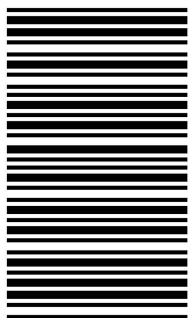


کد کنترل

889

A



889A

عصر پنجشنبه

۱۴۰۳/۱۲/۰۲



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

«علم و تحقیق، کلید پیشرفت کشور است.»
مقام معظم رهبری

دفترچه شماره ۳ از ۳

آزمون ورودی دوره‌های دکتری (نیمه‌متمرکز) - سال ۱۴۰۴
ریاضی (کد ۲۲۳۳)

مدت زمان پاسخگویی: ۱۳۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۷۵ سؤال

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مبانی علوم ریاضی - مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - مبانی آنالیز ریاضی	۱۵	۱	۱۵
۲	مبانی آنالیز عددی - مبانی احتمال - بهینه‌سازی خطی	۱۰	۱۶	۲۵
۳	مبانی جبر - توپولوژی	۱۰	۲۶	۳۵
۴	آنالیز حقیقی ۱	۱۰	۳۶	۴۵
۵	جبر پیشرفته ۱	۱۰	۴۶	۵۵
۶	بهینه‌سازی خطی پیشرفته ۱ - آنالیز عددی پیشرفته	۱۰	۵۶	۶۵
۷	اصول آموزش ریاضی	۱۰	۶۶	۷۵

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات کادر زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی جلد دفترچه سؤالات و پایین پاسخنامه ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

مبانی علوم ریاضی - مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - مبانی آنالیز ریاضی:

۱- درستی گزاره $r \rightarrow (p \vee \sim q)$ ، درستی کدام گزاره را نتیجه نمی‌دهد؟ (نماد \sim به مفهوم نقیض است).

(۱) $r \rightarrow p$

(۲) $r \vee \sim p$

(۳) $p \wedge q \rightarrow r$

(۴) $\sim r \rightarrow q$

۲- اگر به ازای هر $r \in (0, \infty)$ تعریف کنیم $A_r = \left(\frac{1}{r+1}, 2r+1 \right]$ ، مجموعه‌های $A = \bigcap_{r>0} A_r$ و $B = \bigcup_{r>0} A_r$ کدام است؟

(۱) $A = \{1\}$ و $B = (1, \infty)$

(۲) $A = (0, 1]$ و $B = (0, \infty)$

(۳) $A = \emptyset$ و $B = (1, \infty)$

(۴) $A = \{1\}$ و $B = (0, \infty)$

۳- کدام گزینه در مورد رابطه‌های هم‌ارزی درست است؟

(۱) هر رده هم‌ارزی در رابطه هم‌ارزی، شامل فقط یک عضو است.

(۲) بر روی یک مجموعه دلخواه A ، ممکن است نتوان هیچ رابطه هم‌ارزی تعریف کرد.

(۳) هر رابطه هم‌ارزی در مجموعه A ، این مجموعه را به زیرمجموعه‌های ناتهی دو به دو از هم جدا، افراز می‌کند.

(۴) اگر R یک رابطه هم‌ارزی در مجموعه A باشد، آنگاه $R \subseteq A \times A$ بی‌تقارن (نامتقارن) است.

۴- کدام گزینه رابطه بین لم زرن و اصل انتخاب را به درستی بیان می‌کند؟

(۱) لم زرن اکیداً از اصل انتخاب ضعیف‌تر است.

(۲) لم زرن و اصل انتخاب معادل هستند.

(۳) لم زرن فقط برای مجموعه‌های متناهی جزیی مرتب به کار می‌رود.

(۴) اصل انتخاب، لم زرن را نتیجه می‌دهد ولی عکس آن برقرار نیست.

۵- مجموعه $\{ \text{حداکثر تعداد متناهی از جملات دنباله صفر است} : x_n \in \mathbb{R} \}$ را D در نظر بگیرید. عدد اصلی این مجموعه کدام است؟ (\mathbb{N}_0 عدد اصلی \mathbb{N} و c عدد اصلی \mathbb{R} است).

(۱) 2^{\aleph_0}

(۲) 2^c

(۳) 2^{2^c}

(۴) \aleph_0

۶- فرض کنید V فضای برداری همه ماتریس‌های 2×2 روی میدان اعداد حقیقی است. اگر

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ و } W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -a & e \end{bmatrix} \mid a, b, e \in \mathbb{R} \right\}, \text{ آنگاه } W_1 + W_2 \text{ برابر است با:}$$

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۷- فرض کنید V فضای برداری تمام چندجمله‌ای‌های با درجه حداکثر ۲ و با ضرایب حقیقی باشد و برای آن پایه

$$B = \{2, x+1, x^2+x+1\}$$

ضابطه $T(f(x)) = xf'(x)$ نسبت به این پایه کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

۸- کدام یک از مجموعه‌های زیر، زیرفضایی از \mathbb{C}^3 روی میدان \mathbb{C} نیست؟

