



مشاوره تحصیلی هپوا

تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

مشاوره تخصصی ثبت نام مدارس ، برنامه ریزی درسی و آمادگی
برای امتحانات مدارس

برای ورود به صفحه مشاوره مدارس کلیک کنید

برای ورود به صفحه نمونه سوالات امتحانی کلیک کنید

تماس با مشاور تحصیلی مدارس

۹۰۹۹۰۷۱۷۸۹

تماس از تلفن ثابت



مرکز ملی پژوهش استعدادهای درخشان
دانش پژوهان جوان

با اسمه تعالیٰ

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پژوهش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

تعاونیت دانش پژوهان جوان

«امام خمینی (ره)»

مبارزة علمی برای جوانان، زنده کردن روح جستجو و کشف واقعیت هاست.

دفترچه سوالات مرحله اول

سی و پنجمین دوره المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۵

ساعت: ۹:۰۰ صبح

بانک مقالات ایران

مرکز زبان و مقالات

علمی و پژوهشی و
سؤالات آزمونها

www.edub.ir

کد دفترچه: ۱

تعداد سوالات	مدت آزمون
۳۰	۲۱۰ دقیقه

شماره صندلی:

نام خانوادگی:

نام:

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

- ۱- کد دفترچه سوالات شما ۱ است. این کد را در محل مربوط روی پاسخنامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخنامه شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید که در زیر هر یک از صفحه های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است، یکی باشد.
- ۲- بالا فاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه برگه های دفترچه سوالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۳- یک برگ پاسخنامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در پایین پاسخنامه را با مداد مشکی بنویسید.
- ۴- برگه پاسخنامه را دستگاه تصحیح می کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۵- پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره منفی دارد.
- ۶- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزو، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ماشین حساب و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسائل حتی اگر از آن استفاده نکید یا خاموش باشد، تقلیل محسوب خواهد شد.
- ۷- شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان دهم و سوم متوجه انتخاب می شوند.
- ۸- داوطلبان نمی توانند دفترچه سوالات را با خود ببرند. (دفترچه باید همراه پاسخنامه تحويل داده شود.)
- ۹- نشانی وب گاه کمیته علمی المپیاد ریاضی ایران www.mathysc.ir است.

کلیه حقوق این سوالات برای مرکز ملی پژوهش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان محفوظ است.

آزمون مرحله اول سی و پنجمین دوره المپیاد ریاضی کشور

۱. به چند طریق می‌توان اعداد $1, 2, \dots, 6$ را در یک ردیف نوشت به طوری که از بین هر دو عدد مجاور یکی بر دیگری بخشنده باشد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) ۱۰

۲. مثلث قائم‌الزاویه ABC با فرض $\angle BAC = 90^\circ$ را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز A طوری رسم می‌کنیم که ضلع AB را در D , ضلع AC را در F و ضلع BC را در دو نقطه E و M قطع کند که نقطه E بین نقاط D و M است. می‌دانیم M وسط ضلع BC است و همچنین نسبت طول کمان‌های \widehat{MF} , \widehat{EM} و \widehat{DE} به 2 به 4 است. مقدار قدر مطلق تقاضل دو زاویه حاده مثلث ABC چهقدر است؟

(۱) 70° (۲) 50° (۳) 45° (۴) 30° (۵) 10°

۳. جناب خان می‌خواهد برای گاوصندوق خود رمز انتخاب کند و هر هفته رمز آن را تغییر دهد! رمز گاوصندوق یک عدد سه‌ رقمی است و جناب خان مایل است ارقام رمز متمایز باشند و به علاوه ارقام رمز جدید، از ارقام متناظر در رمز قبلی کمتر نباشد. مثلاً اگر یک بار 259 را انتخاب کرد رمز بعدی نباید 159 باشد. اگر اولین رمز گاوصندوق 140 باشد، او حداقل بعد از چند هفته دیگر نمی‌تواند به این شکل رمز گاوصندوقش را تغییر دهد؟ (توجه کنید که هفته اول، رمز همان 140 خواهد بود).

(۱) ۲۸ (۲) ۲۴ (۳) ۲۰ (۴) ۱۹ (۵) ۱۶

۴. تابع $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ مفروض است. برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $m \in \mathbb{Z}$ با شرط 1 :

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n+1}$$

که منظور از (m, n) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک m و n است. کدام یک از گزاره‌های زیر درباره تابع f درست است؟

- (۱) تابع f یک به یک است.
- (۲) تابع f یکنوا (صعودی یا نزولی) است.
- (۳) برد تابع f تمام اعداد گویا است.
- (۴) به ازای هر $x \in \mathbb{Q}$ داریم $f(x) \leq x$.
- (۵) همه گزینه‌ها صحیح هستند.



