



# مشاوره تحصیلی هپوا

تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

مشاوره تخصصی ثبت نام مدارس ، برنامه ریزی درسی و آمادگی  
برای امتحانات مدارس

برای ورود به صفحه مشاوره مدارس کلیک کنید

برای ورود به صفحه نمونه سوالات امتحانی کلیک کنید

تماس با مشاور تحصیلی مدارس

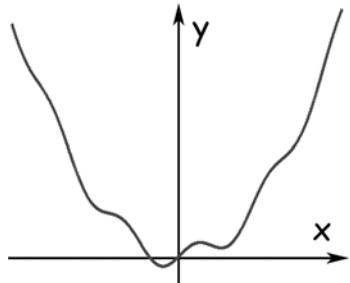
۹۰۹۹۰۷۱۷۸۹

تماس از تلفن ثابت

# هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

## مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

۱) نمودار رویرو مریوط به کدام یک از توابع زیر می باشد؟



الف)  $y = \frac{x^\circ}{\circ} \cdot \sin x$

ب)  $y = \frac{(\tan x)^\circ}{\circ}$

ج)  $y = \cos(\frac{x^\circ}{\circ}) - 1$

د)  $y = \frac{x^\circ}{\circ} + \cos x - 1$

ه)  $y = \frac{x^\circ}{\circ} + \sin x$

۲) معادله زیر چند جواب حقیقی دارد؟

$$(x+1)^{1383} + (x+1)^{1382}(x-2) + (x+1)^{1381}(x-2)^2 + \dots + (x+1)(x-2)^{1382} + (x-2)^{1383} = 0$$

ج) ۱۳۸۳

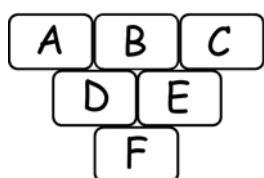
الف) این عبارت همواره صفر است.

ب) ۲

د) ۰

ه) ۱

۳)  $A$ ,  $B$ , و  $C$  سه مجموعه دلخواه هستند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعه بالای سر خودش است. (سمت چپ منهای سمت راست) مثلاً  $D = A - B$ . کدام گزینه حتماً درست است؟



د)  $D \cap C \subseteq F$

د)  $A \cap C \subseteq F$

ج)  $F \subseteq A \cap C$

ب)  $B \subseteq F$

الف)  $F \subseteq C$

۴) ضریب  $x^5$  در چندجمله‌ای  $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 1382x^{1381})^2(1 + x^4 + x^8)$  چند است؟

ه) ۷۰

د) ۶۴

ج) ۴۰

ب) ۳۲

الف) ۲۰

۵) تابع دو متغیره  $f$  به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x, y) = y^2 - x^2 - 2xy + 2x + 1$$

ناصر و منصور به این شکل با هم بازی می کنند که ابتدا ناصر یک عدد به جای  $x$  می گذارد و سپس منصور یک عدد به جای  $y$  قرار می دهد و مقدار تابع، هر چقدر که شد به عنوان امتیاز ناصر در نظر گرفته می شود. اگر منصور خوب بازی کند بیشترین امتیازی که ناصر می تواند به دست آورد چقدر است؟

ه)  $-\sqrt{2}$

د) ۱

ج)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

ب)  $\frac{5}{2}$

الف)  $\frac{3}{2}$

۶) چندجمله‌ای  $1 + ax + bx^3 - 3x + 2b$  بر  $x^3 + ax + b$  بخش‌پذیر است.  $a + 2b$  چند است؟

ه) -۳

د) ۰

ج) ۱

ب)  $-\frac{25}{3}$

الف) -۸

# هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

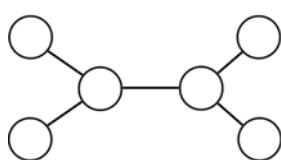
## مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

(۷)  $A$  و  $B$  ماتریس هایی  $2 \times 2$  به شکل زیر هستند.