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\} \quad (۱)$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + \bar{y} = \bar{z} + 1\} \quad (۲)$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid \bar{x} = z\} \quad (۳)$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid 2\bar{x} - y + \bar{z} = 0\} \quad (۴)$$

۹- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix}$ با درایه‌های حقیقی و وارون‌پذیر هستند. فرض کنید $\lambda \in \mathbb{C}$ یک

مقدار ویژه A و $\mu \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه B باشد. در این صورت، کدام مورد درست است؟

$$\mu = -\bar{\mu} \text{ و } \lambda = \bar{\lambda} \quad (۱)$$

$$\mu = \bar{\mu} \text{ و } \lambda = -\bar{\lambda} \quad (۲)$$

$$\mu = \bar{\mu} \text{ و } \lambda = \bar{\lambda} \quad (۳)$$

$$\mu = -\bar{\mu} \text{ و } \lambda = -\bar{\lambda} \quad (۴)$$

۱۰- اگر $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، حاصل عبارت $-T^3 + 4T^2 + 5T - 2I$ برابر با کدام است؟

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} -6 & 0 & 20 \\ 0 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 6 & 0 & 20 \\ 0 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

۱۱- فرض کنید E زیرمجموعه \mathbb{R} و تابع $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد. کدام گزینه پیوستگی تابع f را نتیجه نمی‌دهد؟
 (۱) $f(E)$ باز است.
 (۲) $f(E)$ همبند است.
 (۳) $f(E)$ کراندار است.
 (۴) $f(E)$ بسته است.

۱۲- فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگرایی مشروط است. گزاره‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

الف - یک تجدید آرایش $\{x'_n\}$ از $\{x_n\}$ وجود دارد که $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n = +\infty$

ب - به ازای هر تجدید آرایش $\{x'_n\}$ از $\{x_n\}$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$

کدام گزینه درست است؟

(۱) «الف» و «ب» هر دو درست هستند.
 (۲) «الف» درست و «ب» نادرست است.
 (۳) «ب» درست و «الف» نادرست است.
 (۴) «الف» و «ب» هر دو نادرست هستند.

۱۳- فرض کنید $f_n(x) = \begin{cases} 1 & |x| \geq \frac{1}{n} \\ nx^2 & |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$ و $h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. کدام گزینه درست است؟

(۱) h تابع ثابت است.
 (۲) h در برخی نقاط ناپیوسته است.

(۳) h در صفر مشتق پذیر است.
 (۴) h در نقاط $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ مشتق پذیر نیست.

۱۴- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x = 0 \\ \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \end{cases}$ تعریف شده است. کدام مورد درست است؟

(m و n نسبت به هم اول هستند).

(۱) f بر هر بازه فشرده انتگرال پذیر ریمان است.
 (۲) f در هر عدد گنگ پیوسته است.
 (۳) f در هر عدد گویا، ناپیوسته است.
 (۴) همه موارد

۱۵- فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. کدام گزینه پیوستگی یکنواخت f را ایجاب نمی‌کند؟
(۱) f متناوب است.

(۲) f به‌طور پیوسته مشتق پذیر است.

(۳) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ در \mathbb{R} موجود است.

$$(۴) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x, y \in \mathbb{R} \left(\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| > M \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \right)$$

مبانی آنالیز عددی - مبانی احتمال - بهینه‌سازی خطی:

۱۶- مرتبه همگرایی دنباله بازگشتی $x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{2}$ ، $x_0 = 0$ ، کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۱۷- فرض کنید $P_4(x)$ چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی $f(x) = x^2$ در نقاط $x_i = 0, 1, 2, 3, 4$ به‌ازای $i = 0, 1, 2, 3, 4$

باشد. مختصات نقطه $(\frac{5}{4}, -\frac{5}{4})$ را به تابع جدولی افزوده و چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی جدید را $P_5(x)$

می‌نامیم. مقدار $P_5(\frac{1}{4})$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{67}{256}$

(۲) $\frac{137}{512}$

(۳) $-\frac{83}{256}$

(۴) $-\frac{73}{512}$

۱۸- اگر $S(h)$ تقریب $\int_a^b x^4 dx$ با استفاده از دستور سیمپسون (مرکب) با طول گام h و شرط

$$\left| \int_a^b x^4 dx - S\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{1}{60}$$

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۱۹- برای یافتن جواب تقریبی دستگاه معادله $\begin{cases} x^3 + y^3 - 2x = 0 \\ x^2 - y^2 + 2y = 2 \end{cases}$ از روش تکرار نیوتن با انتخاب $X^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ به عنوان

