



مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچه سؤالات مرحله اول سال ۱۴۰۲

چهل و دومین دوره المپیاد ریاضی

کد دفترچه: ۱

| مدت آزمون | تعداد سؤالات | |
|-----------|--------------|------------|
| | ۲۱۰ دقیقه | پاسخ کوتاه |
| ۱۶ | | ۹ |

نام:

نام خانوادگی:

شماره صندلی:

توضیحات مهم

استفاده از هر نوع ماشین حساب ممنوع است.

- ۱- کد دفترچه سؤالات شما یک است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ‌نامه با مداد پر کنید، در غیر این صورت پاسخ‌نامه شما تصحیح نخواهد شد.
- ۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و همه برگه‌های دفترچه سؤالات را بررسی نمایید، در صورت هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسؤول جلسه را مطلع کنید.
- ۳- یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است، در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسؤول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در بالای پاسخ‌نامه را با مداد مشکی بنویسید.
- ۴- برگه پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکند و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۵- دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.
- ۶- سؤالات به دو شکل پاسخ کوتاه و پنج گزینه‌ای هستند، پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال پنج گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. پاسخ نادرست به سوال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
- ۷- شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند، به علاوه تعدادی از دانش‌آموزان پایه دهم، به صورت آزمایشی و کسب تجربه، در آزمون مرحله دوم پذیرفته خواهند شد.
- ۸- وبگاه کمیته علمی المپیاد ریاضی ایران www.mathysc.ir است.

آزمون مرحله اول چهل و دومین المپیاد ریاضی

دانش‌آموز عزیز، سوال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سوال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سوال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سوالات پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سوال مشابه و دارای چهار ستون است که در هر کدام می‌توانید یکی از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.

| سؤال ۱ | | | |
|--------|-------|-------|---------|
| یکان | دهگان | صدگان | هزارگان |
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۲ | ۲ | ۲ | ۲ |
| ۳ | ۳ | ۳ | ۳ |
| ۴ | ۴ | ۴ | ۴ |
| ۵ | ۵ | ۵ | ۵ |
| ۶ | ۶ | ۶ | ۶ |
| ۷ | ۷ | ۷ | ۷ |
| ۸ | ۸ | ۸ | ۸ |
| ۹ | ۹ | ۹ | ۹ |

جواب سوال‌های پاسخ کوتاه عددی نامنفی و کوچک‌تر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید، به عنوان مثال اگر پاسخ ۶۹۵ باشد، شما باید در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبرو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید. در مورد سوال‌های پنج‌گزینه‌ای، شماره گزینه درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

هم‌چنین در انتهای برخی سوالات پاسخ کوتاه بخشی به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده است که با علامت نمایش داده خواهد شد. این بخش خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً به دلیل جلوگیری از اشتباهات محاسباتی احتمالی است. توجه کنید تمام شکل‌های کشیده شده در سوالات نادقیق هستند.

۱. کمیته المپیاد ریاضی هفت عضو دارد. برای تصویب یک طرح بین اعضا رأی‌گیری صورت می‌گیرد. اگر هر کدام از اعضا به احتمال یکسان به یک طرح رأی مثبت و منفی بدهند و برای تصویب طرح نیاز به حداقل دوسوم رأی مثبت باشد، احتمال تصویب یک طرح چقدر است؟

$$\frac{5}{64} \quad (5) \qquad \frac{1}{2} \quad (4) \qquad \frac{17}{128} \quad (3) \qquad \frac{2}{3} \quad (2) \qquad \frac{29}{128} \quad (1)$$

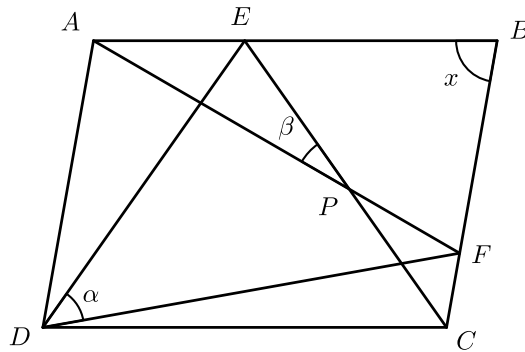
۲. معادله زیر چند جواب حقیقی دارد؟

$$(((x - 1)^3 - 2)^3 - 3)^3 = 4$$

۳. چند عدد طبیعی چهار رقمی \overline{abba} یافت می‌شود که دقیقاً چهار مقسوم‌علیه طبیعی داشته باشد و مجموع ارقام آن برابر ۲۰ باشد. پاسخ عددی زوج است.

