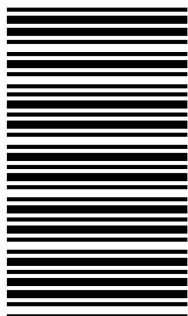


کد کنترل

۸۸۸

A



888A

عصر پنجشنبه

۱۴۰۳/۱۲/۰۲

دفترچه شماره ۳ از ۳



جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

«علم و تحقیق، کلید پیشرفت کشور است.»  
مقام معظم رهبری

آزمون ورودی دوره‌های دکتری (نیمه‌متمرکز) - سال ۱۴۰۴  
آمار (کد ۲۲۳۲)

مدت زمان پاسخگویی: ۱۳۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵ سؤال

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مبانی آنالیز ریاضی - ریاضی عمومی (۱ و ۲) - احتمال (۱ و ۲)	۳۰	۱	۳۰
۲	استنباط آماری ۱	۱۵	۳۱	۴۵

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

\* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات کادر زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی جلد دفترچه سؤالات و پایین پاسخنامه ام را تأیید می نمایم.

امضا:

مبانی آنالیز ریاضی - ریاضی عمومی (۱ و ۲) - احتمال (۱ و ۲):

۱- فرض کنید  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  دو تابع مشتق پذیر باشند، به طوری که  $f \neq g$  و برای هر  $x \in (0, +\infty)$  داشته

$$\text{باشیم: } f'(x) = -\frac{g(x)}{x} \text{ و } g'(x) = -\frac{f(x)}{x}. \text{ مقدار } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ کدام است؟}$$

(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴)  $+\infty$

۲- فرض کنید  $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$  و  $x \in [-1, 1]$  و  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  کدام مورد درست است؟

(۱) هیچ کدام از  $f_n$  ها و  $f$  در نقطه صفر مشتق پذیر نیستند.

(۲) هیچ کدام از  $f_n$  ها در  $(-1, 0)$  مشتق پذیر نیستند.

(۳)  $f_n$  ها تنها به ازای  $n$  های زوج در  $[-1, 1]$  مشتق پذیرند.

(۴) هر  $f_n$  در  $[-1, 1]$  مشتق پذیر است، لیکن  $f$  در صفر مشتق پذیر نیست.

۳- فرض کنید  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{2n+1}{n+2}x & \frac{1}{n} < x \leq 1 \\ \frac{n+1}{n+2}x & \frac{1}{n^2} < x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n}x^2 & 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2} \end{cases}$  و  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ ،  $0 \leq x \leq 1$ ،  $f(x)$  کدام است؟

(۱) صفر

(۲)  $x$

(۳)  $2x$

(۴)  $x^2$

۴- کدام مورد درست است؟

(۱) تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $f(x) = e^x$ ، پیوسته یکنواخت است.

(۲) تابع  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  پیوسته یکنواخت است.

(۳) اگر توابع  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته یکنواخت باشند، آنگاه  $fg: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  نیز پیوسته یکنواخت است.

(۴) اگر تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته یکنواخت و  $\{x_n\}$  یک دنباله کوشی در  $\mathbb{R}$  باشند، آنگاه  $\{f(x_n)\}$  نیز یک دنباله کوشی است.

۵- متریک  $d$  با ضابطه  $d(x, y) = \begin{cases} \max\{|x|, |y|\} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$  روی  $\mathbb{R}$  مفروض است. کدام مجموعه در فضای متریک

$(\mathbb{R}, d)$  باز نیست؟

(۱) مجموعه اعداد اصم (گنگ)

(۲) مجموعه اعداد گویا

(۳)  $[1, 2]$

(۴)  $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$

۶- مقدار  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x^x}{2^x - 2x}$ ، کدام است؟

(۱)  $\frac{-\ln 2}{1 - \ln 4}$

(۲)  $\frac{\ln 2}{1 - \ln 4}$

(۳)  $\frac{\ln 4}{1 - \ln 4}$

(۴)  $\frac{\ln 4}{1 - \ln 2}$

۷- اگر  $\int_0^x e^{(x^2-t^2)} t^2 dt = \frac{1}{2} e^{x^2} + Ax^2 + B$  آنگاه مقدار  $A + B$  کدام است؟