آزمون مرحله اول سی و پنجمین دوره المپیاد ریاضی کشور

۵. چند عدد سه رقمی \overline{abc} وجود دارد که مربع کامل باشد و اگر یک واحد به رقم صدگان، دو واحد به رقم دهگان و سه واحد به رقم یکان آن اضافه شود، حاصل سه رقمی و مربع کامل باشد؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه (۵) چهار

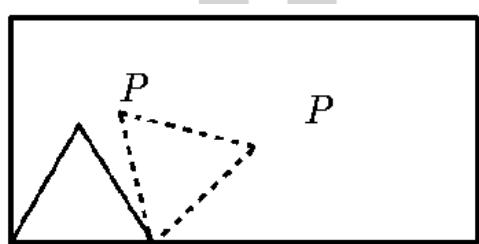
۶. با استفاده از همه ارقام ۱ تا ۹، سه عدد سه رقمی با ارقام متمایز ساخته ایم و بزرگترین آنها را نامیده ایم. کمترین مقدار ممکن برای A چند است؟

(۱) ۳۴۵ (۲) ۱۹۸ (۳) ۹۱۲ (۴) ۳۹۸ (۵) ۳۱۲

۷. برای $A, B \subseteq \mathbb{R}$ $A \otimes B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ چند تا از گزاره های زیر درست است؟ (\mathbb{Q}' نماد مجموعه اعداد گنگ است).

- $\mathbb{Q}' \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{0\}$ •
- $\{\sqrt{2}, 5\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{0\}$ •
- $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$ •
- $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{0\}$ •

(۱) چهار (۲) سه (۳) دو (۴) یک (۵) صفر



۸. مثلثی متساوی الاضلاع به ضلع واحد درون و روی محیط یک مستطیل 2×4 ، مانند شکل، می‌غلطد. رأس P ، که در شکل مشخص شده، از ابتدای حرکت تا زمانی که برای اولین بار به مکان اولیه اش بازگردد، چه مسافتی را طی می‌کند؟

(۱) $\frac{10\pi}{3}$ (۲) 3π (۳) 4π (۴) $\frac{7\pi}{3}$ (۵) 2π

۹. چند سه تایی مرتب (x, y, z) وجود دارد که x, y, z ارقام ناصفر و متمایزی باشند و $x \times y \times z$ بخش پذیر باشد؟

(۱) ۱۴۰ (۲) ۱۴۴ (۳) ۱۴۸ (۴) ۱۵۲ (۵) ۱۵۶



آزمون مرحله اول سی و پنجمین دوره

المپیاد ریاضی کشور

۱۰. اعداد $1, 2, \dots, 1395$ روی تخته نوشته شده و ما به این شکل آنها را خط می‌زنیم؛ هر بار بزرگ‌ترین عددی که تا قبل از آن خط نخورده را انتخاب و همه مقسوم علیه‌های آن را به ترتیب از بزرگ به کوچک خط می‌زنیم و سپس مجدداً به سراغ بزرگ‌ترین عدد خط‌نخورده می‌رویم و همین کار را تکرار می‌کنیم تا همه اعداد خط بخورند. آخرین عددی که خط می‌خورد کدام است؟

۷۰۳ (۵) ۷۰۱ (۴) ۶۹۸ (۳) ۴۱ (۲) ۳۷ (۱)

۱۱. عمل * را در مجموعه اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x * y = \frac{x + y}{1 - xy}$$

اگر a, b, c ریشه‌های $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$ کدام است؟

-۲ (۵) $\frac{8}{3}$ (۴) -۸ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۲) ۲ (۱)

۱۲. تعداد سه‌تایی‌های مرتب (a, b, c) از اعداد طبیعی را بیابید که در شرط زیر صدق کنند:

$$a(b, c) = b(c, a) = c(a, b) = 2^6 \times 3^8 \times 5^1$$

(منظور از (a, b) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b است).

۷۲۰ (۵) ۱۶۲۰ (۴) ۲۰۰۰ (۳) ۲۰۸۰ (۲) ۳۲۴۰ (۱)

۱۳. می‌خواهیم با چیدن ۱۲ آجر مکعبی به ضلع واحد، بر روی میز، مکعب مستطیلی به طول ۳، عرض ۲ و ارتفاع ۲ واحد، بسازیم. طبیعتاً یک مکعب بالایی را نمی‌توان قبل از مکعب زیری، سر جایش گذاشت. به چند روش متفاوت می‌توان این مکعب مستطیل را ساخت؟ (توجه داشته باشید که مکعب‌ها از نظر متفاوتی ندارند و مسئله ترتیب پر کردن ۱۲ محل مکعب مستطیل است.)