جواب آغازین، استفاده می‌کنیم. جواب تقریبی (x, y) در تکرار اول، کدام است؟

$$(1) \left(-\frac{1}{4}, -2\right) \quad (2) \left(\frac{1}{4}, 2\right)$$

$$(3) \left(-2, -\frac{1}{4}\right) \quad (4) \left(2, \frac{1}{4}\right)$$

۲۰- از یک کیسه شامل N توپ که از یک تا N شماره گذاری شده‌اند، n توپ را با جایگذاری انتخاب می‌کنیم. احتمال این که حداقل یکی از توپ‌ها تکراری انتخاب شود کدام است؟ ($n < N$)

$$(1) \frac{1}{N^n} \quad (2) 1 - \frac{1}{N!}$$

$$(3) \frac{\binom{N}{n}}{N^n} \quad (4) 1 - \frac{N!}{n! N^n}$$

۲۱- فرض کنید B_1, \dots, B_n پیشامدهای مستقل از هم روی فضای نمونه مشترک S باشند. که $P(B_i) = \frac{1}{n}$ برای

$i = 1, 2, \dots, n$ احتمال این که حداکثر یکی از پیشامدها رخ دهد کدام است؟

$$(1) \frac{(n-1)^{n-1} (2n-1)}{n^n} \quad (2) \frac{n^{n-1} (2n-1)}{(n+1)^n}$$

$$(3) \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \quad (4) \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$$

۲۲- در یک بازی شیروخط با یک سکه سالم، بازیکن A تعداد ۲۵ سکه و بازیکن B تعداد ۲۰ سکه را با هم پرتاب می‌کنند. احتمال این که هر دو تعداد شیرهای مساوی به دست بیاورند، چقدر است؟

$$(1) \binom{45}{20} \left(\frac{1}{2}\right)^{45} \quad (2) \binom{45}{15} \left(\frac{1}{2}\right)^{45}$$

$$(3) \binom{45}{20} \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \quad (4) \binom{45}{15} \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

۲۳- کدام مورد درست است؟

(۱) اگر مسئله برنامه‌ریزی خطی، جواب بهینه دگرین داشته باشد، آنگاه حتماً دو جواب بهینه رأسی دارد.

(۲) اگر مسئله برنامه‌ریزی خطی بی‌کران باشد، آنگاه ناحیه شدنی آن بی‌کران است.

(۳) اگر ناحیه شدنی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی بی‌کران باشد، آنگاه مسئله بی‌کران است.

(۴) ناحیه شدنی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی بی‌کران می‌تواند کران‌دار باشد.

۲۴- برای مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر، کدام مورد درست است؟ (J_N مجموعه اندیس متغیرهای غیر پایه‌ای است).

$$\text{Max } cx$$

$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

(۱) معیار انتخاب متغیر خارج‌شونده $\left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} ; i \in \{1, 2, \dots, m\}, y_{ik} > 0 \right\}$ است.

(۲) معیار انتخاب متغیر واردشونده $\left\{ z_j - c_j ; j \in J_N, z_j - c_j > 0 \right\}$ است.

(۳) اگر در یک جواب پایه‌ای شدنی مانند \bar{x} ، $j \in J_N$ موجود باشد به طوری که $z_j - c_j > 0$ و $y_j \leq 0$ ، آنگاه مسئله بی‌کران است.

(۴) اگر در یک جواب پایه‌ای شدنی مانند \bar{x} ، برای هر $j \in J_N$ داشته باشیم: $z_j - c_j \leq 0$ ، آنگاه \bar{x} بهینه است.

۲۵- دوگان مسئله برنامه‌ریزی خطی اولیه زیر، کدام است؟

$$\text{Min } -x_1 - x_2$$

$$\text{s.t. } |x_1 - x_2| \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } -y_1 + y_2$$

$$\text{s.t. } y_1 - y_2 \leq -1$$

$$-y_1 + y_2 \leq -1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

$$\text{Max } -y_1 + y_2$$

$$\text{s.t. } y_1 - y_2 \leq 1$$

$$-y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1, y_2 \leq 0$$

$$\text{Max } y_1 + y_2$$

$$\text{s.t. } y_1 - y_2 \leq -1$$

$$-y_1 + y_2 \leq -1$$

$$y_1, y_2 \leq 0$$

$$\text{Max } y_1 + y_2$$

$$\text{s.t. } y_1 - y_2 \leq 1$$

$$-y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

مبانی جبر - توپولوژی:

۲۶- کدام مورد برای جایگشت‌های $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ و $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ درست است؟

(۲) هر دو جایگشت‌های زوجی هستند.

(۴) هر دو جایگشت‌های فردی هستند.

(۱) f زوج و g فرد است.

(۳) f فرد و g زوج است.