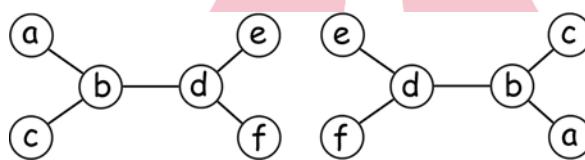
$$A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix}$$

چه موقع رابطه  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  برقرار است؟

- الف) همواره      ب) وقتی  $x = y$       ج) وقتی  $x + y = 0$       د) وقتی  $1 = xy$       ه) هیچ گاه



(۸) می خواهیم در دایره های شکل رو برو برچسب های  $a, b, c, d, e, f$  را بچسبانیم طوری که حروف واقع در هیچ دو دایره ای برابر نباشند. دو برچسب گذاری را متمایز گوییم هرگاه دو حرف وجود داشته باشد که دایره های شامل این دو حرف در یکی مجاور و در دیگری غیر مجاور باشند (دو دایره را مجاور گوییم هرگاه بین آنها پاره خطی رسم شده باشد). مثلاً برچسب گذاری های زیر یکسانند.



چند برچسب گذاری متمایز وجود دارد؟

- الف) ۱۸۰      ب) ۱۲۰      ج) ۹۰      د) ۶۰      ه) ۴۵

(۹) حداقل چند مستطیل  $3 \times 2$  باید از یک صفحه شطرنجی  $8 \times 8$  جدا شود تا دیگر حتی یک مستطیل  $2 \times 2$  نتوان از شکل باقی مانده جدا کرد؟

- الف) ۴      ب) ۵      ج) ۶      د) ۷      ه) ۸

(۱۰) یک عدد طبیعی بزرگتر از یک را «خوب» می نامیم هرگاه جمع هر دو مقسوم علیه متمایز آن بر ۷ بخش پذیر باشد. چند عدد خوب کمتر از ۱۰۰ وجود دارد؟

- الف) ۲      ب) ۴      ج) ۵      د) ۶      ه) ۷

(۱۱) فرض کنید فهرستی از اعداد طبیعی داده شده است. در هر مرحله می توانیم ۳ عضو متمایز این فهرست را انتخاب کرده و حاصل ضربشان را به فهرست اضافه کنیم تا فهرستی دیگر به دست آوریم. در صورتی که فهرست اولیه ما مجموعه اعداد اول باشد، کدام یک از اعداد زیر را می توان با انجام تعدادی مرحله به فهرست اضافه کرد؟

- الف) ۱۰۰۰      ب) ۳۳۰      ج) ۳۵۰۰۰      د) ۳۷۵      ه) ۱۰۵۰۰

(۱۲) برای عدد طبیعی  $n$  فرض کنید  $(n)p$  حاصل ضرب ارقام  $n$  در بنای ۱۰ باشد.  $(1 + p + \dots + p^{99})$  چند است؟

- الف) ۱۱۲۵۷۶      ب) ۲۰۷۰      ج) ۹۱۱۲۵      د) ۹۳۱۹۵      ه) ۱۳۲۰۷۰

## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

### مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

(۱۳) دو دایره  $O_1$  و  $O_2$  به مرکز  $C_1$  و  $C_2$  در دو نقطه  $A$  و  $B$  متقاطع می‌باشند. طول خط المرکزین دو دایره برابر ۵ و شعاع‌های آن‌ها ۴ و ۳ می‌باشد. خطی که از نقطه  $A$  گذشته دو دایره را در نقاط  $M$  و  $N$  قطع کرده است. اگر اندازه وتر  $AM$  برابر ۴ باشد اندازه  $MN$  کدام است؟

- الف)  $4 + 3\sqrt{3}$       ب)  $7$       ج)  $8$       د)  $4 + 2\sqrt{5}$       ه)  $5\sqrt{5}$



(۱۴) رستم به فرمان کیکاووس از زابلستان به قصد کشتن دیو چند سر حرکت می‌کند.