۷۴۸۴۴۰۰ (۵) ۹۲۴ (۴) ۳۲۴ (۳) ۱۴۴ (۲) ۳۶ (۱)

۱۴. اعدادی دو به دو متمایزند. می‌دانیم سه معادله درجه دوی زیر ریشه‌ای مشترک دارند.

$$ax^3 + bx^2 + c = 0, \quad bx^3 + cx^2 + a = 0, \quad cx^3 + ax^2 + b = 0.$$

مقدار آن ریشه مشترک چند است؟

۵) به طور یکتا تعیین نمی‌شود. ۱ (۴) -۱ (۳) $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (۲) ۰ (۱)



آزمون مرحله اول سی و پنجمین دوره

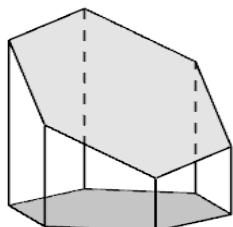
المپیاد ریاضی کشور

۱۵. عدد سیب داریم که ۹۰۰ عدد آن‌ها سالم و مابقی لکه‌دار هستند. آن‌ها را در تعدادی جعبه پخش می‌کنیم به‌طوری که تعداد سیب‌ها در هر جعبه با جعبهٔ دیگر برابر باشد. در حداقل و حداقلتر چند درصد جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است؟

- (۱) ۹۰ و ۱۰۰ (۲) ۹۰ و ۱۰۰ (۳) ۸۰ و ۱۰۰ (۴) ۸۰ و ۱۰۰ (۵) ۵۰ و ۱۰۰

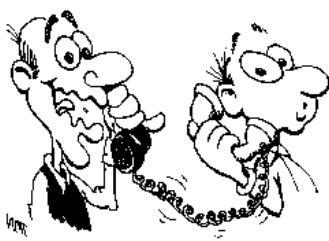
۱۶. چند زوج مرتب (m, n) از اعداد طبیعی داریم که $[1, 2, \dots, m] = 1395 \times [1, 2, \dots, n]$ (منظور از نماد $[1, 2, \dots, m]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک مثبت اعداد $1, 2, \dots, m$ است).

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه (۵) چهار



۱۷. یک منشور قائم با قاعدهٔ شش‌ضلعی منتظم به ضلع واحد را توسط یک صفحه برش زده‌ایم. اگر فاصلهٔ رئوس این سطح مقطع تا قاعدهٔ پایین به‌ترتیب برابر $2, 3, x, y, 11$ و z باشد $x + y + z$ چه‌قدر است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴ (۵) ۲۶



۱۸. در شهر ساده‌لوحان شایعه‌ها به سرعت پخش می‌شود؛ اگر آقای خالی‌بند، بخواهد شایعه‌ای را پخش کند ابتدا آن شایعه را به یک نفر دیگر منتقل می‌کند. در ادامه هر روز آقای خالی‌بند و هر کسی که شایعه را در یکی از روزهای گذشته شنیده آن را به فرد جدیدی منتقل می‌کند. پس از آن که تعداد افرادی که شایعه را شنیده‌اند از مرز یک میلیون نفر گذشت، چند نفر شایعه را مستقیماً یا با یک واسطه از آقای خالی‌بند شنیده‌اند؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۱۰ (۳) ۱۰۲۴ (۴) ۵۰۰۰۰۰ (۵) ۵۲۴۲۸۸

۱۹. چند زوج مرتب از اعداد حقیقی (x, y) وجود دارد که در دستگاه معادلات زیر صدق کند؟

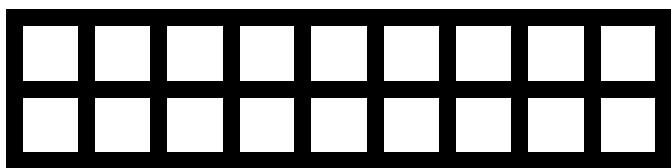
$$\begin{cases} x^3 - 3xy + 2y^3 + x - y = 0 \\ 2x^3 - 2xy - 3y^3 - 2x + 5y = 0 \end{cases}$$

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) ۶



آزمون مرحله اول سی و پنجمین دوره

المپیاد ریاضی کشور



۲۰. خیابان‌کشی محله‌ای به شکل رو به رو است: سه خیابان افقی و ده خیابان عمودی. پلیسی می‌خواهد به همه تقاطع‌ها سرکشی کند به‌طوری که از تقاطع راست-بالا شروع کند، از هر تقاطع دقیقاً یک بار عبور کند و در انتهای به تقاطع راست-بالا برگرد. این کار به چند روش ممکن است؟