آزمون مرحله اول چهل و دومین المپیاد ریاضی

۴. چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است. α برابر با 5° درجه و β برابر با 2° درجه هستند. اگر $AF = FD$ و $DE = EC$ باشند، x چند درجه است؟



۵. می‌خواهیم وجوه درونی و بیرونی یک هرم منتظم با قاعده مثلث را با هشت رنگ، رنگ کنیم طوری که هر رنگ دقیقاً یک بار استفاده شود. این کار به چند طریق ممکن است؟ (دو رنگ آمیزی که با یک دوران به هم تبدیل شوند را یکسان در نظر می‌گیریم.)
 جمع ارقام جواب ۱۲ است.

۶. مردم سرزمین شکرستان بسیار گیج هستند اما مهارت بالایی در نظریه اعداد دارند. هر فرد در شکرستان یک کد ملی ده رقمی دارد. این مردم هنگام پر کردن فرم‌ها در وارد کردن کد ملی خود ممکن است مرتکب دو اشتباه شوند: دو رقم متوالی را جابجا وارد کنند مثلاً ۱۲۳۴ به جای ۱۲۴۳. یکی از ارقام را یک واحد کم یا زیاد وارد کنند مثلاً ۱۲۲ به جای ۱۲۳.

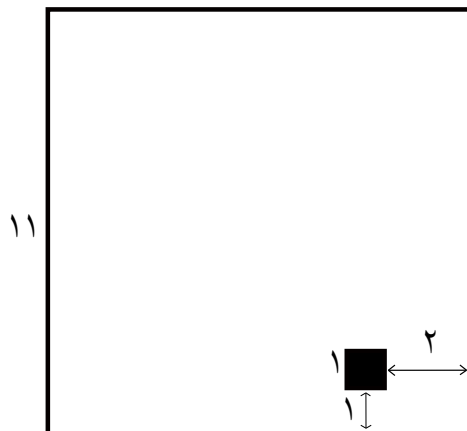
شهروندان در هر بار پر کردن فرم حداکثر یکی از این اشتباه‌ها را انجام می‌دهند و آن هم فقط در یکی از ارقام. دولت شکرستان می‌خواهد باقی‌مانده همه کد ملی‌ها را بر یک عدد طبیعی N ثابت بگذارد طوری که شهروندان در صورت اشتباه در وارد کردن کد بلافاصله با نگاه کردن به عدد نوشته شده به اشتباه خود پی ببرند. کوچک‌ترین N ای که برای این مقصود کافی است را بیابید.

۷. فرض کنید $a, b, c < \pi$ اعدادی متمایز باشند طوری که a, b, c و $\sin a, \sin b, \sin c$ تصاعدهایی حسابی باشند. مقدار $(\sin a)^2 + (\sin b)^2 + (\sin c)^2$ در کدام بازه قرار دارد؟

- (۵) هیچ‌کدام (۴) (۰, ۱) (۳) (۲, ۳) (۲) (۱, ۲) (۱) (۰, ۲)

آزمون مرحله اول چهل و دومین المپیاد ریاضی

۸. شعاع بزرگ‌ترین دایره‌ای که می‌توان داخل مربع زیر رسم کرد طوری که محیط دایره، اشتراکی با درون مربع سیاه نداشته باشد چند است؟



۹. اگر x, y, z اعدادی حقیقی و مثبت باشند که

$$x^{\log(yz)} \times y^{\log(xz)} \times z^{\log(xy)} = 2, \quad x^{\log(x)} \times y^{\log(y)} \times z^{\log(z)} = 6$$

حاصل ضرب مقادیر ممکن برای xyz کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) $\frac{1}{10}$ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱ (۵) هیچ‌کدام

۱۰. علی و رضا یک بازی انجام می‌دهند. علی یک عدد کم‌تر از ۱۰۰۰ را در ذهن خود در نظر می‌گیرد و رضا می‌خواهد این عدد را حدس بزند. به این منظور رضا می‌تواند تعدادی سوال بپرسد: در هر سوال، رضا یک عدد بین ۱۰ و ۲۰ را به علی می‌گوید و علی کوچکترین مضرب مشترک عدد در ذهن خود و این عدد را به رضا می‌گوید. فرض کنید رضا بی‌نهایت باهوش است، او به چند سوال نیاز دارد تا بتواند با اطمینان عدد علی را بفهمد؟

۱۱. امیرحسین، بابک، داریوش و پارسا روی هم ۲۰ سکه یکسان دارند. آن‌ها می‌خواهند این ۲۰ سکه را طوری بین خود تقسیم کنند که تعداد سکه‌های هیچ‌کس بیش‌تر از دو برابر سکه‌های دیگری نشود. به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند؟
🔔 جواب عددی اول است.

