فرمول های ریاضی و آمار دوازدهم رشته انسانی

اصل جمع

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، به طوری که این دو عمل را نتوانیم با هم انجام دهیم، در این صورت به m+n طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)

اصل ضرب

اگر عملی‌در دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم هر کدام از این عمل به n طریق انجام‌پذیر باشد، در کل آن عمل به m×n طریق انجام پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است.)

نماد فاکتوریل

برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگتر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچکتر از خودش از نماد فاکتوریل (!) استفاده می‌کنیم.

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

جایگشت

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌نامیم و تعداد این جایگشت‌ها برابر است با n!.

$$\boxed{n} \times \boxed{n-1} \times \boxed{n-2} \times \ldots \times \boxed{2} \times \boxed{1} = n!$$

اگر در محاسبه جایگشت اشیاء بخواهیم چند شیء خاص کنار هم باشند، آنها را داخل یک مجموعه قرار داده و یک شیء در نظر می‌گیریم، سپس جایگشت شیء حاصل را با اشیای دیگر محاسبه می‌کنیم.

روش متمم

اگر در مسأله‌ای از فعل منفی استفاده شود، مثلاً خواسته شود که ۲ نفر خاص کنار هم **نباشند**، در این صورت بهتر است تعداد جایگشت‌هایی که آن ۲ نفر کنار هم باشند را محاسبه کنیم و جوابش را از تعداد کل جایگشت‌ها کم کنیم.

ترتیب

تعداد جایگشت‌های r شیء که ترتیب قرار گرفتن آنها در کنار هم مهم باشد (ترتیب‌های مختلف با هم فرق داشته باشند) را ترتیب r از n می‌گویند و با نماد $p(n,r)$ یا $(n)_r$ نشان می‌دهند که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

ترکیب

تعداد آرایش‌های مختلف r شیء از n شیء که ترتیب قرار گرفتن آنها در کنار هم مهم نباشد (ترتیب‌های مختلف با هم فرقی نداشته باشند) را ترکیب r از n می‌گویند و با نماد $c(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ یا c_n^r نشان می دهند که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$c(n,r)=\frac{n!}{(n,r)!\times r!}$$

خواص مهم ترکیب

$$۱)\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱ \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۷}{۰}=\binom{۷}{۷}=۱$$

$$۲)\binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}=n \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۵}{۱}=\binom{۵}{۷}=۵$$

$$۳)\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۱۰}{۶}=\binom{۱۰}{۱۰-۶}=\binom{۱۰}{۴}$$

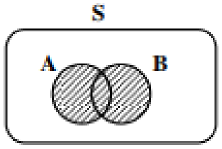
$$۴)\binom{n}{r}+\binom{n}{r+۱}=\binom{n+۱}{r+۱}\ \text{قاعده پاسکال} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۱۰}{۷}+\binom{۱۰}{۸}=\binom{۱۱}{۸}$$

$$۵)p(n,r)=c(c,r)\times r! \xrightarrow{\text{مثال}} p(۶,۴)=c(۶,۴)\times ۴!$$

اعمال روی پیشامدها

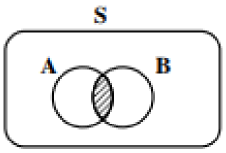
فضای نمونه ای و پیشامدهای یک پدیده تصادفی ا ز جنس مجموعه هستند، بنابراین می توانیم اعمال اجتماع ($\bigcup$)، اشتراک ($\bigcap$)، تفاضل ($-$) و متمم ($'$) را روی آنها تعریف کنیم.

الف) اجتماع دو پیشامد:



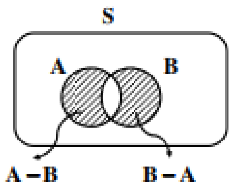
اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \bigcup B$، در صورتی اتفاق می‌افتد که **A یا B یا هر دو اتفاق بیفتند** (حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهند.)

ب) اشتراک دو پیشامد:



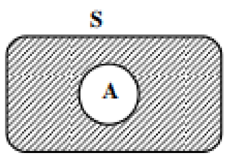
اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \bigcap B$، در صورتی اتفاق می‌افتد که **A و B یا هر دو اتفاق بیفتند.**

پ) تفاضل دو پیشامد:



اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A - B$، هنگامی اتفاق می‌افتد که **A اتفاق بیفتد اما B اتفاق نیفتند.** (فقط پیشامد A رخ دهند.)