۲۷- فرض کنید $G = \mathbb{Z}_{36}$ و $H = \langle 3 \rangle$ و $K = \langle 2 \rangle$. مرتبه زیرگروه‌های HK و $H \cap K$ ، به ترتیب، کدام است؟

(۱) ۱ و ۶

(۲) ۶ و ۶

(۳) ۶ و ۳۶

(۴) ۱ و ۳۶

- ۲۸- R یک حلقه یکدار، I یک ایده‌آل چپ و J یک ایده‌آل راست از حلقه $M_n(R)$ هستند. کدام مورد نادرست است؟
- (۱) I به شکل $M_n(I_0)$ و J به شکل $M_n(J_0)$ است که I_0 و J_0 به ترتیب ایده‌آل‌های چپ و راستی از $M_n(R)$ هستند.
- (۲) $IJ = \left\{ \sum_{i,j \in J} a_i b_j : a_i \in I, b_j \in J \right\}$ یک ایده‌آل دوطرفه از $M_n(R)$ است.
- (۳) $I \cap J$ تحت جمع بسته است.
- (۴) $I \cap J$ تحت ضرب بسته است.

۲۹- تعداد عناصر با ویژگی $e^2 = e$ در حلقه‌های $A = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$ و $B = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 - 1 \rangle}$ ، کدام‌اند؟

(۱) در A برابر ۲ و در B برابر ۲

(۲) در A برابر ۲ و در B برابر ۴

(۳) در A برابر ۴ و در B برابر ۲

(۴) در A برابر ۴ و در B برابر ۴

- ۳۰- فرض کنید G یک گروه و H یک زیرگروه واقعی آن باشد، به طوری که هر عضو $G - H$ از مرتبه ۲ است. کدام مورد درست است؟

(۱) H زیرگروه نرمال و آبلی G است.

(۲) H زیرگروه نرمال G است ولی ممکن است آبلی نباشد.

(۳) ممکن است H آبلی نبوده و زیرگروه نرمال G نباشد.

(۴) H آبلی است ولی ممکن است زیرگروه نرمال G نباشد.

- ۳۱- فرض کنید $X = \{a, b, c, d\}$ و اعضای آن متمایز باشند. کدام گزینه توپولوژی روی X نیست؟

(۱) $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$

(۲) $\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{c, b, d\}, X\}$

(۳) $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, c, d\}, X\}$

(۴) $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{c\}, \{b\}, X\}$

- ۳۲- فرض کنید τ توپولوژی حاصل از متر $d(x, y) = |x - y|$ روی $[0, 1]$ باشد. قرار دهید: $X = [0, 1] \cup \{2, 3, 4, \dots\}$ و $\sigma = \tau \cup \{A : A \subseteq [0, 1] \cup A : A \subseteq \mathbb{N}\}$ برای $[0, 1]$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک (X, σ) ، کدام گزینه درست است؟

(۱) فشرده و چگال در X است.

(۲) چگال در X است ولی فشرده نیست.

(۳) فشرده است ولی چگال در X نیست.

(۴) نه فشرده و نه چگال در X است.

- ۳۳- فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد که در آن، هر مجموعه تک‌عضوی بسته است. کدام گزینه درست است؟
- (۱) هر زیرمجموعه فشرده X بسته است.

(۲) حد هر تور در X در صورت وجود منحصر به فرد است.

(۳) مجموعه $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ در فضای $X \times X$ بسته است.

(۴) هر زیرمجموعه X را می‌توان به صورت اشتراک مجموعه‌های باز شامل آن نوشت.

۳۴- کدام گزینه نادرست است؟

(۱) در فضاهای توپولوژیک X, Y ، نگاشت $f: X \rightarrow Y$ پیوسته است، اگر و فقط اگر برای هر $A \subseteq X$ ، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(۲) در فضاهای توپولوژیک X, Y ، نگاشت $f: X \rightarrow Y$ پیوسته است، اگر و فقط اگر برای هر مجموعه فشرده $A \subseteq X$ ، $f(A)$ نیز فشرده باشد.

(۳) در فضاهای توپولوژیک X, Y ، نگاشت $f: X \rightarrow Y$ پیوسته است، اگر و فقط اگر برای هر مجموعه بسته $C \subseteq Y$ ، $f^{-1}(C) \subseteq X$ بسته باشد.

(۴) در فضاهای متریک X, Y ، نگاشت $f: X \rightarrow Y$ پیوسته است، اگر و فقط اگر برای هر دنباله همگرایی $\{x_n\}$ ، دنباله $\{f(x_n)\}$ نیز همگرا باشد.

۳۵- فرض کنید $\{X_n\}_1^\infty$ دنباله‌ای از فضاهای توپولوژیک ناتمی باشد. اگر $A = \prod_{n=1}^\infty X_n$ را با توپولوژی حاصل ضربی در نظر بگیریم، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر هر X_n همبند باشد، A نیز همبند است.

(۲) اگر هر X_n فشرده باشد، A نیز فشرده است.

(۳) اگر هر X_n فضای گسسته باشد، A نیز گسسته است.

(۴) اگر هر X_n هاوسدورف باشد، A نیز هاوسدورف است.

آنالیز حقیقی ۱:

۳۶- فرض کنید A و B دو σ -جبر روی مجموعه X باشند. کدام گزینه درست است؟

(۱) هم $A \cap B$ و هم $A \cup B$ σ -جبر است.

(۲) هیچ‌کدام از $A \cap B$ و $A \cup B$ لزوماً σ -جبر نیستند.