اما قبل از نبرد، دیو به او هشدار می‌دهد که این کار، چندان ساده نیست:

این دیو چندین سر و هر سر او تعدادی چشم دارد. اگر رستم یک سر  $n$ -چشم را ( $n > 1$ ) قطع کند دیو به جای آن، یک سر یک چشم، یک سر دو چشم، ... و یک سر ( $1 - n$ )-چشم در می‌آورد!

برآورد چون شیر جنگی غریبو  
سر و مغزش از گرز او گشت پست

تهمتن چو بشنید گفتار دیو  
بزد بر سر دیو چون پیل مست

اگر دیو در ابتدا سه سر، با ۴، ۶، و ۸ چشم داشته باشد رستم چند ضربه برای نابودی کامل دیو باید وارد کند؟

- الف) ۱۸

- ب) ۶۱

- ج) ۱۶۸

د) متأسفانه رستم نمی‌تواند دیو را از پای درآورد!

ه) رستم دیو را از پای درمی‌آورد اما تعداد ضربات بستگی به روش او دارد.

(۱۵) توجه کنید که در این سؤال هم مثل همه سؤال‌های دیگر امتحان، چهار گزینه غلط و یک گزینه صحیح است!

الف) (ب) صحیح است.

ب) (ج) و (د) هر دو غلط‌اند.

ج) (ج) صحیح است.

د) (د) صحیح است.

ه) حداقل یکی از (ج) یا (ه) صحیح‌اند.

(۱۶) یک عدد طبیعی را «تقسیمی» می‌نامیم هرگاه از قرار گرفتن یک عدد مضرب ۵ در سمت راست یک عدد مضرب ۳ به دست آمده باشد. تعداد اعداد ۴ رقمی مضرب ۵ که تقسیمی نیستند چند تاست؟

- الف) ۵۸۸      ب) ۲۹۴      ج) ۸۸۲      د) ۱۲۰۰      ه) ۴۳۲

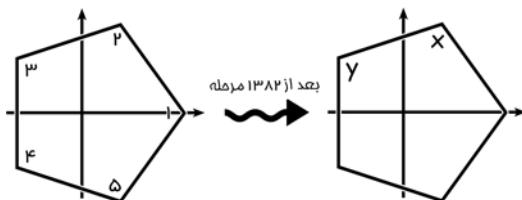
(۱۷) در چهارضلعی  $ABCD$  داریم  $AB = CD$  و  $\widehat{ABC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ . اگر  $O$  محل تقاطع  $AC$  و  $BD$  باشد و  $BO = 3$  و  $CO = 5$  و  $CB = 4$ ، طول  $CO$  چقدر است؟

- الف) ۴      ب)  $\sqrt{15}$       ج)  $\sqrt{14}$       د) ۳      ه)  $3\sqrt{2}$

# هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

## مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

(۱۸) فرض کنید یک ۵ ضلعی منتظم مانند شکل روی محورهای مختصات قرار گرفته است. عمل زیر را روی ۵ ضلعی ۱۳۸۲ بار انجام می‌دهیم: «نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم،  $72^\circ$  درجهت خلاف حرکت عقربه ساعت دوران می‌دهیم، دوباره نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم.» در این صورت  $(x, y)$  چند می‌باشد؟



(۵, ۴) ۵

د) (۴, ۵)

ج) (۵, ۱)

ب) (۱, ۵)

الف) (۳, ۴)

(۱۹) در چهارضلعی محدب  $ABCD$  نیمساز زاویه  $\angle ABC$  را در نقطه  $E$  قطع کرده است. اگر  $\angle CDA = \angle BCD$  و  $\angle AEB = 90^\circ$  کدام یک از احکام زیر همواره برقرار است؟

الف) چهارضلعی محیطی است.

ب) چهارضلعی محاطی است.