(۱) -۱

(۲)  $-\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۴) ۱

۸- مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های  $y = [\pi x] \sin(\pi x)$ ،  $y = 0$  و  $x = 1$  واقع در ربع اول صفحات مختصات، کدام

مضرب  $\frac{1}{\pi}$  است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

(۱)  $3 + \cos 1 - \cos 2 + \cos 3$

(۲)  $3 - \cos 1 + \cos 2 - \cos 3$

(۳)  $3 + \cos 1 + \cos 2 + \cos 3$

(۴)  $3 - \cos 1 - \cos 2 - \cos 3$

۹- فرض کنید  $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}e^x}$  و  $J = \int_0^1 \sqrt{x} \ln x \, dx$ . کدام مورد درست است؟

(۱) I همگرا و J واگرا است.

(۲) I واگرا و J همگرا است.

(۳) I و J هر دو همگرا هستند.

(۴) I و J هر دو واگرا هستند.

۱۰- معادله صفحه مماس بر سطح  $z = x^2 - xy + y^2 - 1$  در نقطه A واقع بر آن، بر بردار یکه مماسی منحنی با بردار

وضیعت  $\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + 2t \vec{j} + t \vec{k}$  در لحظه t، عمود است. مختصات نقطه A در لحظه  $t = 1$ ، کدام است؟

(۱) (۲, ۲, ۳)

(۲) (-۲, ۲, ۱۱)

(۳) (۲, -۲, ۱۱)

(۴) (-۲, -۲, ۳)

۱۱- بزرگ‌ترین حجم مکعب مستطیلی که می‌توان در بیضیگون  $4x^2 + y^2 + z^2 = 3$  محاط کرد، کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۸

(۴) ۱۶

۱۲- مقدار  $\int_0^{\pi} \int_y^{\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx \, dy$ ، کدام است؟

(۱)  $\frac{\pi}{4}$

(۲) ۱

(۳)  $\frac{\pi}{2}$

(۴) ۲

۱۳- حجم ناحیه محدود به رویه  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  که در بالای صفحه  $xy$ ، درون استوانه  $x^2 + y^2 = 4$  و بیرون استوانه  $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  قرار دارد، کدام است؟

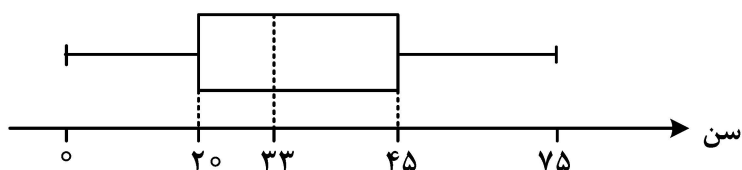
$$(1) \quad 2\pi\left(-\frac{3}{4} + \ln 4\right)$$

$$(2) \quad \pi\left(-\frac{15}{8} + \frac{17}{4} \ln 2\right)$$

$$(3) \quad 2\pi\left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right)$$

$$(4) \quad \pi\left(-\frac{15}{16} + \ln 4\right)$$

۱۴- نمودار جعبه‌ای زیر، تعداد بیمه‌شدگان یک جامعه در سن‌های مختلف را نشان می‌دهد. اگر بدانیم ده درصد بیمه‌شدگان بالای ۶۰ سال دارند، تقریباً چند درصد از بیمه‌شدگان بین ۳۳ تا ۶۰ سال هستند؟



$$(1) \quad 35$$

$$(2) \quad 40$$

$$(3) \quad 45$$

$$(4) \quad 55$$

۱۵- از یک کیسه شامل  $N$  توپ که از یک تا  $N$  شماره‌گذاری شده‌اند،  $n$  توپ را با جایگذاری انتخاب می‌کنیم. احتمال این که حداقل یکی از توپ‌ها تکراری شود کدام است؟ ( $n < N$ )

$$(1) \quad \frac{1}{N^n}$$

$$(2) \quad 1 - \frac{1}{N!}$$

$$(3) \quad \frac{\binom{N}{n}}{N^n}$$

$$(4) \quad 1 - \frac{N!}{n! N^n}$$

۱۶- فرض کنید  $B_1, \dots, B_n$  پیشامدهای مستقل از هم روی فضای نمونه مشترک  $S$  باشند که  $P(B_i) = \frac{1}{n}$  برای