(۳) $A \cup B$ یک σ -جبر است ولی $A \cap B$ لزوماً σ -جبر نیست.

(۴) $A \cap B$ یک σ -جبر است ولی $A \cup B$ لزوماً σ -جبر نیست.

۳۷- فرض کنید (X, μ) فضای اندازه با شرط $\mu(X) = 1$ و μ^* اندازه خارجی تولیدشده توسط μ است. کدام گزینه برای $A \subseteq X$ نادرست است؟

(۱) اگر $\mu^*(A) = 1$ ، آنگاه A, μ^* اندازه‌پذیر است.

(۲) اگر A, μ^* اندازه‌پذیر باشد، آنگاه $\mu^*(A) + \mu^*(A^c) = 1$.

(۳) اگر $\mu^*(A) + \mu^*(A^c) = 1$ ، آنگاه A, μ^* اندازه‌پذیر است.

(۴) اگر A, μ^* اندازه‌پذیر باشد، آنگاه برای هر $E \subseteq X$ ، $\mu^*(A \cup E) + \mu^*(A \cap E) = \mu^*(A) + \mu^*(E)$.

۳۸- کدام گزینه درست است؟

(۲) هر مجموعه بورل، لیگ اندازه‌پذیر، است.

(۱) هر مجموعه لیگ اندازه‌پذیر، بورل است.

(۴) هر مجموعه لیگ اندازه‌پذیر، باز است.

(۳) هر مجموعه لیگ اندازه‌پذیر، بسته است.

۳۹- فرض کنید C مجموعه کانتور و m اندازه لبگ روی \mathbb{R} باشد. کدام گزینه نادرست است؟

$$(۱) \quad m(\tau C) = 0 \quad \text{که} \quad \tau C = \{\tau x : x \in C\}$$

$$(۲) \quad m(C+1) = 0 \quad \text{که} \quad C+1 = \{x+1 : x \in C\}$$

(۳) مجموعه C بولر اندازه پذیر است.

(۴) اجتماع مجموعه C و یک مجموعه شمارای بی کران در \mathbb{R} ، پوچ نیست.

۴۰- از کدام گزینه، لبگ اندازه پذیری تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، نتیجه نمی شود؟

(۱) برای هر عدد گویای r ، مجموعه $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < r\}$ اندازه پذیر لبگ است.

(۲) $f(x) = \int_0^x g(t) dt$ ، که در آن، g بر هر بازه فشرده در \mathbb{R} ، انتگرال پذیر ریمان است.

(۳) $f = g \circ h$ که در آن، g و h توابع حقیقی لبگ اندازه پذیر بر \mathbb{R} هستند.

(۴) تقریباً همه جا $f = g$ که در آن، g تابع حقیقی لبگ اندازه پذیر بر \mathbb{R} است.

۴۱- فرض کنید $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع یک به یک، m اندازه لبگ روی \mathbb{R} و $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ دنباله ای از اندازه ها روی

$P(\mathbb{N})$ باشد. کدام تابع مجموعه ای $v: P(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$ یک اندازه تعریف نمی کند؟ (A زیرمجموعه \mathbb{N} است.)

$$(۱) \quad v(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A) \quad (۲) \quad v(A) = m(f(A))$$

$$(۳) \quad v(\emptyset) = 0 \quad \text{و} \quad v(A) = \sum_{x \in A} |f(x)|, \quad (A \neq \emptyset) \quad (۴) \quad v(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A)$$

۴۲- اگر $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شود، آنگاه مقدار انتگرال لبگ $\int_{[0, 1]} f$ ، کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \mathbb{Q} \\ x(1-x) & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$(۱) \quad \frac{1}{6} \quad (۲) \quad 1 - \cos(1)$$

$$(۳) \quad \frac{7}{6} - \cos(1) \quad (۴) \quad \text{وجود ندارد.}$$

۴۳- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع حقیقی اندازه پذیر بر فضای اندازه (X, μ) باشد، به طوری که نقطه وار به تابع f

میل می کند. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) f اندازه پذیر است.

$$(۲) \quad \int_X |f_n| d\mu \rightarrow 0 \quad \text{اگر} \quad \int_X |f| d\mu = 0$$

$$(۳) \quad f_n \xrightarrow{\mu} f \quad \text{اگر} \quad f \text{ اندازه پذیر باشد، آنگاه}$$

(۴) اگر به ازای هر n ، f_n بر X انتگرال پذیر باشد، ممکن است f بر X انتگرال پذیر نباشد.

۴۴- با فرض $1 \leq p < q \leq \infty$ ، کدام گزینه نادرست است؟

$$(۱) \ell^q \subseteq \ell^p$$

(۲) برای هر فضای با اندازه متناهی (X, μ) ، $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

(۳) برای هر $f, g \in L^p(X, \mu)$ ، اگر $\int_X |f - g|^p d\mu = 0$ ، آنگاه تقریباً همه جا $f = g$.

