی $S=\{ma+nb>0\,|\,M,n\in\mathbb{Z}\}$ با ب.م.م a و b برابر است.

78) $(a,b)=d\Rightarrow\begin{cases}a=a'd\\ b=b'd\end{cases},(a',b')=1$

79) **قضیه‌ی بزو :** اگر ب.م.م. a و b برابر d باشد اعداد صحیح r و S پیدا می‌شوند که حتماً مختلف‌العلامه‌اند و $ra+Sb=d$

80) $a=bq+r\Rightarrow(a,b)=(b,r)$

ویژگی‌های ب. م. م.

81) $(a\,,b)=(-a\,,b)=(a\,,-b)=(-a\,,-b)=$ عدد طبیعی

82) $\left(a^n,b^n\right)=(a\,,b)^n$

83) $(ka\,,kb) = |k| \times (a\,,b)$

84) $(a\,,b) = (a\,,b \pm ka) \quad (K \in \mathbb{N})$

85) $(a\,,b) = d \Leftrightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$

86) $(a\,,b) = 1 \Leftrightarrow (a+b\,,a-b) = 1$ یا 2

87) $(a\,,b) = d \Leftrightarrow (a+b\,,a-b) = d$ یا $2d$

88) $(a\,,b) = 1 \Leftrightarrow (ab\,,a \pm b) = 1$

89) $(a\,,b) = 1 \Leftrightarrow (a^n, b^m) = 1$

90) $\left.\begin{array}{l}(a\,,b) = 1\\(a\,,c) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow (a\,,bc) = 1$

90) $\left.\begin{array}{l}(a\,,b) = 1\\(a\,,c) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow (a\,,bc) = 1$

91) $\left.\begin{array}{l}(a\,,b) = 1\\(a\,,c) = 1\\(b\,,c) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow (abc\,,ab + ac + bc) = 1$

92) $(0\,,0) =$ وجود ندارد.

93) $(0\,,a) = |a| \quad a \neq 0$

94) $(a\,,a) = |a| \quad a \neq 0$

95) $(1\,,a) = 1$

$$100)\ (a\,,b) = (ra + sb + ma + nb) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix} = \pm 1$$

➢ک. م. م.

$101)\ a \coprod b = [a,b] =$ ک. م. م.

107) یافتن ک. م. م. = اعداد را به عوامل اول تجزیه کرده و عوامل مشترک با توان بیشتر را در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم.

$$102) \begin{cases} [a,b] = \dfrac{ab}{(a,b)} \\ \left.\begin{matrix} a = a'd \\ b = b'd \end{matrix}\right\} \Rightarrow [a,b] = a'b'd \\ \text{} \end{cases}$$

a' و b' نسبت به هم اولند.

$103)\ [a,b] = [-a,-b] = [a,-b] = [-a,b]$

$104)\ [Ka,Kb] = |K|.[a,b]$

$105)\ [a^n,b^n] = [a,b]^n$

$106)\ \left.\begin{matrix} [a,[b,c]] = [[a,b],c] \\ (a,(b,c)) = ((a,b),c) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ خاصیت شرکت‌پذیری

$107)\ \left.\begin{matrix} [a,(b,c)] = ([a,b],[a,c]) \\ (a,[b,c]) = [(a,b),(a,c)] \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ خاصیت توزیع‌پذیری

$108)\ [0,a] = |a|$

$109)\ [a,a] = |a|$

$110)\ [1,a] = |a|$

$111)\ a \mid b \Leftrightarrow [a,b] = |b|$

$112)\ (a,b) = 1 \Leftrightarrow [a,b] = ab$

113) $a = bq + r \rightarrow a \overset{b}{\equiv} r$

114) $a \overset{M}{\equiv} b \Rightarrow M \mid a - b$

115)

همنهشتی یک رابطه است که خواص بازتابی ، تقارنی و تعدی را دارد. (هم‌ارزی است).

116) $a \overset{m}{\equiv} a$ بازتابی

117) $a \overset{m}{\equiv} b , b \overset{m}{\equiv} c \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$ تعدی

118) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

119) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a = mk + b$

120) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mk \overset{m}{\equiv} b \pm mk'$

121) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

122) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$

123) $\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{array}\right\} \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd$

124) $\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$

125) $\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{=} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{array}\right\} \; (m , n) = 1 \Rightarrow a \overset{mn}{\equiv} b$

126) $\left.\begin{array}{l} ac \overset{m}{\equiv} bc \\ (m, c) = d \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{\left(\frac{m}{d}\right)}{\equiv} b$

127) $\left.\begin{array}{l} ac \overset{m}{\equiv} bc \\ (m, c) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$

128) اولp , $(a, p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$ قضیه فرما

129) اولp , $(a, p) = 1 \Rightarrow a^{p} \overset{p}{\equiv} a$ نتیجه فرما

130) $(a, m) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} 1$ قضیه اویلر

131) اول$p \Rightarrow (p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$ قضیه ویلسون

132) $a^2 + b^2 \overset{2}{\equiv} (a \pm b)^2$

133) $a^3 \pm b^3 \overset{3}{\equiv} (a \pm b)^3$

---

134) اگر عدد فردی به توان زوج برسد باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر 2 ، 4 و 8 برابر یک است.