ج)  $AB = AD + BC$

د)  $CD = AD + BC$

е)  $EA \cdot EB = EC \cdot ED$

(۲۰) دستگاه معادلات مقابل در اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} 1 + a^3 + 3ab = b^3 \\ 1 + a^5 = b^5 \end{cases}$$

ه) نامتناهی جواب

د) ۳

ج) ۲

ب) ۱

الف) ۰

(۲۱) بیشترین مقدار  $\lambda$  که برای هر  $a > 0$  نامساوی زیر برقرار باشد، چند است؟

$$a^3 + \frac{1}{a^3} - 2 \geq \lambda(a + \frac{1}{a} - 2)$$

ه) ۵

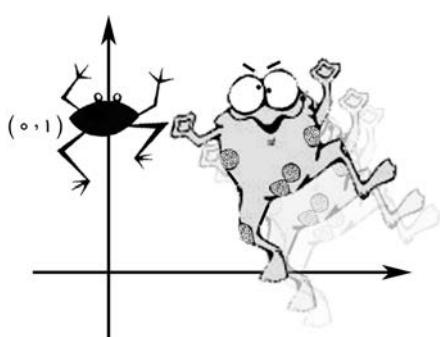
د) ۹

ج) ۹

ب) ۴

الف) ۰

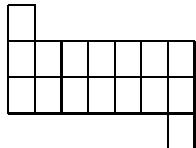
(۲۲) یک قورباغه در نقطه به مختصات  $(1, 0)$  از صفحه قرار دارد و هر بار درجهت عمود بر خطی که مبدأ مختصات را به مکان فعلی اش وصل می‌کند (طوری که مبدأ در سمت راستش قرار بگیرد) به اندازه فاصله همان لحظه اش از مبدأ، جهش می‌کند. اگر قورباغه پس از ۱۵ جهش به نقطه  $(a, b)$  برسد،  $a$  چند است؟



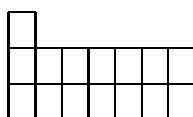
# هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

## مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

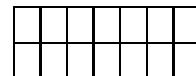
(۲۳) تعداد زیادی موژاییک  $2 \times 1$  در اختیار داریم. دو نفر به نوبت روی یک شکل شطرنجی به صورت زیر با هم بازی می‌کنند. هر نفر در نوبت خود یک موژاییک در دو خانه مجاور از شکل که قبلاً پر نشده باشد قرار می‌دهد. کسی که در نوبت خود نتواند حرکتی انجام دهد بازی بازی است. در کدام شکل نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که برنده بازی باشد؟ (فرض کنید نفر اول به بهترین صورت بازی می‌کند).



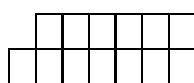
(ج)



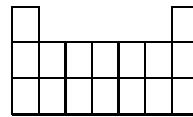
(ب)



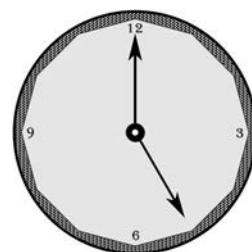
(الف)



(ه)



(د)



۱۳ (ه)

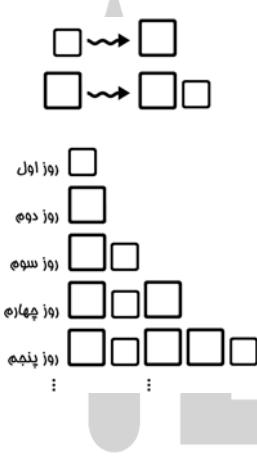
۱۲ (د)

(۲۴) ساعتی داریم که طول عقربه ساعت شمار و دقیقه شمار آن برابر است. بین ساعت ۵ تا ۶ چند بار ممکن است عقربه‌ها به گونه‌ای قرار گیرند که ساعت دقیق مشخص نشود؟ مثلاً در حالت روپرتو ساعت حدّماً ۵ است، و نمی‌تواند ۲۵ : ۱۲ باشد.