(۴) اگر $f \in L^p([0, 1])$ آنگاه دنباله‌ای از توابع پیوسته بر $[0, 1]$ مانند $\{g_n\}$ وجود دارد، به طوری که در L^p ،

$$g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$$

۴۵- فرض کنید X یک فضای نرم‌دار و $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی خطی باشد. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) اگر f کراندار باشد، آنگاه f پیوسته است.
 (۲) اگر X باناخ باشد، آنگاه f کراندار است.
 (۳) اگر $f(X)$ کراندار باشد، آنگاه f همه جا صفر است.
 (۴) اگر f تابع ثابت صفر نباشد، آنگاه f پوشا است.

جبر پیشرفته ۱:

۴۶- کدام حکم در مورد \mathbb{Z} -مدول $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ صحیح است؟

- (۱) هم آرتینی و هم نوتری است.
 (۲) آرتینی است ولی نوتری نیست.
 (۳) آرتینی نیست ولی نوتری است.
 (۴) نه آرتینی است و نه نوتری.

۴۷- کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

- (۱) هر R -مدول اینژکتیو، مدولی بخش‌پذیر است.
 (۲) هر R -مدول را می‌توان در R -مدولی اینژکتیو نشانید.
 (۳) فرض کنید R یک دامنه صحیح است. در این صورت هر R -مدول هم پروژکتیو است و هم اینژکتیو.

(۴) اگر M ، R -مدولی بخش‌پذیر و N زیرمدولی از آن باشد، آنگاه $\frac{M}{N}$ بخش‌پذیر است.

۴۸- اگر M یک \mathbb{Q} -مدول متناهی مولد پروژکتیو باشد آنگاه:

- (۱) M به عنوان \mathbb{Q} -مدول و به عنوان \mathbb{Z} -مدول اینژکتیو است.
 (۲) M یک \mathbb{Q} -مدول اینژکتیو است ولی یک \mathbb{Z} -مدول اینژکتیو نیست.
 (۳) M نه \mathbb{Q} -مدول اینژکتیو و نه \mathbb{Z} -مدول اینژکتیو است.
 (۴) M یک \mathbb{Q} -مدول اینژکتیو نیست ولی یک \mathbb{Z} -مدول اینژکتیو است.

۴۹- فرض کنید G یک گروه آبله متناهی باشد. در این صورت G به عنوان \mathbb{Z} -مدول

- (۱) پروژکتیو، اینژکتیو و یکدست است.
 (۲) پروژکتیو، اینژکتیو و یکدست نیست.
 (۳) پروژکتیو و اینژکتیو هست ولی یکدست نیست.
 (۴) پروژکتیو و اینژکتیو نیست ولی یکدست است.

۵۰- فرض کنیم برای یک حلقه R داشته باشیم $J(R)^2 = J(R)$ و $J(R) \neq 0$. در این صورت کدام حکم صحیح است؟

($J(R)$ رادیکال جیکوبسن R است.)

- (۱) R متناهی نیست و یک حلقه ساده نیست.
 (۲) R متناهی است و یک حلقه ساده نیست.
 (۳) R متناهی نیست و یک حلقه ساده است.
 (۴) R متناهی است و یک حلقه ساده است.

۵۱- فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار و $\circ \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow \circ$ دنباله دقیق کوتاهی از R -مدول‌ها و R -هم‌ریختی‌ها باشد که در آن $C \cong R \oplus R$. اگر M یک R -مدول دلخواه باشد، کدام گزینه

$$\text{در مورد دنباله } M \otimes_R A \xrightarrow{1_M \otimes f} M \otimes_R B \xrightarrow{1_M \otimes g} M \otimes_R C \text{ صحیح است؟}$$

(۱) $1_M \otimes f$ یک‌به‌یک و $1_M \otimes g$ پوشا است.

(۲) $1_M \otimes f$ یک‌به‌یک است و $1_M \otimes g$ لزوماً پوشا نیست.

(۳) $1_M \otimes f$ لزوماً یک‌به‌یک نیست و $1_M \otimes g$ پوشا است.

(۴) $1_M \otimes f$ لزوماً یک‌به‌یک و $1_M \otimes g$ لزوماً پوشا نیست.

۵۲- کدام حکم در مورد \mathbb{Z} -مدول‌های $\mathbb{Z}_{p^\infty} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ و $\mathbb{Z}_{p^\infty} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ درست است؟

(۱) اولی صفر است ولی دومی ناصفر

(۲) هر دو صفرند

(۳) اولی ناصفر است ولی دومی صفر

(۴) هر دو ناصفرند

۵۳- اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار و $N(R)$ مجموعه عناصر پوچ‌توان حلقه R باشد، آنگاه کدام یک از گزاره‌های

زیر در مورد R -مدول متناهی مولد M صحیح است؟

(۱) اگر $\text{Hom}_R(M, N(R)) = \circ$ آنگاه $M = \circ$.

(۲) اگر $\text{Hom}_R(M, \frac{R}{N(R)}) = \circ$ آنگاه $M = \circ$.