$i = 1, 2, \dots, n$ . احتمال این که حداکثر یکی از پیشامدها رخ دهد کدام است؟

$$(1) \quad \frac{(n-1)^{n-1}(2n-1)}{n^n}$$

$$(2) \quad \frac{n^{n-1}(2n-1)}{(n+1)^n}$$

$$(3) \quad \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

$$(4) \quad \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$$

۱۷- فرض کنید احتمال این که یک خانواده  $n$  فرزند داشته باشد برابر  $2^{-n-1}$  است و جنسیت فرزندان از هم مستقل و دارای احتمال مساوی پسر یا دختر باشد. احتمال این که یک خانواده حداقل یک فرزند داشته باشد، مشروط به این که پسر نداشته باشد، چقدر است؟

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

۱۸- در یک بازی شیروخط با یک سکه سالم، بازیکن A تعداد ۲۵ سکه و بازیکن B تعداد ۲۰ سکه را با هم پرتاب می کنند. احتمال این که هر دو تعداد شیرهای مساوی به دست بیاورند، چقدر است؟

$$\binom{45}{20} \left(\frac{1}{2}\right)^{45} \quad (1)$$

$$\binom{45}{15} \left(\frac{1}{2}\right)^{45} \quad (2)$$

$$\binom{45}{20} \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \quad (3)$$

$$\binom{45}{15} \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \quad (4)$$

۱۹- تعداد ۳۰ عدد به تصادف از توزیعی با تابع چگالی  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $x \geq 1$  انتخاب می کنیم. انتظار می رود چه تعداد از آنها بزرگ تر از ۵ باشند؟

$$9 \quad (1)$$

$$7 \quad (2)$$

$$6 \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$

۲۰- فرض کنید  $X \sim U(-\theta, \theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  و  $Y = X^2$ . ضریب همبستگی بین  $X$  و  $Y$  کدام است؟

$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\text{صفر} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

۲۱- فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی دارای توزیع توأم نرمال دو متغیره با  $E(X) = E(Y) = 0$ .

$\text{Var}(Y) = \text{Var}(X) = 1$  و  $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4}$  باشند، مقدار  $E(\max\{X, Y\})$  کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{3\pi}{2}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3\pi}} \quad (4)$$

۲۲- فرض کنید  $Z, Y, X$  مستقل و هم توزیع از توزیع نمایی با میانگین ۱ باشند. مقدار  $P(Z > Y | X > Y)$ ، کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

۲۳- طول عمر دو مدل مختلف تلویزیون  $A$  و  $B$  بر حسب سال به صورت نمایی توزیع شده‌اند. احتمال این که تلویزیون

$A$  هم چنان در  $T$  سال بعد کار کند، برابر  $e^{-3}$  است. اگر واریانس طول عمر تلویزیون  $A$  شانزده برابر واریانس طول

عمر تلویزیون  $B$  باشد، احتمال این که تلویزیون  $B$  نیز هم چنان در  $T$  سال بعد کار کند، کدام است؟

$$e^{-1} \quad (1)$$

$$e^{-4} \quad (2)$$

$$e^{-12} \quad (3)$$

$$e^{-8} \quad (4)$$

۲۴- فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی گسسته باشد به طوری که  $P(X = n) = a_n, n = 1, 2, \dots$  و  $M_n(t)$  تابع مولد

گشتاور شرطی  $Y$  به شرط  $X$  باشد. در این صورت تابع مولد گشتاور  $Y$ ، کدام است؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n M_n(t) \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a_n} M_n(t) \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-M_n(t)} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-[a_n + M_n(t)]} \quad (4)$$