(ج)

۱ (ب)

۰ (الف)



(ب)  
(د)

(۲۵) بر روی یک رشته بسیار باریک و دراز تعدادی سلول که بعضی کوچک و بعضی بزرگ هستند پشت سر هم قرار گرفته‌اند. بعد از گذشتن هر روز سلول‌های کوچک، بزرگ می‌شوند و سلول‌های بزرگ، یک سلول کوچک در سمت راست خود تولید می‌کنند. اگر در روز اول تنها یک سلول کوچک داشته باشیم در روز هزار و سیصد و هشتاد و دوم دنباله‌ای طویل از سلول‌ها خواهیم داشت! سه جمله وسط این دنباله کدامند؟

(الف)  
(ج)

(ه) در این روز تعداد زوجی سلول وجود دارد و دنباله، وسط ندارد!

(۲۶) فرض کنید  $n$  کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که  $3^n + 2^n$  بر ۱۲۵ بخش‌پذیر است. مجموع ارقام  $n$  چند است؟

(ج) ۶

(ب) ۷

(الف) ۸

(ه) اصلًا چنین  $n$ ‌ای وجود ندارد.

(د) ۵

# هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

## مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

(۲۷) یک عدد طبیعی را «ریشه‌دار» می‌گوییم هرگاه مجدور مجموع ارقامش با خودش برابر باشد. کدام گزینه درست است؟

- الف) تعداد اعداد ریشه‌دار نامتناهی است.
- ب) عدد ریشه‌دار دو رقمی وجود ندارد.
- ج) عدد ریشه‌دار چهار رقمی وجود ندارد.
- د) عدد ریشه‌داری به شکل  $9k + 3$  وجود دارد.
- ه) عدد ریشه‌داری به شکل  $9k + 4$  وجود دارد.

(۲۸) از نقطه  $P$  خارج دایره  $(O)$  دوقاطع بر دایره رسم می‌کنیم. اولی در  $A$  و  $B$  و دومی در  $C$  و  $D$  دایره را قطع می‌کند. از نقطه  $P$  مماس  $PT$  را بر دایره رسم می‌کنیم. اگر  $M$  وسط کمان  $AB$  باشد و  $MC$  و  $MD$  به ترتیب،  $AB$  را در  $E$  و  $F$  قطع نمایند و  $\angle FTP = 30^\circ$ ,  $\angle ETF = 70^\circ$  آنگاه زاویه  $\widehat{TPE}$  چقدر است؟

- الف)  $60^\circ$   
ب)  $30^\circ$   
ج)  $45^\circ$   
د)  $50^\circ$   
ه)  $75^\circ$

(۲۹) در مثلث  $\triangle ABC$ , طول میانه رأس  $B$ ,  $\angle A = 150^\circ$  است و  $\angle C = 30^\circ$ . طول میانه رأس  $A$  حداقل چقدر است؟

- الف) ۱  
ب)  $\frac{2+\sqrt{5}}{3}$   
ج)  $2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$   
د) ۲  
ه)  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

(۳۰) خط متغیر  $D$  و غیر گذرنده از نقاط  $B$  و  $C$  همواره دو ضلع  $AB$  و  $AC$  از مثلث  $ABC$  را، به ترتیب، در دو نقطه  $M$  و  $N$  چنان قطع می‌نماید که مساحت مثلث  $AMN$  برابر مجموع مساحت‌های مثلث‌های  $MNB$  و  $MNC$  می‌باشد. کدام یک از احکام زیر درست است؟

- الف) این خط باید همواره با ضلع  $BC$  موازی باشد.
- ب)  $\frac{AM}{NB} = \frac{AN}{MC}$
- ج) این خط باید همواره از یک نقطه ثابت در صفحه مثلث بگذرد.
- د) این خط باید همواره از وسط ارتفاع  $AH$  بگذرد.
- ه) این خط باید همواره بر دایره محاطی داخلی مثلث مماس باشد.