(۳) اگر $M \otimes_R N(R) = \circ$ آنگاه $M = \circ$.

(۴) اگر $M \otimes_{\frac{R}{N(R)}} R = \circ$ آنگاه $M = \circ$.

۵۴- فرض کنید R حلقه‌ای یک‌دار، $J(R)$ رادیکال جیکوبسن R و $U(R)$ مجموعه تمام اعضای وارون‌پذیر R باشد.

فرض کنید $I(R) = \{r \in R \mid \forall u \in U(R), r+u \in U(R)\}$. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $J(R) = I(R)$

(۲) $J(R) \cap I(R) = \{\circ\}$

(۳) $J(R) \subseteq I(R)$ و تساوی لزوماً برقرار نیست.

(۴) $I(R) \subseteq J(R)$ و تساوی لزوماً برقرار نیست.

۵۵- چه حکمی در مورد \mathbb{Z} -مدول $\left(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z} \right)$ صحیح است؟

(۱) با حاصل ضربی از $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ ها یکریخت است و اینژکتیو است.

(۲) با حاصل جمعی از $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ ها یکریخت است و اینژکتیو است.

(۳) با حاصل ضربی از $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ ها یکریخت است و اینژکتیو نیست.

(۴) با حاصل جمعی از $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ ها یکریخت است و اینژکتیو نیست.

۶۰- مسئله برنامه‌ریزی خطی استاندارد زیر را در نظر بگیرید:

$$(P) \text{ Min } cx$$

$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

فرض کنید (P) جواب بهینه دارد و دوگان این مسئله (D) باشد. همچنین فرض کنید بردار ضرایب هزینه از c به c' چنان تغییر یابد که $c \leq c'$. اگر مسئله جدید را با (P') و دوگان آن را با (D') نشان دهیم، آنگاه کدام مورد درست است؟

(۱) (D') جواب بهینه دارد. (۲) (D') جواب بهینه دگرین دارد.

(۳) (D') بی‌کران است. (۴) (D') نشدنی است.

۶۱- مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر و جدول بهینه آن را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{s.t. } 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	۱	۰	۰	$\frac{28}{3}$	$\frac{8}{3}$	۵	۳۸
x_1	۰	۱	۰	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	۱	۸
x_2	۰	۰	۱	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	۱	۷

که در آن x_4 و x_5 متغیرهای کمکی هستند. اگر ضریب x_3 در تابع هدف از ۱ به ۱۱ تغییر کند، آنگاه مقدار بهینه جدید کدام است؟

$$\frac{176}{5} \quad (۲) \quad \frac{204}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{250}{7} \quad (۴) \quad \frac{282}{7} \quad (۳)$$

۶۲- می‌دانیم چند جمله‌ای‌های لاگور (Laguerre) که به صورت $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 1 - x$ و $P_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$ می‌باشند.

$P_2(x) = -\frac{1}{6}(x^3 - 9x^2 + 18x - 6)$ تعریف می‌شوند، با تابع وزن $w(x) = e^{-x}$ در $[0, +\infty)$ متعامدند. به روش

کوادراتورهای گاوسی دو نقطه‌ای مناسب، تقریبی از $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)e^x}$ ، کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۲) \quad \frac{7}{16} \quad (۱)$$

$$\frac{9}{16} \quad (۴) \quad \frac{11}{17} \quad (۳)$$

۶۳- تابع جدولی زیر برای تابع $y = f(x)$ مفروض است. با استفاده از روش درون‌یابی هرمیت، مقدار تقریبی $f(-1)$

x	-۲	۰	۲		کدام است؟
f	۴	۸	۱۲	۸ (۲)	۷ (۱)
f'	۲	-	-۲	$\frac{207}{32}$ (۴)	$\frac{225}{32}$ (۳)
f''	۴	-	-		

۶۴- فرض کنید $B_i^k(x)$ ، نمایش تابع B -اسپلاین درجه k متناظر با نقطه گرهی x_i باشد. مقدار $\int_{-\infty}^{\infty} B_i^k(x) dx$ کدام

کدام است؟

$$(1) \frac{x_{i+k+1} - x_i}{k+1}$$

$$(2) \frac{x_{i+k+1} - x_{i+1}}{k+1}$$

$$(3) \frac{x_{i+k} - x_i}{k+1}$$

$$(4) \frac{x_{i+k} - x_{i+1}}{k+1}$$

۶۵- فرض کنید G زیرفضای تولیدشده توسط مجموعه یکامتعامد $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ در فضای ضرب داخلی E باشد. کدام مورد نادرست است؟ (\cdot, \cdot) نمایش ضرب داخلی در فضای E و $\|\cdot\|$ نمایش نرم القاشده از ضرب داخلی است.