ت) متمم دو پیشامد:



اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه متمم پیشامد A را با A' نشان می‌دهیم. پیشامد A' در صورتی اتفاق می‌افتد که **A اتفاق نیفتد.**

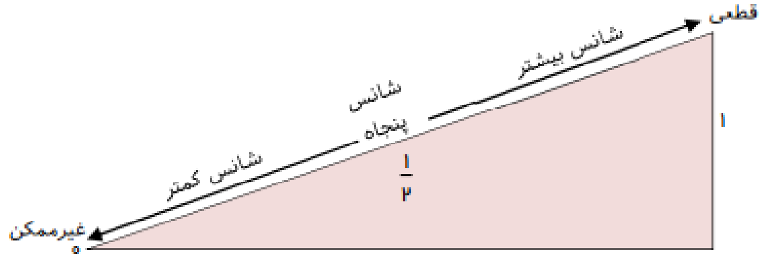
احتمال یک پیشامد

اگر $S \notin \varnothing$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A \subseteq S$ یک پیشامد باشد، آنگاه احتمال رخداد پیشامد A را با $P(A)$ نشان می دهیم و برای محاسبه $P(A)$ کافی است تعداد اعضای A یعنی $n(A)$ را بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای یعنی $n(S)$ تقسیم می‌کنیم.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}$$

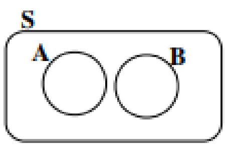
قــوانین احتمــال

الف) $P(A)$ عددی حقیقی است که همیشه $0 \le P(A) \le 1$ می‌باشد و هر چه مقدار $P(A)$ به عدد ۱ نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد بیشتر و هر چه به عدد صفر نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد آن کمتر است.



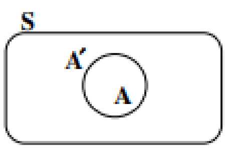
$$0 \le P(A) \le 1 \quad , \quad P(\varnothing) = 0 \quad , \quad P(S) = 1$$

ب) هر گاه A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه‌ای S باشند.



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

پ) اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه‌ای S باشد، در این صورت احتمال واقع نشدن آن پیشامد را با نمایش $P(A')$ می‌دهیم و داریم:



$$P(A') = 1 - P(A) \text{ یا } P(A) + P(A') = 1$$

در این حالت A و A′ را دو پیشامد متمم می‌گوییم.

۱۲. مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ برابر است با:

$$\begin{cases} S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) & \text{(با داشتن اول جمله اول و آخر)} \\ & \text{یا} \\ S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] & \text{(با داشتن جمله اول و اختلاف مشترک)} \end{cases}$$

۱۳. در هر دنباله حسابی، برای مجموع جملات دنباله داریم: $S_n - S_{n-1} = a_n$

۱. دنباله حسابی دنباله‌ای است که در آن به‌جز جمله اول هر جمله برابر با حاصل‌ضرب جمله قبلا از آن در یک عدد ثابت است.

۲. در هر دنباله هندسی حاصل تقسیم هر جمله به جمله قبل از آن، مقدار ثابتی است که آن را نسبت مشترک می‌نامیم و با r نشان می‌دهیم.

$$r = \frac{\text{جمله}}{\text{جمله قبلی}} \Rightarrow r = \frac{a_n}{a_{n-۱}}$$

این رابطه را ضابطه بازگشتی دنباله هندسی می‌نامیم.

۳. اگر دو جمله دلخواه از یک دنباله هندسی را داشته باشیم، نسبت مشترک دنباله برابر است با:

$$r^{n-m} = \frac{a_n}{a_m} \quad (n > m)$$

۴. در یک دنباله هندسی:

- اگر $r > ۱$ باشد، دنباله افزایشی است.
- اگر $۰ < r < ۱$ باشد، دنباله کاهشی است.
- اگر $r = ۱$ باشد، دنباله ثابت است.
- اگر $r < ۰$ باشد، دنباله نوسانی است.