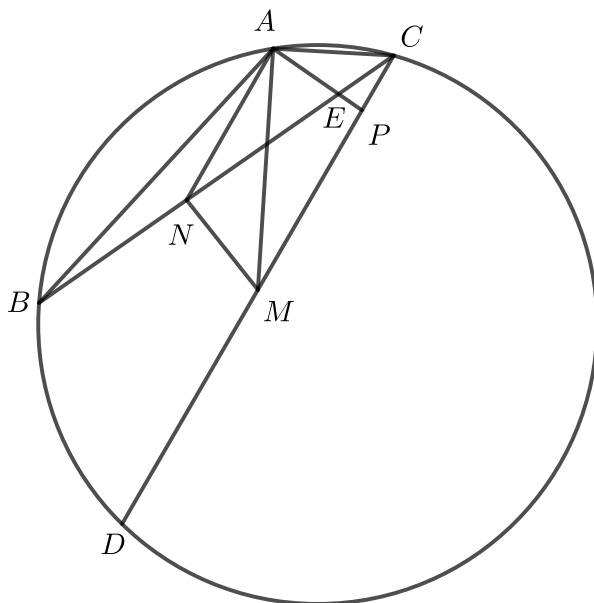
آزمون مرحله اول چهل و دومین المپیاد ریاضی

۱۲. سه کلاه با مدل‌های متفاوت و چهار جعبه با مدل‌های متفاوت در اختیار داریم. یک رنگ‌آمیزی از کلاه‌ها و جعبه‌ها با دو رنگ آبی و قرمز را «خوب» می‌نامیم، اگر هم در رنگ‌آمیزی کلاه‌ها و هم در رنگ‌آمیزی جعبه‌ها از هر دو رنگ استفاده شود. می‌خواهیم کلاه‌ها را درون جعبه‌ها بگذاریم. یک روش قراردعی کلاه‌ها در جعبه‌ها را نسبت به یک رنگ‌آمیزی «مجاز» می‌نامیم اگر هر کلاه قرمز درون یک جعبه قرمز و هر کلاه آبی درون یک جعبه آبی قرار گیرد. ممکن است درون یک جعبه بیش از یک کلاه قرار گیرد یا خالی بماند.

همه رنگ‌آمیزی‌های خوب ممکن را در نظر می‌گیریم و تعداد راه‌های مجاز قراردعی کلاه‌ها را نسبت به هر کدام از این رنگ‌آمیزی‌ها روی یک تخته می‌نویسیم. بزرگ‌ترین عدد نوشته‌شده روی تخته چند است؟

۱۳. در شکل زیر زاویه $\angle ACB$ برابر با 35° درجه و زاویه $\angle BCD$ برابر با 25° درجه و زاویه $\angle EPC$ برابر با 95° درجه هستند. اگر M و N به ترتیب وسط پاره‌خط‌های DC و BE باشند، اختلاف زاویه‌های $\angle NMA$ و $\angle MAN$ چند درجه است؟

۵ (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵ (۵)



۱۴. فرض کنید a_1, a_2, a_3, a_4 یک تصاعد هندسی با قدر نسبت q باشد، طوری که a_1 عددی طبیعی، q عددی گویا و مثبت است و داریم

$$a_1 + a_2 + a_3 = 19$$

مجموع مقادیر ممکن $a_1 a_4$ را بیابید.

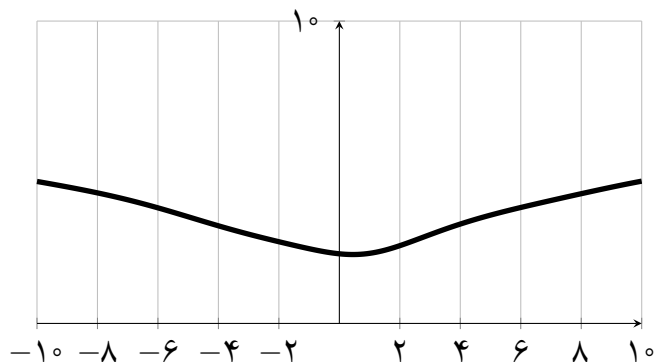
📌 جواب عددی زوج است.