۲۵- فرض کنید  $(X, Y) \sim N_p(0, 0, 1, 1, \rho)$  باشد. مقدار  $\text{Cov}(XY, X+Y)$  کدام است؟

(۱) -۲

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) ۲

۲۶- اگر  $X_1$  و  $X_2$  یک نمونه تصادفی از متغیر تصادفی  $X$  با  $E|X_1 - X_2| = 2$  باشد، کدام مورد صحیح است؟

(۱)  $\text{Var}(X) \leq 2$

(۲)  $\text{Var}(X) \leq 4$

(۳)  $\text{Var}(X) \geq 2$

(۴)  $\text{Var}(X) \geq 4$

۲۷- فرض کنید  $X_1$  و  $X_2$  متغیرهای تصادفی مستقل نرمال استاندارد و  $U$  یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه  $[0, 1]$

و مستقل از  $X_1$  و  $X_2$  باشد. واریانس  $UX_1 + (1-U)X_2$ ، کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{4}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{2}{3}$

(۴) ۱

۲۸- اگر  $X$  یک متغیر تصادفی گسسته با مقادیر صحیح مثبت باشد، آنگاه یک کران پایین برای  $P(X > 0)$ ، کدام است؟

(۱)  $\frac{E(X^2)}{E^2(X)}$

(۲)  $\frac{E^2(X)}{E(X^2)}$

(۳)  $\frac{E(X^2)}{E(X)}$

(۴)  $\frac{E(X)}{E(X^2)}$

۲۹- اگر  $X$  متغیر تصادفی نامنفی با  $E(X) = a$  باشد در مورد  $E\left(\frac{1}{X}\right)$ ، چه می توان گفت؟

(۱)  $E\left(\frac{1}{X}\right) \geq \frac{1}{a}$

(۲)  $E\left(\frac{1}{X}\right) \leq a$

(۳)  $E\left(\frac{1}{X}\right) \leq \frac{1}{a}$

(۴)  $E\left(\frac{1}{X}\right) \geq a$



۳۰- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع پواسون با میانگین یک باشد، توزیع حدی  $\frac{\overline{X^2}}{(\overline{X})^2}$ ، کدام است؟

- (۱) نرمال استاندارد
- (۲) نمایی با پارامتر ۱
- (۳) تباهیده در نقطه ۲
- (۴) خی دو با ۱ درجه آزادی

استنباط آماری ۱:

۳۱- فرض کنید برای مقادیر معین  $x_i$  ها  $Y_i$ ، ( $i = 1, \dots, N$ ) از هم مستقل و دارای توزیع نمایی با میانگین  $\beta x_i$  باشند. در این صورت برآورد گشتاوری پارامتر  $\beta$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{\overline{X}}{\overline{Y}}$
- (۲)  $\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}$
- (۳)  $\overline{Y}$
- (۴)  $\frac{1}{\overline{Y}}$

۳۲- از جامعه‌ای با تابع احتمال زیر و به‌ازای  $0 \leq \theta \leq 1$ ، از بین ۲۰ نمونه انتخابی ۵ مشاهده برابر ۱، ۳ مشاهده برابر ۲، ۵ مشاهده برابر ۳ و ۷ مشاهده برابر ۴ شده‌اند. در این صورت برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر  $\theta$ ، کدام است؟

x	۱	۲	۳	۴
$P_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1+\theta}{4}$	$\frac{1-\theta}{4}$

- (۱) صفر
- (۲)  $\frac{1}{4}$
- (۳)  $\frac{1}{2}$
- (۴) ۱

۳۳- فرض کنید  $X_1, X_2, X_3, X_4$  یک نمونه تصادفی از توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda$  باشد که در آن  $\lambda \in \{0.5, 1, 1.5\}$ . اگر مجموع مشاهدات برابر ۳ باشد، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $\lambda$  کدام است؟

$$(\ln 2 \approx 0.693)$$

- (۱) ۱/۵
- (۲) ۰/۵
- (۳) ۱
- (۴) ۰/۷۵

۳۴- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر  $\theta$  باشد، با تعریف آماره‌های