۵. شرط اینکه جمله‌های $a_۱, a_۲, a_۳, ...$ تشکیل دنباله هندسی دهند، این است که نسبت هر دو جمله متوالی برابر باشد، یعنی: $\frac{a_۲}{a_۱} = \frac{a_۳}{a_۲} = ...$

۶. اگر a، b و c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، عدد b را واسطه (میانگین) حسابی دو عدد a و c می‌نامیم و داریم: $b^۲ = ac$ یا $b = \mp\sqrt{ac}$

۷. اگر $a_۱$ جمله اول دنباله هندسی و r نسبت مشترک دنباله باشد، جمله‌های دنباله به صورت زیر است:

$$a_۱ \ , \ a_۱ r \ , \ a_۲ r \ , \ ...$$

و به همین صورت جمله n اُم یا جمله عمومی دنباله برابر است با:

$$a_n = a_۱ \left(\frac{۱ - r^n}{۱ - r} \right)$$

۹. اگر در دنباله هندسی $|r| < ۱$ باشد، مجموع بی‌شمار جمله از این دنباله هندسی (حد مجموع) برابر است با:

$$S = \frac{a_۱}{۱ - r}$$

۱۰. دنباله‌ای که هم حسابی باشد و هم هندسی، دنباله ثابت است.

۱۱. هر تابع نمایی، جمله عمومی یک دنباله هندسی است که در آن پایه همان نسبت مشترک است و بالعکس، یعنی جمله عمومی هر دنباله هندسی، به صورت یک تابع نمایی است.

۱. برای عدد طبیعی n بزرگتر از ۱ اگر $b^n = a$ باشد، عدد a را توان n ام عدد b و عدد b را ریشه n ام عدد a می‌نامیم.

۲. هر عدد حقیقی a دارای یک ریشه فرد به صور $\sqrt[n]{a}$ است.

۳. هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشه زوج به صورت $\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$ است که قرینه یکدیگر هستند.

۴. اعداد منفی ریشه زوج ندارند.

۵. تمام ریشه‌های زوج و فرد عدد صفر برابر صفر است. $\sqrt[n]{0} = 0$

۶. ریشه‌های n اُم عدد a در واقع ریشه‌های معادله $x^n = |a|$ هستند.

۷. اگر n عددی فرد باشد: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

اگر n عددی زوج باشد: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ یعنی: $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & (\text{n زوج}) \\ a & (\text{n فرد}) \end{cases}$

۸. رابطه $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ همواره برقرار نیست.

۹. اگر n عدد طبیعی بزرگتر از ۱ باشد، توان $\frac{1}{n}$ عدد حقیقی و مثبت a برابر است با: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

۱۰. اگر m و n دو عدد طبیعی باشند، توان گویای عدد حقیقی و مثبت a برابر است با:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad , \qquad x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

۱۱. برای اعداد حقیقی و مثبت a و اعداد طبیعی m داریم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

۱۲. اگر m و n اعداد صحیح باشند، روابط زیر برای اعداد حقیقی a و b برابر هستند.

۱) $a^m . a^n = a^{m+n}$

۲) $a^m . b^m = (a.b)^m$

۳) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$

۴) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b} = 1\right)^m \quad (b \neq 0)$

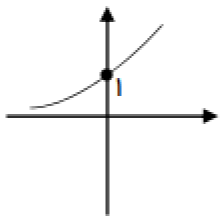
۵) $(a^m)^n = a^{mn}$

۶) $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

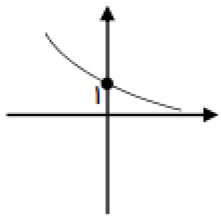
۷) $a^{-m} = {}^{1} a^m \quad (a \neq 0)$

۱۳. در مورد توان‌های گویا، $(m, n \in Q)$ روابط بالا فقط برالی اعداد حقیقی مثبت برقرار خواهد بود.

۲. اگر پایه بزرگتر از ۱ باشد ($a>1$) نمودار تابع به صورت مقابل است که یک تابع افزایشی (صعودی) است.



۳. اگر پایه بین ۰ و ۱ باشد ($0<a<1$) نمودار تابع به صورت مقابل است که یک تابع کاهشی (نزولی) است.



۴. در هر دو حالت تابع (نزولی یا صعودی) دامنه تابع نمایی برابر تمام اعداد حقیقی یعنی R و برد آن برابر اعداد حقیقی مثبت یعنی R^+ یا $\{x \mid x \in R\ ,\ x>0\}$ است.

۵. عرض نقطه تقاطع منحنی تابع نمایی با محور y ها (عرض از مبدأ) همواره برابر ۱ است و تابع از نقطه $(0,1)$ می‌گذرد.

۶. اگر مقدار اولیه یک تابع برابر c و میزان تغییرات (رشد) آن در زمان t برابر r باشد، مقدار نهایی آن برابر است با: $f(t)=c(1+r)^t$

۷. تابع $f(t)=c(1+r)^t$ را معادله **زوال نمایی** می‌نامیم که در آن c مقدار اولیه، r میزان نزول بر حسب اعشار و t زمان است.