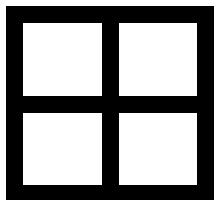
(۱) $3^6 - 3^5$

(۲) $2^4 \times 3^4$

(۳) 2×3^4

(۴) 3^5

(۵) 2^5



۲۱. خیابان‌های محله‌ای به نام پهران مانند شکل رو به رو شامل ۹ تقاطع و ۱۲ خیابان است. (مسیر بین هر دو تقاطع یک خیابان است). هر شب در این محله ۹ خودرو پارک می‌شود که همگی داخل خیابان‌ها و نه در تقاطع‌ها قرار دارند. در هر تقاطع میانگین تعداد خودروهای موجود در خیابان‌های متصل به آن تقاطع را ظرفیت پارک آن تقاطع می‌نامیم. می‌دانیم که مجموع ظرفیت پارک ۹ تقاطع، برابر ۶۶ است. کدام یک از گزاره‌های زیر حتماً درست است؟

(۱) ظرفیت پارک تقاطع مرکزی محله، بیشتر از تقاطع‌های دیگر است.

(۲) در هر یک از خیابان‌هایی که در حاشیه محله واقع است، دست‌کم ۶ خودرو پارک شده است.

(۳) در یکی از خیابان‌هایی که در حاشیه محله واقع است، دست‌کم ۸ خودرو پارک شده است.

(۴) در یکی از خیابان‌های متصل به مرکز محله، دست‌کم ۹ خودرو پارک شده است.

(۵) گزینه‌های ۱ و ۴.



۲۲. در مسابقه قوی‌ترین مردان ایران ۱۰ خانه دور یک دایره قرار دارد که در هر خانه ۲۰۰ وزنه از همه وزنه‌های ۱، ۲، ... و ۲۰۰ کیلوگرمی وجود دارد. ابتدا مردی در خانه‌ای قرار دارد، با شروع مسابقه از آن خانه وزنه ۱ کیلوگرمی را برداشته و در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کرده ۱ خانه به جلو می‌رود، وزنه را در آنجا قرار داده و از آن خانه وزنه ۲ کیلوگرمی را برداشته و ۲ خانه به عقب (پاد ساعت‌گرد) آمده و وزنه را در آن قرار می‌دهد، سپس از آنجا وزنه ۳ کیلوگرمی را برداشته ۳ خانه در جهت ساعت‌گرد می‌رود و همین روند ادامه می‌یابد. پس از آن که وزنه ۲۰۰ کیلوگرمی را جابه‌جا کرد در خانه‌ای که کار خود را از آنجا شروع کرده بود مجموعاً چند کیلوگرم وزنه وجود دارد؟

(۱) ۲۰۰۸۰

(۲) ۲۰۱۰۰

(۳) ۲۰۱۸۰

(۴) ۲۰۲۰۰

(۵) ۲۰۲۸۰



آزمون مرحله اول سی و پنجمین دوره المپیاد ریاضی کشور

۲۳. مثلث ABC مفروض است. فرض کنید w_b و w_c به ترتیب دو دایره گذرنده از A باشند به طوری که به ترتیب در B و C بر BC مماس باشند و A محل برخورد دو دایره مذکور باشند. از هر کدام از نقاط B و C خطی موازی با ضلع روبرویش رسم می‌کنیم و محل برخورد این دو خط را T نام‌گذاری می‌کنیم. گیریم خطوط TB و TC به ترتیب دایره‌های محیطی مثلث‌های ANB و ANC را برای بار دوم در E و F قطع کنند. اگر $BC = 8$ و $AN = 6$ حاصل $NF \times NE$ کدام است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۸۱ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱۵۰ (۵) ۲۰۰

۲۴. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داریم $\angle ABC = 60^\circ$. E را نقطه‌ای روی AB بگیرید که $BE = 2AE$ ، بعلاوه F را هم قرینه E نسبت به مرکز متوازی‌الاضلاع فرض کنید. اگر CE و CF بر هم عمود باشند، نسبت ضلع کوچک‌تر به ضلع بزرگ‌تر متوازی‌الاضلاع به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

- (۱) $1/2$ (۲) $2/3$ (۳) $3/4$ (۴) $4/5$ (۵) $6/5$

۲۵. بزرگ‌ترین عدد حقیقی و ثابت k را بیابید به طوری که برای تمام اعداد حقیقی a, b, c, d, e :

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - e)^2 + (e - a)^2 \geq k(b - d)^2$$

- (۱) ۱ (۲) $1/5$ (۳) $1/6$ (۴) 2 (۵) $5/6$

۲۶. برای زیرمجموعهٔ ناتهی A از نقاط صفحه و عدد حقیقی $r > 0$ ، مجموعهٔ نقاطی که از دست کم یک نقطهٔ A فاصله‌ای کمتر یا مساوی r دارند را با A_r نمایش می‌دهیم. چند تا از گزاره‌های زیر درست هستند؟ (در همه موارد r و s اعداد حقیقی مثبت و A و B زیرمجموعه‌هایی از صفحه هستند).