---

135) اگر عددی زوج بزرگ‌تر از 8 به توان عددفرد برسدباقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر 2 ، 4 و 8 برابر 0 است.

---

136) اگر عددی فرد به توان عدد فردی برسد برای یافتن باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر 2 ، 4 و 8 کافیست پایه را بر 2 ، 4 و 8 تقسیم کنیم.

137) **رقم یکان :** باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر 10 رقم یکان را معلوم می‌کند.

---

138) **یافتن یکان اعداد توان‌دار :** برای این‌کار کافیست توان را بر 4 تقسیم کنیم. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم (1 ، 2 و 3) شد آن‌گاه رقم یکان پایه را به توان باقی‌مانده می‌رسانیم. اگر باقی‌مانده (0) شد رقم یکان پایه را به توان 4 می‌رسانیم.

139) اگر رقم یکان (0 ، 1 ، 5 و 6) بود و پایه به هر توانی برسد رقم یکان ثابت می‌ماند.

140) اگر رقم یکان 4 بود و پایه به هر توان زوج برسد رقم یکان 6 می‌شود.

141) اگر رقم یکان 4 بود و پایه به هر توان فرد برسد رقم یک 4 می‌شود.

142) اگر رقم یکان 9 بود و پایه به هر توان زوج برسد رقم یکان یک می‌شود.

143) اگر رقم یکان 9 بود و پایه به هر توان فرد برسد رقم یکان 9 می‌شود.

یافتن باقی‌مانده‌ی عدد بر ۱۰۰ :

144) $2^{20K} \overset{100}{\equiv} 76$

145) $7^{4K} \overset{100}{\equiv} 01$

146) $9^{10K} \overset{100}{\equiv} 01$

147) $\Phi(M) =$ **فی‌اویلر** : اعداد کوچک‌تر از M که نسبت به M اولند.

---

148) $M = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \ldots \times p_K^{\alpha_K}$ محاسبه‌ی $\Phi(M)$ برای عدد

$$\Phi(M) = M\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_K}\right)$$

149) $\Phi(M^K) = M^{K-1}\Phi(M)$

---

150) $\Phi(p) = p-1$ اگر p اول باشد.

151) $\Phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ اگر p اول باشد.

152) $\Phi(m)\times\Phi(n)=\Phi(mn)\Leftrightarrow(m,n)=1$

---

153) $(m,n)=d=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times\ldots\times p_K^{\alpha_K}\Rightarrow\Phi_{(m,n)}=\dfrac{\Phi(M)\Phi(n)}{\left(1-\dfrac{1}{p_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{p_K}\right)}$

154) $ax+by=c\xrightarrow{\text{شرط وجود جواب}}(a,b)\,|\,c$

155) $\begin{cases} x=x_0+K\times\dfrac{b}{d} \\ y=y_0+K\times\dfrac{c}{d}\end{cases}$ ، $K\in z$ اگر x_0 و y_0 یکی از جواب‌های معادله‌ی $ax+by=c$ باشند که $(a,b)=d$
سایر جواب‌ها از رابطه‌ی روبرو بدست می‌آید. $\Leftarrow$

156) $ax\overset{M}{\equiv}b\rightarrow(a,M)\,|\,b$ شرط وجود جواب

$$ax+by=c\Rightarrow\begin{cases} ax\overset{b}{\equiv}c & \text{برای یافتن } x \\ by\overset{a}{\equiv}c & \text{برای یافتن } y\end{cases}$$

1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

3) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

4) $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

5) $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

6) $(B-C)\times A=(B\times A)-(C\times A)$

7) $n[(A\times B)\cap(B\times A)]=[n(A\cap B)]^2$

8) $n[(A\times B)\cup(B\times A)]=2n(A).n(B)-[n(A\cap B)]^2$

9) $n[(A\times B)-(B\times A)]=n(A).n(B)-[n(A\cap B)]^2$

10) $n(A^2-B^2)=n[(A\times A)-(B\times B)]$

14) بازتابی (انعکاسی) : $(x,x)\in R$ یا $\forall x\in R: xRx$

15) تقارنی : $yRx \Leftrightarrow xRy$

16) پاد تقارنی : $\begin{cases} xRy \Rightarrow y \not{R} x \\ xRy, yRx \Leftrightarrow x=y \end{cases}$

17) تعدی : $xRy, yRz \Rightarrow xRz$

---

18) اگر R و R' دو رابطه‌ی تقارنی باشند $\Leftarrow R\cap R'$ $R\cup R'$ و $R-R'$ متقارن‌اند.