$$T_1 = 3X_1 + X_2 + 2X_3 \quad \text{و} \quad T_2 = 3X_1 - X_2 - 2X_3 \quad \text{و} \quad T_3 = 2X_1 + X_2 + 2X_3$$

$$T_1, T_2 \quad (۱)$$

$$T_1, T_3 \quad (۲)$$

$$T_2, T_3 \quad (۳)$$

$$T_1, T_2, T_3 \quad (۴)$$

۳۵- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع  $N(\theta, 1)$  باشد. اگر  $T = \bar{X}$  مقدار  $P(X_1 + X_2 \leq 2 | T = t)$  برای  $t \in \mathbb{R}$  کدام است؟ ( $\Phi$  تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد است.)

$$\Phi\left(\frac{1-t}{\sqrt{\frac{2}{n}}}\right) \quad (۱)$$

$$\Phi\left(\frac{1-t}{\sqrt{2-\frac{2}{n}}}\right) \quad (۲)$$

$$\Phi\left(\frac{1-t}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}}\right) \quad (۳)$$

$$\Phi\left(\frac{1-t}{\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}}\right) \quad (۴)$$

۳۶- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل و  $X_i$  دارای توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda > 0$ ،  $i = 1, \dots, n$  باشد. آماره بسنده کامل برای زوج  $(\mu, \lambda)$ ، کدام است؟

$$(\bar{X}, S^2) \quad (۱)$$

$$\left(\prod_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i\right) \quad (۲)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n iX_i, \sum_{i=1}^n X_i^2\right) \quad (۳)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n iX_i\right) \quad (۴)$$

۳۷- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع  $U(0, \theta)$  باشد. در صورت وجود،  $UMVUE$  پارامتر  $\gamma(\theta) = \text{Var}(x_1)$  کدام است؟ ( $X_{(n)}$  بزرگ‌ترین آماره ترتیبی است).

$$\frac{n}{12(n+2)} X_{(n)}^2 \quad (۱)$$

$$\frac{n+2}{12} X_{(n)}^2 \quad (۲)$$

$$\frac{n+2}{12n} X_{(n)}^2 \quad (۳)$$

$$\frac{n}{12} X_{(n)}^2 \quad (۴)$$

۳۸- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با میانگین  $\theta$  باشد. برآوردگر  $UMVU$  برای  $\frac{1}{\theta} e^{-\frac{a}{\theta}}$  کدام

است؟ ( $a$  یک مقدار ثابت مثبت است).

$$T(\underline{x}) = \begin{cases} 0, & \sum x_i \leq a \\ (n-2) \frac{(\sum_{i=1}^n x_i - a)^{n-1}}{(\sum_{i=1}^n x_i)^{n-2}}, & \sum x_i > a \end{cases} \quad (۱)$$

$$T(\underline{x}) = \begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^n x_i \leq a \\ (n-1) \frac{(\sum_{i=1}^n x_i - a)^{n-2}}{(\sum_{i=1}^n x_i)^{n-1}}, & \sum_{i=1}^n x_i > a \end{cases} \quad (۲)$$

$$T(\underline{x}) = \begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^n x_i \leq a \\ \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^n}{(n-2)(\sum_{i=1}^n x_i - a)^{n-2}}, & \sum_{i=1}^n x_i > a \end{cases} \quad (۳)$$

$$T(\underline{x}) = \begin{cases} 0, & \sum x_i \leq 0 \\ \frac{(\sum x_i)^n}{(n-1)(\sum x_i - a)^{n-1}}, & \sum x_i > a \end{cases} \quad (۴)$$

۳۹- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی  $f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1}$ ,  $0 < x < 1, \theta > 0$  باشد.