آزمون مرحله اول چهل و دومین المپیاد ریاضی

۱۵. فرض کنید n کارت داریم که روی آنها اعداد یک تا n نوشته شده است. اطلاع دقیقی از تعداد کارت‌ها نداریم اما می‌دانیم به احتمال یک سوم، ۷ کارت، به احتمال یک سوم ۸ کارت و به احتمال یک سوم ۹ کارت داریم. دو کارت به تصادف بیرون کشیده ایم و مشاهده کردیم مجموع این دو کارت برابر نه شده است، اکنون با چه احتمالی تعداد کارت‌ها هفت بوده است؟

$\frac{1}{5}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{9}{25}$ (۳) $\frac{7}{23}$ (۴) $\frac{5}{17}$ (۵)

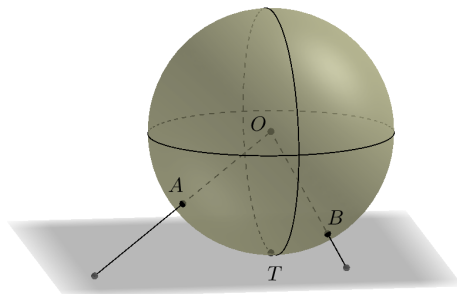
۱۶. نمودار زیر مربوط به کدام تابع است؟



$\log_7(x^2 - 2x - 3)$ (۱)
 $x^2 - 2x - 3$ (۲)
 $\log_7((\cos x)^2 + (\sin x)^3 + 9)$ (۳)
 $\log_7(x^2 + (\cos x)^3 + 9)$ (۴)
 $\log_7(x^2 - (\sin x) + 10)$ (۵)

۱۷. کره‌ای شیشه‌ای مانند شکل زیر در نقطه T با زمین مماس شده است. شعاع کره 20 سانتی‌متر است و لامپ روشنی در مرکز کره (نقطه O) نصب شده و نقاط A و B روی سطح کره علامت خورده‌اند. اگر زاویه $\angle AOB$ برابر با 60° درجه باشد و ارتفاع A و B از سطح زمین به ترتیب 10 و 5 سانتی‌متر باشند، فاصله سایه‌های دو نقطه A و B چند سانتی‌متر است؟

$20\sqrt{8}$ (۵) $\frac{40\sqrt{7}}{3}$ (۴) $20\sqrt{\frac{26}{3}}$ (۳) 60 (۲) $20\sqrt{10}$ (۱)



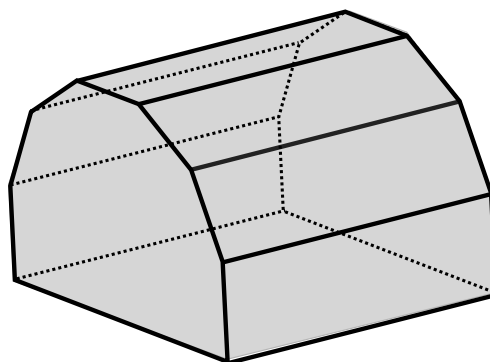
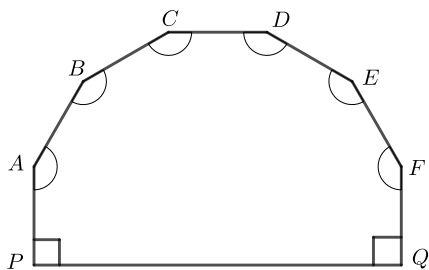
آزمون مرحله اول چهل و دومین المپیاد ریاضی

۱۸. دنباله $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ این گونه تعریف می‌شود که $a_1 = 1402$ و برای $i \geq 1$ داریم $a_{i+1} = 2a_i + 7i$. تقسیم باقی‌مانده a_{99} بر ۱۴ را بیابید.

۱۹. می‌دانیم $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه سه با ضرایب حقیقی است و $P(0) = 0, P(1) = 1, P(2) = 2$. اگر بدانیم P یک ریشه مضاعف دارد، مجموع مقادیر ممکن برای $P(3)$ را بیابید. می‌گوییم یک چندجمله‌ای ریشه مضاعف دارد اگر عدد حقیقی r یافت شود که $P(x)$ بر $(x - r)^2$ بخش پذیر باشد.