19) اگر R و R' بازتابی باشند $\Leftarrow R\cup R'$ و $R\cap R'$ بازتابی‌اند اما $R-R'$ بازتابی نیست.

20) اگر R و R' دو رابطه‌ی متعدی باشد $\Leftarrow$ $R\cap R'$ متعدی است ولی $R\cup R'$ و $R-R'$ باید بررسی شوند.

21) اگر R و R' پادتقارنی باشند $\Leftarrow$ $R\cap R'$ و $R-R'$ پادتقارنی‌اند اما $R\cup R'$ باید بررسی شوند.

22) **خاصیت هم‌ارزی :** رابطه‌ای که خواص بازتابی تقارنی و تعدی را دارد.

خاصیت ترتیب : رابطه‌ای که خواص بازتابی پاد تقارنی و تعدی را دارد.

➢ روابط و گراف‌ها :

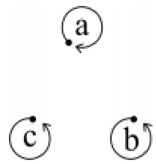
23) **بازتابی :** باید همه‌ی رئوس گراف طوقه‌دار باشند.

24) **تقارنی :** باید بین دو رأس یا اصلاً یالی موجود نباشد یا اگر هست، دوطرفه باشد.

25) **پادتقارنی :** بین دو رأس یا یالی نداریم یا اگر یال باشد، یک‌طرفه است.

26) **تعدی :** اگر در گرافی یالی از a به b وصل بود و یالی هم از b به c وصل بود باید یالی نیز از a به c وصل باشد.

27) تنها حالتی که هم پادمتقارن است و هم متقارن



➢ روابط و ماتریس‌ها :

28) **بازتابی :** باید درایه‌های روی قطر اصلی همگی یک باشند.

29) **تقارنی :** درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی باید نسبت به قطر متقارن باشند.

30) **پاد تقارنی :** باید در دو طرف قطر اصلی جفت 1 (یعنی (1,1)) موجود نباشد.

31) **تعدی :** اگر درایه‌ی (ij) ام و (jk) ام ماتریس برابر یک بودند، باید درایه‌ی (ik) ام ماتریس هم یک باشد.

32) 2^{n^2} : تعداد روابط روی مجموعه‌ی n عضوی A .

33) 2^{n^2-n} : تعداد روابط با خاصیت بازتابی.

34) $2^{\frac{n^2+n}{2}}$: تعداد روابط با خاصیت تقارنی.

35) $2^{\frac{n^2-2}{2}}$: تعداد روابط با خاصیت بازتابی و تقارنی.

36) $3^{\frac{n^2-n}{2}} \times 2^n$: تعداد روابط با خصایت پادتقارنی.

37) جمع و ضرب بولی:
$$\begin{cases} 1\oplus 1=1 \\ 1\oplus 0=1 \\ 0\oplus 0=0 \\ 1\odot 1=1 \\ 1\odot 0=0 \\ 0\odot 0=0 \end{cases}$$

38) اگر $\mathbf{M}$ ماتریس نظیر رابطه‌ی $\mathbf{R}$ باشد، آن‌گاه $M^{(2)}(R)$ یعنی ضرب بولی ماتریس $M(R)$ در خودش .

39) $M^{(2)}(R)=M(ROR)$

➢ **مشخصات ماتریس روابط :**

40) $A<<B$: هر گاه هر درایه‌ی ماتریس $\mathbf{A}$ کوچک‌تر یا مساوی درایه‌ی نظیرش در $\mathbf{B}$ باشد.

41) **ضرب ماتریسی :** ضرب هر درایه‌ی $\mathbf{A}$ در درایه‌ی نظیرش در ماتریس $\mathbf{B}$ به صورت بولی.

42) I_n : ماتریس همانی $\leftarrow$ قطر اصلی $=1$

43) M^T **ماتریس ترانهاده :** جای سطرها و ستون‌های نظیر $\mathbf{M}$ را با هم عوض می‌کنیم.