کران پایین کرامر-رائو (CRLB) برای واریانس برآوردگر ناریب  $\alpha(\theta) = e^{-\theta}$ ، کدام است؟

$$\frac{\theta^2 e^{-\theta}}{n} \quad (1)$$

$$\frac{\theta^2 e^{-2\theta}}{n^2} \quad (2)$$

$$\frac{\theta^2 e^{-2\theta}}{n} \quad (3)$$

$$\frac{\theta^2 e^{-\theta}}{n^2} \quad (4)$$

۴۰- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت پیوسته روی بازه  $(0, \theta)$  باشد و  $\theta$  نیز دارای

توزیع پیشین یکنواخت پیوسته روی بازه  $(0, 1)$  است. تحت تابع زیان  $L(\theta, \delta) = \left(\frac{\delta - \theta}{\theta^2}\right)^2$ ، برآوردگر بی‌زی

پارامتر  $\theta$  کدام است؟ ( $X_{(n)}$  آماره ترتیبی  $n$  ام است.)

$$\left(\frac{n+3}{n+2}\right) \left(\frac{X_{(n)}^{-n-2} - 1}{X_{(n)}^{-n-2} - 1}\right) \quad (1)$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{X_{(n)}^{-n} - 1}{X_{(n)}^{-n-1} - 1}\right) \quad (2)$$

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \left(\frac{X_{(n)}^{-n-1} - 1}{X_{(n)}^{-n-2} - 1}\right) \quad (3)$$

$$\left(\frac{n+4}{n+3}\right) \left(\frac{X_{(n)}^{-n-3} - 1}{X_{(n)}^{-n-4} - 1}\right) \quad (4)$$

۴۱- فرض کنید  $X$  دارای توزیع گسسته روی  $\{1, \dots, \theta\}$  باشد که  $\theta \in \Theta = \{1, 2, 3\}$ . با در نظر گرفتن توزیع پیشینی

یکنواخت گسسته روی  $\Theta$  و تحت تابع زیان توان دوم خطا برآورد بی‌زی  $\theta$  به‌ازای مشاهده  $x = 2$  کدام است؟

$$2 \quad (1)$$

$$2/6 \quad (2)$$

$$2/5 \quad (3)$$

$$2/4 \quad (4)$$

۴۲- فرض کنید مقادیر مشاهده شده یک نمونه ۳ تایی از توزیع برنولی با پارامتر  $\theta$  به صورت  $(\circ, 1, \circ)$  باشد؛ به طوری که  $\theta$  دارای توزیع پیشین  $\text{Beta}(2, 3)$  است. در این صورت تحت تابع زیان قدر مطلق خطا، کدام یک از موارد زیر برآورد بیز  $\theta$  است؟

$$(1) \frac{1}{2}$$

$$(2) \frac{4}{5}$$

$$(3) \frac{1}{3}$$

$$(4) \frac{3}{5}$$

۴۳- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d}{\sim} N(\circ, \tau^2)$ . تحت تابع زیان  $L(\tau, d) = \frac{(d - \tau^2)^2}{\tau^4}$ ، تابع مخاطره  $\sum_{i=1}^n X_i^2$  به عنوان

برآوردگر  $\tau^2$ ، کدام است؟

$$(1) \frac{2\tau^4}{n+2}$$

$$(2) \frac{4+n}{(n+2)^2}$$

$$(3) \frac{2}{n+2}$$

$$(4) \frac{(4+n)\tau^4}{(n+2)^2}$$

۴۴- فرض کنید  $X$  دارای توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda > \circ$  باشد. تحت تابع زیان توان دوم خطا کدام یک از برآوردهای زیر مجاز است؟

$$(1) \delta(X) = \frac{1}{2}$$

$$(2) \delta(X) = X + \frac{1}{2}$$

$$(3) \delta(X) = 1 - X$$

$$(4) \delta(X) = 2X$$

۴۵- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر  $\theta$ ،  $\circ < \theta < 1$ ، باشد. در مجموعه برآوردهای

$D = \{c\bar{X}; \circ \leq c \leq 1\}$ ، تحت تابع زیان  $L(d, \theta) = \frac{(d - \theta)^2}{\theta(1 - \theta)}$  کدام برآوردگر برای  $\theta$ ، مینمکس است؟

$$(1) \delta(\bar{X}) = \circ$$

$$(2) \delta(\bar{X}) = \bar{X}$$

$$(3) \delta(\bar{X}) = \frac{1}{2}\bar{X}$$

(4) وجود ندارد.