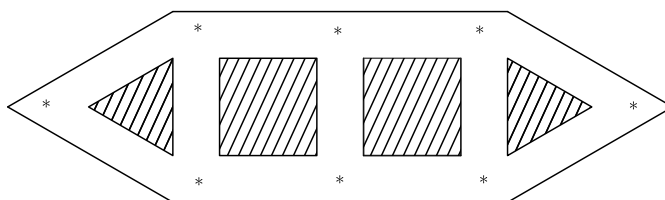
۲۰. سالی با ابعاد قاعده 5° متر در 5° متر به شکل زیر ساخته شده است. (در شکل یک برش عمودی از سالن نیز نمایش داده شده است که تناظری بین پاره‌خط‌های این برش و وجوه سالن به دست می‌دهد.) در یکی از نقاط سقف چراغی نصب شده است. منظور از سقف اجتماع وجوه متناظر با پاره خط‌های AB, BC, CD, DE, EF است. اگر درب ورودی در وجه متناظر با پاره خط PA قرار داشته و ارتفاعی برابر با طول PA داشته باشد و بازگذاشته شود و نور چراغ تا فاصله 5° متری بیرون درب ورودی، سطح زمین را روشن کرده باشد ارتفاع چراغ از سطح زمین چند متر است؟ (در شکل پاره خط‌های AB, BC, CD, DE, EF و همگی طول برابری دارند و زاویه‌های مشخص شده نیز باهم برابرند.)

25 (۵) $6\sqrt{\frac{49}{3}}$ (۴) $6\sqrt{17}$ (۳) $8\sqrt{10}$ (۲) 24 (۱)



آزمون مرحله اول چهل و دومین المپیاد ریاضی

۲۱. در موزه‌ای به شکل زیر، در نقاط علامت‌خورده آثار باستانی ارزشمندی به نمایش گذاشته شده است. می‌خواهیم در بالای نقاط علامت‌خورده تعدادی دزدگیر نصب کنیم که به محض دیدن این که دزدی مشغول سرقت یکی از آثار باستانی است به صدا در می‌آیند. حداقل به چند دزدگیر نیازمندیم تا با دانستن این که کدام دزدگیرها به صدا درآمده‌اند از هر سرقتی با خبر شویم و مکان دقیق سارق نیز مشخص شود (یک دزدگیر به صدا درمی‌آید اگر در مسیر مستقیمی که بین دزدگیر و دزد قرار دارد هیچ دیواری وجود نداشته باشد. در شکل نواحی هاشور خورده دیوار هستند).



۲۲. چند زیرمجموعه سه‌عضوی $\{a, b, c\}$ از اعداد طبیعی چهاررقمی وجود دارد به گونه‌ای که هر سه عدد

$$a^3 + b^3 + c^3, a^2 + b^2 + c^2, a + b + c$$

بر ۱۴۰۲ بخش‌پذیر باشند؟
 مجموع ارقام جواب ۵ است. 📌

۲۳. اگر a, b, c اعدادی حقیقی ناصفر باشند که

$$\begin{cases} \frac{1}{ca} = 3a + b \\ \frac{1}{ab} = b + 2c \\ \frac{1}{bc} = 2c + 3a \end{cases}$$

آن‌گاه نزدیک‌ترین عدد صحیح به $(a + b + c)^3$ را بیابید.

۲۴. یک ۱۴۰۲ ضلعی منتظم داریم، می‌خواهیم روی هر یک از رئوس آن یکی از ارقام ۰ یا ۱ را بنویسیم طوری که روی هیچ سه رأس متوالی، ۰۱۰، ۰۰۰، ۱۱۱ مشاهده نشود. تعداد رقم‌های ۱ استفاده شده چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟
 پاسخ مضرب ۹ است. 📌

آزمون مرحله اول چهل و دومین المپیاد ریاضی

۲۵. تمام صفحه‌ای را با کاشی‌های به شکل زیر به طور کامل کاشی کاری کرده‌ایم. یعنی تمام نقاط صفحه، یا روی مرز دو کاشی قرار دارند و یا درون دقیقا یک کاشی هستند. کاشی سیاه رنگ یک ۱۲ ضلعی با زاویه‌های داخلی یک در میان 27° و 30° درجه است. همین طور کاشی سفید نیز یک ۶ ضلعی با زوایای داخلی یک در میان 15° و 9° درجه می باشد. اگر طول تمام اضلاع هر دو نوع کاشی ۲ سانتی متر باشد و یک دایره بزرگ در صفحه با شعاع بیش‌تر از ۱۰۰۰۰۰ رسم کنیم. نسبت مساحت سیاه رنگ به مساحت سفید رنگ داخل دایره به چه عددی نزدیک تر است؟

$$8\sqrt{3} - 12 \quad (5) \quad 4\sqrt{3} - 6 \quad (4) \quad 2\sqrt{3} - 3 \quad (3) \quad \sqrt{3} - \frac{3}{2} \quad (2) \quad 3\sqrt{3} - \frac{9}{2} \quad (1)$$