$$(1) \left\| \sum_{k=1}^n a_k g_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \|g_k\|^2, a_k \in \mathbb{R}, (k=1, \dots, n)$$

$$(2) \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^n | \langle f, g_k \rangle |^2$$

$$(3) P_n f = \sum_{k=1}^n \langle f, g_k \rangle g_k, \text{ یک عملگر تصویر است.}$$

$$(4) \text{اگر } f - \sum_{k=1}^n c_k g_k \perp G, \text{ آنگاه } \sum_{k=1}^n c_k g_k \text{ بهترین تقریب تابع } f \text{ است.}$$

اصول آموزش ریاضی:

۶۶- مسیر ورود دیدگاه مکانیکی (آزمون‌های معناداری آماری) به حوزه روش‌شناسی تحقیق در آموزش ریاضی، علاوه بر آموزش ریاضی، کدام موارد هستند؟

(۱) روان‌شناسی - علوم تربیتی

(۲) فلسفه - روان‌شناسی

(۳) کشاورزی - فلسفه

(۴) علوم تربیتی - فلسفه

۶۷- فعالیت‌های کدام یک از موارد زیر را به‌عنوان ریشه تاریخی اقدام‌پژوهی در نظر می‌گیرند؟

(۱) پیروان روان‌شناسی رفتارگرا در آمریکا

(۲) مبتنی بر فلسفه کنفوسیوس در چین

(۳) درس‌پژوهی در نظام آموزشی ژاپن

(۴) کورت لوین در جریان جنگ جهانی دوم

۶۸- کدام نظریه فلسفه ریاضی، بیشترین اثر را روی پیدایش دیدگاه ساخت‌وسازگرایی در آموزش ریاضی داشته است؟

(۱) صورت‌گرایی هیلبرت

(۲) منطق‌گرایی راسل

(۳) عدم تمامیت گودل

(۴) افلاطون‌گرایی

- ۶۹- در سیر تاریخی تحول برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای، هدایت کدام دوره بیشتر برعهده ریاضیدان‌ها بوده است؟
 (۱) ریاضی جدید
 (۲) بازگشت به اصول
 (۳) برنامه درسی مبتنی بر حل مسئله
 (۴) برنامه درسی استانداردمحور
- ۷۰- مهم‌ترین عاملی که باعث ترویج دیدگاه استعماری «استفاده از برنامه‌درسی ریاضی بین‌المللی» شده است، کدام است؟
 (۱) مستقل دانستن ریاضی از فرهنگ
 (۲) علم مطالعه الگوها دانستن ریاضی
 (۳) قائل شدن به ارتباط متقابل بین ریاضی و فرهنگ
 (۴) توجه به فرهنگ‌های گوناگون در برنامه درسی ریاضی
- ۷۱- در سنت‌های آموزشی کدام کشور، برگزاری آزمون‌های کتبی ریشه دارد؟
 (۱) ژاپن
 (۲) چین
 (۳) ایران
 (۴) انگلستان
- ۷۲- آموزش ریاضی به‌عنوان یک رشته دانشگاهی، در کدام سال و پس از کدام واقعه شکل گرفت؟
 (۱) ۱۹۶۸ - تأسیس مجله مطالعات آموزشی در ریاضی
 (۲) ۱۹۵۲ - تشکیل مجدد کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی بعد از جنگ جهانی دوم
 (۳) ۱۹۰۸ - تأسیس کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی
 (۴) ۱۹۵۷ - فرستادن قمر مصنوعی اسپاتنیک شوروی به مدار زمین
- ۷۳- نهضت ساخت‌وسازگرایی در آموزش ریاضی، ریشه در کدام موارد دارد؟
 (۱) فلسفه صورت‌گرایی در ریاضی - ریاضی به‌عنوان یک پدیده چندفرهنگی
 (۲) نسبیت‌گرایی در فلسفه ریاضی - فلسفه صورت‌گرایی در ریاضی
 (۳) نسبیت‌گرایی در فلسفه ریاضی - ریاضی به‌عنوان یک پدیده جهانی
 (۴) نسبیت‌گرایی در فلسفه ریاضی - ریاضی به‌عنوان یک پدیده چندفرهنگی
- ۷۴- جنبش حل مسئله، در واکنش به کدام نوع برنامه درسی ارائه شده است؟
 (۱) ریاضی مبتنی بر سودمندی اجتماعی
 (۲) ریاضی مبتنی بر اصول موضوعه
 (۳) دوران «ریاضی جدید»
 (۴) رجعت به اصول
- ۷۵- از دیدگاه آلن بی‌شاپ، کدام موارد ویژگی‌های اصلی پژوهش‌های حوزه آموزش ریاضی را مشخص می‌کند؟
 (۱) مبتنی بر شواهد تجربی و بنیان نظری است.
 (۲) مبتنی بر شواهد و نظریه است و آگاهانه انجام می‌شود.
 (۳) آگاهانه و عمدی است و بر مبنای یک نظریه آموزشی شناخته شده طراحی شده است.
 (۴) مبتنی بر تجربه زیستن است و بر مبنای چند نظریه آموزشی از قبل تأیید شده، طراحی شده است.