44) $2^{(\text{صفرهای } A)}$: تعداد ماتریس‌هایی که در شرط $A<<B$ صدق می‌کند.

➢ **قضیه‌ی بسیار :**

45) $I_n << M \Leftrightarrow$ بازتابی $\mathbf{R}$

46) $M=M^T \Leftrightarrow$ متقارن R

47) $M^{(2)} << M \Leftrightarrow$ متعدی R

48) $M_\wedge M^T << I_n \Leftrightarrow$ پادمتقارن R

49) $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

50) $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|+|A\cap B\cap C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$

---

51) $\left[\frac{\text{تعداد کل اعداد}}{[a,b]}\right]$ = تعداد اعدادی که هم بر a و هم بر b بخش‌پذیرند.

براکت

---

52) تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+\ldots+x_K=n \leftarrow \binom{n+K-1}{K-1}=\binom{n+K-1}{n}$

53) تعداد جواب‌ها $x_1+x_2+\ldots+x_K=n$ با شروط $\binom{n+K-1-C_1-C_2-\ldots-C_K}{K-1}$

$$(x_K\ge C_K,\ldots,x_3\ge C_3,x_2\ge C_2,x_1\ge C_1)$$

54) تعداد جملات بسط $(x_1+x_2+\ldots+x_K)^n$ برابر تعداد جواب‌های صحیح نامنفی $x_1+x_2+\ldots+x_K=n$ است.

55) **برچسب‌گذاری دلپذیر** : نسبت دادن اعدای به رئوس درخت (فقط درخت) از مرتبه‌ی p از شماره‌ی 1 تا P به‌طوری که بر چسب هر یال که همان قدر مطلق تفاضل رئوس 2 سر یال است اعداد 1 تا $p-1$ بدست می آیند.

1) اگر عملی به $\underline{n}$ طریق و عمل دیگری به $\underline{m}$ طریق انجام شود این 2 عمل به $m\times n$ طریق انجام می‌شوند (اصل ضرب).

2) اگر عملی به n طریق یا m طریق قابل انجام شدن باشد این عمل در کل به $m+n$ طریق قابل انجام است (اصل جمع).

3) اگر n شی متمایز بخواهند در n جای خالی قرار گیرند تعداد حالات مکان $n!$ است.

4) اگر n شی بخواهند روی محیط دایره‌ای قرار گیرند تعداد حالات $(n-1)!$ است.

5) با $\underline{n}$ مهره‌ی متمایز، دقیقاً $\frac{(n-1)!}{2}$ گردن‌بند متمایز می‌توان ساخت.

---

6) اگر n شی بخواهند در کنار هم قرار گیرند به‌طوری که n_1 شی از نوع اول و ... n_K شی از نوع K ام باشند به‌طوری که $n_1+\ldots+n_K=n$ داریم: $\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\ldots\times n_K!}$

7) اگر بخواهیم از بین n شی K تا انتخاب کنیم و ترتیب مهم نباشد. $\binom{n}{K} = \frac{n!}{K!(n-K)!} = C(n,K) = C_n^K$

8) $\binom{n}{0} = 1$

9) $\binom{n}{1} = n$

10) $\binom{n}{n-1} = n$

11) $\binom{n}{n} = 1$

12) $\binom{n}{K} = \binom{n}{n-K}$

13) $\binom{n}{K} = \binom{n}{K'} \Rightarrow \begin{cases} K = K' \\ \text{یا} \\ n = K + K' \end{cases}$

14) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

15) $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$

16) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{2K} = 2^{n-1}$

17) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{2K+1} = 2^{n-1}$

(18 K مهره را به تصادف و یک‌جا خارج کنیم.

K مهره را یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری خارج کنیم.

K مهره را یکی پس از دیگری و با جایگذاری مجدد خارج کنیم.

در کیسه‌ای n مهره داریم اگر بخواهیم K مهره از کیسه خارج کنیم

$$\begin{cases} \binom{n}{K} \\ p(n,K) = \dfrac{n!}{(n-K)!} \\ n^K \end{cases}$$

(19) **تابع توزیع برنولی :** آزمایشی که دارای 2 نتیجه‌ی پیروزی یا شکست است که احتمال پیروزی را با P و احتمال شکست را با q نشان می‌دهیم.

$$p(X=x)=p^x q^{1-x}$$

(20) اگر آزمایش برنولی را n بار تکرار کنیم. احتمال این‌که K بار پیروزی رخ دهد **(توزیع دوجمله‌ای)**

$$p\ (\text{بار پیروزی } K) = \binom{n}{K}.p^K.q^{n-K}$$