- $(A_r)_s = (A_s)_r$
 - $B \subset A_r$ اگر و تنها اگر $A \subset B_r$
 - اگر برای هر $t > 0$ آن‌گاه $A_t \subset B_t$
 - $(A \cup B)_r = A_r \cup B_r$
 - اگر $(A \cap B)_r = A_r \cap B_r$ آن‌گاه $A \cap B$ ناتهی باشد داریم
- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار (۵) پنج



آزمون مرحله اول سی و پنجمین دوره المپیاد ریاضی کشور

۲۷. در مثلث ABC داریم $\hat{B} = 2\hat{C}$. عمودمنصف ضلع BC در نقطه D با ضلع AC برخورد می‌کند و عمودمنصف BD در نقطه F با ضلع AB تقاطع دارد. دایره‌ای که مرکز آن روی خط FD است را خارج از مثلث در نظر می‌گیریم که بر ضلع AC و امتداد ضلع BC مماس شود. اگر مساحت مثلث AFD نه برابر مساحت مثلث ABC باشد و $FO = 4$, شعاع

دایره چه قدر می‌شود؟

(۵) $2\sqrt{6}$

(۴) $3\sqrt{2}$

(۳) $3 - \sqrt{2}$

(۱) $3\sqrt{3}$

۲۸. فرض کنید x, y, z اعداد حقیقی مثبت باشند به گونه‌ای که $x + y + z = 222$ و $A = \min \{xy, yz, zx\}$. اگر $xy + yz + zx = 12321$ آن‌گاه بیشترین مقدار ممکن

برای A چند است؟

(۵) ۱۳۶۹

(۴) ۱۶۰۲

(۳) ۲۴۱۲

(۲) ۴۱۰۷

(۱) ۵۴۷۶

۲۹. زیرمجموعه‌ای از $\{0, 1, 2, \dots, 99\}$ مثل A را «تقریباً جمعی» می‌گوییم، هرگاه بیش از یک عضو داشته باشد و به علاوه برای هر دو عضو متمایز a و b از A , باقی‌مانده تقسیم $1 + a + b$ بر 100 نیز عضوی از A باشد. چند زیرمجموعه تقریباً جمعی وجود دارد؟

(۵) ۲۰۰

(۴) ۱۵۵

(۳) ۱۴۸

(۲) ۹۹

(۱) ۴۹

۳۰. وترهای AB و CD از دایره P خارج از دایره متقاطع‌اند که A بین B و P است و C بین D و P است. می‌دانیم $AB = 3AP$. عمودهای وارد از C و D بر AB را به ترتیب H و H' و وسط پاره‌خط PB را M می‌نامیم. اگر $\frac{CM}{CH} = \sqrt{3}$ باشد، مقدار

چه قدر است؟ $\frac{DM}{\sqrt{DH'}}$

(۵) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۴) $\sqrt{6}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۲) $3\sqrt{3}$

(۱) $2\sqrt{3}$

قابل توجه دانش‌آموزان سال دهمی: کمیته علمی المپیاد ریاضی در تلاش است، به عنوان جایزه‌ای علمی، تعدادی مدرسه کوتاه تابستانی برای رتبه‌های برتر دانش‌آموزان سال دهم برگزار کند که با ریاضیات زیبا و هنر حل مسائله بیش‌تر آشنا شوند. جامعه‌های هدف اصلی این برنامه، دانش‌آموزانی هستند که نمرات آن‌ها نزدیک مرز قبولی در مرحله دوم است ولی مدارس محل تحصیل آن‌ها در سال‌های گذشته موفقیت کمتری در المپیاد ریاضی داشته‌اند تا بدین‌وسیله المپیاد ریاضی گسترش یافته و اثرگذاری بیش‌تری در رشد ریاضیات کشور پیدا کند. امیدواریم در صورت فراهم شدن شرایط، بتوانیم اولین دوره این مدارس کوتاه را در تابستان سال ۱۳۹۶ اجرا کنیم.

www.Heyvagroup.com